3. 3. 67

S. 1802. c 18

Уг. 4. 1

S.1802.c.18.

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS IV.

ad Annum MDCCLII. et MDCCLIII.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLVIII.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS IV.

* * * * * * * * *

Dum quartum hoc *Nouorum Commentariorum* volumen tardius, quam par eſt, in lucem prodit, nullam quidem indigenis excuſationem afferre tenemur, vt qui ſtudii noſtri in euulgandis vtiliſſimis libris probe gnari, procul dubio gratias habebunt Academiae, quod, aliarum gentium morem imitata, ante omnia Patriae conſulere ſtudet, vernacula potius lingua, quam aliena, in ſcriptis publici iuris faciendis vtendo: Exteris autem, ſi tardam debiti exſolutionem aegre ferent, et inprimis diſ-

ſertationum in hoc volumine contentarum auctoribus, ſi conquerentur, ſcripta ſua inter manus noſtras nouitatis delectamento priuari, nunciamus, editionem eorum, quae hoc excipient, voluminum ſine mora proceſſuram eſſe. Nunc enim, aucto operarum et prelorum numero, Academia vtrique fini proſpexit: non deerit ciuibus, non deerit exteris. Sic grata agnoſcens PETRI MAGNI et OPTIMAE ELISABETAE in ſe beneficia legibus a Conditore et Inſtauratrice ſibi praeſcriptis nunquam non ſatisfacere allaborabit.

MATHEMATICA.

In hac *Leonh. Eulerus* V. Cel. vtramque facit paginam. Diſſertationem ordo et conſpectus hic eſt:

I.

De Numeris, qui ſunt aggregata duorum quadratorum p. 3.

Non fruſtra eſt, quod veteres Mathematici, vti ex ſcripti *Euclidis* ac *Diophanti* liquet, ſummo ſtudio numerorum indolem ſcrutati, proprietatibus eorum haud mediocr ter delectati ſunt. Praeterito etiam ſaeculo primi ordinis Geometrae plurimum ſtudii in exploranda numerorum natura conſumſerunt, inter quos *Fermatius*, Senator Toloſanus, ita eminuit, vt eius ſagacitatem etiam nunc nemo ſit aſſecutus. Mos tunc inualuerat, veritates, quas quisque inueſtigaſſet, nude potius ad caeterorum ingenia exercenda, proponere, quam demonſtrationes, docendi cauſa, indicare, quo factum eſt, vt ſublimes *Fermatii* meditationes in hoc genere adhuc hodie magis miremur, quam cognoſcamus, propterea quod poſt eius obitum ſcripta, quibus earum demonſtrationes continebantur, temporis iniuria maximo huius ſcientiae damno interierunt. Praeſtantiſſimus itaque auctor huius diſſertationis haud inutiliter operam ſuam collocare cenſendus eſt, dum huiusmodi deperditas demonſtrationes Fermatianas reſtaurare conatur, etiamſi noſtro quidem aeuo hoc ſtudium,

 quod

quod in numerorum natura inueſtiganda conſumitur, plane derelictum, atque adeo a plerisque ſpretum, videatur. Quanquam enim hoc quidem tempore Mathematici in cultura Analyſeos ſublimioris et partibus Matheſeos applicatae, quae veteribus inacceſſae fuerunt, potiſſimum elaborare ſolent, nulla tamen veritas prorſus ſterilis et omni vſu deſtituta videtur. Quin potius numerorum proprietates plerumque multo maiorem ſagacitatem et ingenii vim poſtulant, quod vel ex eo colligere licet, quod in reliquis Matheſeos partibus vix vlla cognoſcatur veritas, cuius demonſtratio non ante iam fuerit perſpecta, cum contra plurimae habeantur numerorum proprietates, quarum veritatem adhuc ſine demonſtratione admittere cogimur, auctoritate potiſſimum *Fermatii* inducti, qui ſe eas demonſtraſſe palam eſt profeſſus. Ad hoc genus referendae ſunt plures inſignes proprietates numerorum, qui ſunt binorum quadratorum aggregata, quarum demonſtrationes Cel. Auctor in hac diſſertatione proponit. De his numeris, ſi quidem bina quadrata eos componentia fuerint inter ſe prima, ſeu communem diuiſorem non admittant, id prorſus eſt ſingulare, quod alios diuiſores non agnoſcant, niſi qui ipſi eiusdem ſint indolis, binorum ſcilicet quadratorum ſummae, cuius rei demonſtratio haud parum ardua hic ſuppeditatur. Deinde cum omnes huius generis numeri, ſi fuerint primi, vnitate minuti per quaternarium ſint diuiſibiles, ſiue in hac forma $4n + 1$ contineantur, memorabile eſt, viciſſim omnes numeros primos huius formae $4n + 1$ ſimul eſſe ſummas duorum quadratorum, cuius demonſtrationis autem ſe

nondum

nondum compotem eſſe factum Cel. auctor ingenue fatetur, etiamſi eius veritatem extra dubium collocauerit: in quo inſigne conſpicitur ſpecimen, etiam in mathematicis eiusmodi dari veritates, quas ſine perfecta demonſtratione credere cogimur. In ſequenti volumine Commentariorum noſtrorum plena eiusdem demonſtratio apparebit, qua omnia, quae hinc deriuantur, penitus confirmabuntur. Hic ex iſta proprietate egregiam deduxit methodum, eamque ſatis facilem, explorandi, vtrum numerus huius formae $4n+1$, quantumuis fuerit magnus, primus ſit, nec ne? Totum negotium huc redit, vt exploretur, vtrum talis numerus propoſitus in ſummam duorum quadratorum reſolui queat, an minus? vbi tres caſus ſunt perpendendi. Primo, ſi numerus propoſitus nullo prorſus modo in duo quadrata ſit reſolubilis, certum eſt, eum non eſſe primum, ſed duos ad minimum factores habere formae $4m-1$; ſecundo, ſi vnico modo in duo quadrata fuerit reſolubilis, eaque ſint prima inter ſe, hoc certum eſt indicium numerum propoſitum eſſe primum; tertio, ſi is plus vno modo in duo quadrata diſcerpi queat, neceſſario erit compoſitus, eiusque diuiſores inde aſſignari poſſunt. Vulgo autem iudicium, vtrum numerus propoſitus ſit primus, nec ne? haud parum moleſtiae creare ſolet, ſi is centena millia ſuperet. Ad hunc enim terminum vsque habentur tabulae numerorum primorum paſſim obuiae, atque adeo ſinicis characteribus exaratae. Pro maioribus autem numeris adhuc alia via non patuit, niſi vt diuiſio per omnes numeros primos vsque ad radicem quadratam numeri propoſiti

tentetur.

tentetur. Nunc autem, dum numerus propoſitus in forma $4n + 1$ contineatur, totum negotium multo minore labore abſoluitur, cuius plura ad calcem huius tractationis extant ſpecimina, quod eo magis notatu dignum videtur, quod nulla operatio per diuiſores inſtituatur.

II.

De conſtructione aptiſſima molarum alatarum p. 41.

Nonſolum inter artifices, ſed etiam Geometras, quaeſtio iam pridem eſt agitata, quemadmodum alas in machinis, quae vi venti impelluntur, inſtrui oporteat, vt maximus inde effectus obtineatur. Geometris quidem haec quaeſtio haud difficilis eſt, poſtquam inuenerunt, ad alas circumagendas a vento maximam vim exeri, ſi earum ſuperficies ad venti directionem ſub angulo 54° $45'$ fuerit inclinata, verum in hoc negotio non totam quaeſtionem ſunt contemplati, propterea quod iſte angulus tum ſolum maximam impulſionem producit, quam diu machina adhuc eſt in quiete. Simulac vero machina iam in motu verſatur, vti principia, quibus haec inueſtigatio innitebatur, non amplius locum habent, ita etiam illi angulo nulla praerogatiua relinquitur. Quare cum effectus huiusmodi machinarum non in quiete, ſed in motu ſit conſtitutus, angulus ille nihil quicquam ad earum perfectionem confert; atque adeo experientia compertum eſt, angulum multo maiorem feliciori ſucceſſu in hoc machi-

machinarum genere adhiberi. Qui hinc anſam ſumſerunt Theoriam arguendi, quod ſaepe praxi aduerſetur, ſtatum quaeſtionis perperam intellexerunt, cum angulus ille 54°. 45′ per Theoriam inuentus praxi vtique inſeruiat, ſi modo circumſtantiae cum iis, quae in Theoria ſunt poſitae, conueniant; quis autem conſenſum poſtulet, ſi in Theoria ad alias conditiones, atque in praxi, reſpiciamus?

In hac diſſertatione Cel. Eulerus luculenter oſtendit, ſi alae in motu verſentur, maiorem angulum inclinationis ſtatui oportere, vt a vento maxima vis excipiatur, atque adeo pro quouis celeritatis gradu circa extremitates alarum inclinationem magis ad angulum rectum accedere debere, quam circa axem. Quod cum etiam ab aliis ſit obſeruatum, Auctor hic monet, ne hac quidem correctione adhibita, Theoriam perfecte cum praxi conciliari. Neque enim, dum maximum effectum intendimus, id poſtulamus, vt quouis momento vis alas circumgens ſit maxima; ſed ſimul ad celeritatem, qua ea vis agit, eſt reſpiciendum: propterea quod fieri poteſt, vt minor vis celerius agens maiorem effectum producat, quam vis maior tardius agens. Cum igitur quaeſtio non ad quantitatem vis impellentis, ſed potius ad quantitatem effectus ſit reuocanda, huius menſuram ante rite ſtabiliri oportet, quam enodatio quaeſtionis ſuſcipi queat. Omnium autem machinarum effectus tanquam eleuatio ponderis cuiusdam ſpectari poteſt, et quia effectus eo maior aeſtimatur, quo celerius idem pondus, vel quo maius

b pondus

pondus eadem celeritate attollitur, productum ex pondere in celeritatem, qua eleuatur, iuſtam exhibebit menſuram effectus cuiusque machinae. Iam vero hoc idem productum in omnibus machinis ſemper aequale eſt producto ex vi impellente in celeritatem, qua agit, vnde et hoc productum veram effectus, quem machina praeſtare valet, quantitatem ſuppeditat. Ex quo intelligitur, exiguam vim, dummodo ſatis celeriter agat, quantumuis magnum effectum producere poſſe. Neque hic obiectio valet, fieri forte poſſe, vt parua vis magno ponderi eleuando non ſufficiat: notum enim eſt, quemadmodum quamuis machinam diſponi conueniat, vt etiam a minima vi maximum onus ſuperari queat; ſcilicet quo maius fuerit onus, id eo propius centro motus applicari oportet, quo eius motus tanto tardior euadat, quod vtcunque machina ex ſimplicibus fuerit compoſita, ſemper fieri poteſt. Hinc ad effectum molae alatae a priori determinandum, ſingula alarum elementa conſiderari, et vis venti ea impellens, quatenus circumactionem promouet, in celeritatem cuiusque elementi multiplicari debet, quo facto omnium horum productorum elementarium ſumma praebebit totum machinae effectum.

Ex hoc principio Auctor molarum alatarum effectum in genere definit, quaecunque ſit alarum figura et diſpoſitio, et quaecunque motus gyratorii celeritas, hincque deinceps methodo maximorum et minimorum cum formam alarum, tum vero potiſſimum motus gyratorii celeritatem inueſtigat, vt effectus prodeat maxi-

mus

mus. Eidem fundamento innititur regula iam ſatis nota pro molis aquariis aliisque machinis, quae rota a flumine circumacta impelluntur, dum ita inſtrui ſolent, vt celeritas palarum ſit tertia pars celeritatis fluminis. Verum in molis alatis, vbi actio venti prorſus eſt diuerſa, praeter expectationem eiusmodi maximum elicitur, quod rationi aeque atque experientiae contrarium videtur. Docet enim calculus maximum effectum comparari, ſi ſuperficies alarum ad directionem venti plane fuerit normalis, eaeque celeritate infinita circumagantur: tum quidem vis venti impellens euaneſcit, quod tamen non obſtat, quin per celeritatem infinitam multiplicata productum finitum praebeat, quod ipſum calculus maius oſtendit, quam ſi machina aliter inſtrueretur. Verum tamen certum eſt, talem diſpoſitionem in praxi nullo modo locum habere poſſe, vnde cauſam huius diſſenſus theoriae ab vſu practico accuratius inueſtigari oportet, quae in eo poſita reperitur, quod in Theoria quaedam aſſumuntur, quae in praxi obſeruari nequeunt. Quod diſcrimen, ſi diſtincte fuerit perſpectum, deinceps non amplius erit difficile, Theoriam ita ad praxin accommodare, vt perfectus conſenſus obtineatur. Ac primo quidem notandum eſt, in Theoria nullam frictionis rationem eſſe habitam, cuius quantum ſit momentum in machina aliter inſtruenda mox videbimus. Deinde etiam, dum alae celerrime circumaguntur, craſſitie ſua inſignem ab aëre reſiſtentiam patiuntur, quae in Theoria penitus eſt neglecta. Denique in Theoria aſſumitur, motum machinae ſtatim ab initio ita ad vniformitatem componi, vt vis impellens cum

 onere

onere ſuperando in aequilibrium conſtituatur, quod autem in praxi eo tardius euenit, quo maiori opus fuerit celeritate, quae ſi adeo ſit infinita, machina ad hunc ſtatum, maximum effectum producentem, nunquam perveniet. His notatis oſtendendum, ſi hae conditiones in praxi impleri poſſent, Theoriam nihil abſurdi indicaturam, ita, vt intelligi queat, quo magis alarum inclinatio ad angulum rectum accedat, eaeque ſimul celerius circumagantur, eo maiorem effectum impetrari poſſe. Ne idea infiniti obruamur, ponamus, ſuperficiem alarum cum venti directione facere angulum 89°, easque centies ſingulis minutis ſecundis circumagi debere: vim autem totam a vento exceptam tantum ponderi vnius vnciae aequiualere, quae vero per tantam celeritatem multiplicata productum exhibeat, quod ſit = 1000, cui ſimul effectus machinae aequabitur. Ad quem obtinendum, ſi onus ſuperandum aequiualeat ponderi 110000 vnciarum, machina ita eſt diſponenda, vt vis impellens vnius vnciae cum hoc tanto onere in aequilibrio conſtituatur, quod nihil habet abſurdi. Tum machina actioni venti expoſita tandem praedictum celeritatis gradum conſequetur, atque effectum aſſignatum producet, etiamſi, antequam ad hanc celeritatem pertingat, effectus futurus ſit minor, verum hoc interuallum in calculo pro nihilo reputatur. Hinc intelligere licet, ſi angulus inclinationis adhuc propius ad 90° augeatur, quo vis impellens magis diminueretur, vlterius aucta celeritate, fieri poſſe, vt adhuc maior effectus producatur, qui adeo vsque ad 90° creſcere queat, vbi certam quantitatem, eamque maximam, ſit aſſecuturus.

In-

Interim tamen ternae rationes ante allegatae impediunt, quominus haec ad praxin transferri poſſint. Imprimis autem frictio eſt impedimento, quae etſi plerumque inſtar oneris conſiderari poteſt, tamen eius reſiſtentiam non vti oneris pro lubitu diminuere licet. Cum enim oneris reſiſtentia diminuatur, dum id propius ad centrum motus applicatur, haec diminutio in frictione locum habere nequit, quae pro ſtructura machinae ſemper ad certam diſtantiam a centro motus manet applicata; deinde ſimilis fere ratio eſt illius reſiſtentiae aeris, a craſſitie alarum oriundae. Denique etiamſi hae reſiſtentiae non obſtarent, quo minus celeritas infinita efficeret, vt machina demum tempore elapſo infinito, hoc eſt, nunquam, eam adipiſceretur, effectumque expectatum produceret. Ob has cauſas Cel. Auctor praecipue in hoc elaboraſſe videtur, vt rationem frictionis in calculum induceret, qua cognita, diſpoſitionem machinae ita determinauit, vt ſuperata frictione maximus effectus produceretur, in quo iam nullum amplius incommodum praxi aduerſans cernitur, ſed potius egregius conſenſus deprehenditur. Obſeruat autem, frictionem tantam eſſe poſſe, vt ea ſola a dato vento ne quidem ſuperari, multo minus vllus effectus obtineri queat; vnde perſpicitur, in hoc machinarum genere diminutionem frictionis maximi eſſe momenti, ita, vt ea parum minuta, multo maior effectus ſit proditurus, qui, ſi frictio parumper eſſet maior, plane nullus eſſet futurus. Quare nullum eſt dubium, quin hinc maxima emolumenta in praxin ſint redundatura.

III.

Elementa Doctrinae ſolidorum p. 109.

itemque

IV.

Demonſtratio nonnullarum inſignium proprietatum, quibus ſolida hedris planis incluſa ſunt praedita p. 140.

Quanquam Stereometria inter diſciplinas Matheſeos elementares referri ſolet, plurimum tamen abeſt, quominus ea ſolide pertractata, atque, veluti Geometria plana, in ſyſtema certum redacta ſit cenſenda. Cum enim in Geometria plana, poſt lineas et angulos, figurae potiſſimum rectilineae examinentur, earumque proprietates demonſtrentur, quibus ob ſimplicitatem circulus adiungi ſolet, ita in Stereometria, iactis fundamentis de inclinatione planorum et angulis ſolidis, corpora hedris planis incluſa tractari, eorumque proprietates euolui conueniret, vbi imprimis haec corpora in certas claſſes diſtribui oporteret, quibus porro ob ſimplicitatem globus cum cylindro et cono adiungi poſſet. Verum in elementis ſtereometricis nihil prorſus de diuiſione corporum in certas claſſes ſecundum hedrarum numerum reperitur: ſed quaedam tantum ſpecies, veluti priſmata, pyramides et corpora regularia dicta, praetermiſſis reliquis omnibus, ſine vlla partitione et connexione mutua proferuntur. Quod autem in Geometria

metria plana facillimum erat figuras rectilineas ſecundum laterum numerum, quippe cui numerus angulorum ſemper eſt aequalis, in claſſes digerere, id in Stereometria, ſi tantum ad corpora hedris planis incluſa attendamus, multo magis eſt arduum, cum numerus hedrarum ſolus ad hoc non ſufficiat. Si enim ambitum horum corporum ſpectemus, ea nonſolum hedris terminantur, ſed etiam angulis ſolidis, et binarum hedrarum concurſibus, qui a Cel. Auctore, ob defectum aptioris et recepti nominis, *acies* vocantur; quarum rerum, quae non conſtanti quadam lege inter ſe connexae videntur, in corporum claſſibus conſtituendis vtique rationem haberi decet: propterea quod in corporibus, eodem hedrarum numero contentis, ingens diuerſitas, ratione angulorum ſolidorum et hedrarum, qua indoles eorum vehementer variatur, locum habere poſſit. Ita octaedrum, priſma ſexangulare, et pyramis ſuper baſi heptagona extructa octo hedris includuntur, quis autem haec tam diverſa corpora vna eademque claſſe complecti vellet? Hinc Cel. Auctor tres praecipuos characteres ad corpora in claſſes diſtinguenda conſtituit, qui ſunt 1° numerus hedrarum, 2° numerus acierum, ac 3° numerus angulorum ſolidorum. Qui haec attentius perpenderit, facile agnoſcet, ea ad indolem quorumuis corporum perſpiciendam ita eſſe neceſſariam, vt iis neglectis elementa Stereometriae nullo modo ſolide ac ſcientifice tradi queant, vnde mirum eſt, neminem adhuc de hiſce principiis Stereometriae conſtituendis cogitaſſe, hancque diſciplinam vltra terminos Euclideos vix quidquam eſſe promotam, cum tamen omnes Geometrae in hoc ſtudio plurimum fuerint oc-

cupati.

capati. Verum euolutio memoratorum characterum multo difficilior eſt, quam primo intuitu videtur. Deprehenduntur enim, certa quadam lege inter ſe connecti, cuius ratio ita abſcondita videtur, vt Auctor eam primum ſine demonſtratione, ſoli inductioni innixus, attulerit, ac poſtmodum demum poſt plura tentamina demonſtrationis compos ſit factus, quam in ſchediaſmate ſubnexo ſeorſim expoſuit. Veritas autem haec, demonſtratu tam difficilis, in hoc conſiſtit, vt in omni corpore hedris planis incluſo aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum ſolidorum ſemper binario excedat numerum acierum, quae propoſitio analoga eſt ei, qua in Geometria plana numerus angulorum cuiusque figurae rectilineae numero laterum aequalis pronunciatur. Atque vt haec fundamentum cognitionis figurarum continet, ita illa in Stereometria prima ſolidae cognitionis principia complecti eſt putanda. Statim ergo atque in corpore trium memoratorum characterum bini fuerint cogniti, tertius inde facillime innoteſcit. Si enim numerus angulorum ſolidorum fuerit $= S$, numerus acierum $= A$, et numerus hedrarum $= H$, ſemper habetur $S + H = A + 2$, hincque vel $S = A + 2 - H$, vel $H = A + 2 - S$, vel $A = S + H - 2$, quae relationis ſimplicitas ob demonſtrationis difficultatem magis miranda videtur. Deinde cum figurarum planarum haec ſit palmaria proprietas, quod omnes anguli iunctim ſumti aequales ſint bis tot rectis, quot ſunt anguli, demtis quatuor: ita etiam circa ſolida hedris planis incluſa Auctor quaſi ſimilem proprietatem demonſtrat, quae circa angulos ſingularum hedrarum verſatur, quorum

quorum omnium ſumma ſemper aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot in corpore habentur anguli ſolidi, demtis octo. Plures alias praeterea in medium allatas conſpicimus inſignes corporum talium proprietates ex numero laterum hedrarum petitas, prout eae vel ſunt triangulae, vel quadrilaterae, vel pentagonae, etc. vnde Cel. Auctor concludit ex meris hedris hexagonis, vel plurium angulorum, nullum ſolidum conſtrui poſſe. Ex his ſtabilitis principiis fluunt tandem claſſes et genera ſolidorum, eorumque praecipuae proprietates, quae campum ampliſſimum aperiunt, hanc doctrinam vberius excolendi, ſiquidem hinc completum Stereometriae ſyſtema condi poſſet.

V.

De Motu Corporum Coeleſtium p. 161.

Quando motus cuiuspiam corporis coeleſtis dicitur ſiue regularis, ſiue irregularis, ante omnia notandum, has voces ad cognitionem noſtram ita referri, vt ſi motus ille opinioni noſtrae conſentaneus deprehendatur, regularis, contra vero irregularis iudicetur. Ita veteribus fortaſſe motus corporum coeleſtium irregulares ſunt viſi, ſtatim atque animaduerterunt, ea non in circulis ferri, ſiquidem eorum opinio ad ſolum motum circularem fuerat adſtricta. Hodie autem, poſtquam *Kepleri* ſententia de orbitis ellipticis a *Newtono* firmiſſimis argumentis mechanicis eſt munita, regulae Keplerinae ita animos no-

ſtros occupauerunt, vt, ſi quae corpora coeleſtia ſecundum eas exactiſſime mouerentur, eorum motus a nobis maxime regularis iudicaretur, neque iam a nobis aliae irregularitates agnoſcantur, niſi vbi motus ab illis regulis deuiare obſeruatur. Eos ſcilicet motus in coelo pro regularibus habemus, qui fiunt in ſectionibus conicis, ita areae circa alterum focum deſcriptae ſint temporibus proportionales, a qua lege quidquid aberrauerit, ad irregularitates referre ſolemus; quae eo cenſentur maiores, quo maior fuerit iſta aberratio. Primum quidem Planetas principales perfecte ſecundum hanc legem circa Solem moveri ſunt viſi, atque adeo *Streetius* in Tabulis Carolinis eorum Aphelia immota ſtatuit; ex quo etiam nunc in eorum motibus alia irregularitas admitti non ſolet, niſi quatenus a regulis *Kepleri* diſcedunt. In Luna autem inſignis ab his regulis aberratio eſt obſeruata, cuius motus proinde iure ab Aſtronomis pro maxime irregulari habetur. Deinde vero etiam in motu Saturni haud leues aberrationes ſunt animaduerſae, nomine irregularitatum ſatis ſuperque notae. Tandem vero compertum eſt, nullum plane inter corpora coeleſtia dari, cuius motus regulis *Kepleri* perfecte ſit conformis, quod vel ex motu Apheliorum et nodorum, quae puncta ex ſententia *Kepleri* quieſcere debebant, in optimis autem Tabulis Aſtronomicis mobilia ſtatuuntur, manifeſtum eſt; Ex quo ſuſpicari licet, Cometarum motus, niſi forte prope inſignes Planetas praetergrediantur, ſolos eſſe regulares. Quando autem omnis irregularitas ita eſt comparata, vt per motum lineae abſidum exacte repreſentari poſſit, vix ea ſentitur, dum

ctum tabulae motum referentes ab illis regulis non recedere videntur: ſin autem, vti in Luna fit, excentricitas praeterea variabilis aſſumi, atque etiam aequatio aliis correctionibus indiget, irregularitas maior adeſſe cenſetur. Niſi igitur iſtae irregularitates admodum fuerint enormes, eae commodiſſime ita definientur, vt motu quodam regulari a vero minime diſcrepante, tanquam fundamento conſtituto, aberrationes ad continuam mutationem, tam lineae abſidum, quam excentricitatis, ipſiusque orbitae, reuocentur. Hoc ergo inſtitutum Cel. Auctor, poſtquam iam alio modo motum Lunae, perturbationesque Saturni, inueſtigaſſet, in hac diſſertatione omni ſtudio proſequitur, cum id ad calculum Aſtronomicum maxime accommodatum videatur. Cum autem irregularitates motui ſeſe immiſceant, ſimulac vires ſollicitantes non ad punctum fixum diriguntur, neque quadratis diſtantiarum ab eo fuerint reciproce proportionales, inueſtigationem ita inſtituit, vt praeter talem vim quadrato diſtantiae reciproce proportionalem, vnde motus omnino regularis eſſet proditurus, Planetam inſuper ab aliis quibuscunque viribus ſollicitari concipiat. Ad quarum effectum cognoſcendum primo examinat caſum, quo planeta hactenus motu regulari latus ſubito a vi externa ictum reciperet, eoque deinceps aliam orbitam deſcribere adigeretur, quae quantum a priſtina cum ratione poſitionis lineae abſidum, tum excentricitatis, tum vero etiam ratione axis, ſeu parametri, ſit diſcrepatura, ſedulo exquirit. Deinde hunc ictum infinite paruum facit, ſingulisque momentis reperi vtcunque concipit, quandoquidem perturbationes a viribus quibuscun-

que oriundas tanquam ictus momentaneos conſiderare licet. Hoc modo Planetae motus ita ad orbitam variabilem reducetur, vt primo ſitus lineae abſidum, tum excentricitas, ac tertio latus rectum, fiant quantitates variabiles, quas Auctor ex datis viribus perturbantibus ſollicite determinat, indeque ad quoduis tempus anomaliam veram iſti variabilitati conſentaneam deriuat, vnde tandem Planetae motus perfecte innoteſcit. Haec autem praecepta generalia tradidiſſe Auctori ſufficit, cum eorum applicatio ad quempiam caſum nimis prolixos calculos poſtularet, ſine quibus nullas plane huiusmodi inueſtigationes ſuſcipere licet. Ceterum ex iis, quae de perturbationibus Saturni, motu Lunae, et anomaliis motus Terrae, eſt commentatus, abunde perſpicitur, quemadmodum haec, praecepta per calculum exequi, atque ad vſum transferri oporteat.

PHYSICO-MATHEMATICA.

Primo loco occurrunt:

Georgii Wolffgangi Krafftii Reſolutiones Problematum ad Architecturam ciuilem ſpectantium p. 199.

Quamuis Architectura ciuilis, profundioris Matheſeos ſubſidio vix indigere plurimis videatur, atque huius adplicatio ad problemata architecturam ſpectantia com-

communiter negligatur, falli tamen, qui ita iudicant, re ipſa ſaepius iam oſtenſum eſt. Sunt autem problemata iſta Architectonica, a ſubſimiori Matheſi pendentia, inprimis quidem ea, quae aedificiorum firmitatem concernunt. Non tamen penitus excludenda ſunt, quae venuſtatem ſpectant, quanquam fateri fas ſit, minorem eſſe Matheſeos in poſterioribus, quam in prioribus, vſum. Vtriusque generis problemata tractat Clariſſ. Auctor in hac diſſertatione, quae et plurimos aliorum errores corrigit, et plura hactenus ab aliis non ſoluta problemata comprehendit.

Initium ducit Auctor a diligentiori concamerationum architectonicarum, quas fornices vocant, conſideratione. Supponit, vti fecerunt Auctorum architectonicorum optimi quiuis, venuſtatem atque commoditatem dimenſionis Geometricae poſtulare, vt cunei omnes, ex quibus fornix conſtat, ita parentur, vt lecti eorum ſinguli, ſeu rectae, ſecundum quas ſibi incumbunt cunei, ad medium fornicis punctum, tanquam ad centrum, convergant. Calculo tum inquirit, quanta in fornice, hac ratione conſtructo, ſit vis cuneorum reſpectiua, quacum quiuis eorum in plano, cui incumbit, verſus fornicis centrum deſcendere nititur. Quoniam autem, ex mente Auctoris, requirit fornicis firmitas, vt niſus hic, quem cuneus quiuis exercet, vbiuis ſit aequalis, deducit exinde, dari non poſſe fornicem, debita firmitate praeditum, cuius cunei omnes eſſent aequales mole, ac idem haberent pondus abſolutum, vnde porro concludit, inae-

qualem fornicis cuiusuis in diuerſis locis craſſitiem neceſſario admittendam eſſe, atque, ſi debita detur cuneis vbiuis longitudo, ſecundum curuae cuiusuis ductum, firmum atque ſtabilem erigere fornicem, in poteſtate eſſe. Anſam haec praebent Auctori, corrigendi errorem a *Serlio*, *Durero*, *Hartmanno* commiſſum, qui quippe ſolos ellipticos arcus fornicibus conſtruendis aptos iudicarunt, ad venuſtatem tamen potius forſitan, quam ad ſtabilitatem fornicis reſpicientes. Neque minus falli oſtendit Clariſſ. Auctor *Gregorium*, *Coupletum*, *Polhemium*, qui ſecundum catenariae ductum conſtrui poſſe fornicem, vbiuis aeque craſſum, et aequalis vbiuis ponderis cuneorum reſpectiui, pronunciarunt. Non tamen negat, conſtrui poſſe, ſi catenaria alia circumdetur curua ſibi parallela, fornicem vbiuis aeque craſſum, ac perfecte ſtabilem, quamuis enim in fornice eiusmodi partium grauitas reſpectiua aequalis reddi omnino nequeat, fit tamen firmus atque ſtabilis fornix eiusmodi, quoniam cuneus quiuis ſuperior tanta vi ſurſum vrgetur, quanta ſibi ſubiectum premit, vt primus rite oſtendit *Iac. Bernoullius.* Cum itaque ſecundum quamcunque libuerit curuam conſtruere fornicem firmum liceat, liberum erit Architecto, eligere eam, quam alio reſpectu optimam iudicauerit. Praecipue igitur ad venuſtatem reſpiciendum eſt. Pendere autem videtur haec fornicum pulchritudo a duplici potiſſimum fundamento. Inuenuſtus namque partim eſt fornix, cuius partes aut inter ſe, aut cum fulcris, quibus imponitur, ſenſibilem includunt angulum, ſiue poplitem, prouti loqui amant Architecturae periti, partim is, cuius partes ſubito

bito et multum curuaturam immutant: haec nempe ſubita curuaturae mutatio animum ſpectatoris magnopere laedere ſolet. Reiicit hac de cauſa, Auctor, curuam, quam vt fornicibus aptam commendant, ac delineare docent Architecti, quam poſt *la Hireum*, concinniori tamen methodo, parabolam eſſe oſtendit. Meliores propterea cenſet fornicibus conſtruendis arcus, aut ſemicirculares, aut ſi erigendi ſint fornices depreſſi, ſemi-ellipticos: hi enim poplite nonſolum carent, ſed et alteri venuſtatis requiſito omnino ſatisfaciunt. Effugiunt autem Architecti ellipticorum fornicum exaedificationem, quia harum curuarum deſcriptionem iuſto moleſtiorem exiſtimant, vnde ad arcus circulares confugere ſolent, quos ita inter ſe combinare laborant, vt oculo gratam figuram ellipticae ſimilem, quam oualem vocant, componant. Delineandi eiusmodi fornices methodos ſuppeditat varias *Serlius*, optimam *Blondellus*, cuius tamen ſolutio hoc laborat vitio, quod ſolam fornicis latitudinem datam ſupponat, et, ſi praeterea detur quoque altitudo, ea inutilis euadat. Emendat hunc defectum Auctor, ac modum, ex tribus circuli arcubus componendi oualem aſpectui gratam, ac fornici, cuius datur, tam latitudo, quam altitudo, aptam, docet, infelicesque *Pitoti* in hoc negotio conſumtos labores emendat. Quoniam vero Auctoris ſolutio neceſſario requirit, vt arcus circulares, ſibi inuicem contigui, ex quibus componitur fornix, diuerſis deſcribantur radiis, timendumque hinc ſit, ne curuaturae ſubita mutatio, adſpectum laedat, quid obſeruandum ſit, vt radiorum ſimulque curuaturarum differentia fiat minima, quae eſſe poteſt, inquirit.

Eadem

Eadem haec principia poſtea adplicando ad turrium arcuata rotunda faſtigia, quomodo eleganter delineari haec queant, oſtendit.

Spectant hactenus propoſita ad caſum, vbi fornix imponendus eſt pilis verticalibus, atque aequalibus; occurrunt autem in Architectura caſus, vbi fornices conſtituendi ſunt obliqui, quos *arcs rampants Galli* vocare ſolent. Erraſſe *Blondellum*, qui ad caſum iſtum arcuum circularium combinationem omnino inutilem eſſe, exiſtimauit, re ipſa oſtendit Clariſſ. Auctor. Poſtquam nempe primum, quomodo ellipſes fornicibus eiusmodi aptae inueniendae ſint, docuit, quomodo ex arcu circulari duplici fornix conſtituatur poplite carens et venuſtus, oſtendit, ſiue pilae, quibus fornix incumbit, non ſint verticales, ſed obliquae, ſiue ſint verticales, at inaequales.

Tranſit tum Auctor ad tectorum rectilineorum conſiderationem, ac primum oſtendit, quod alia iam ratione inuenerat *Coupletus*, ſiue tectum ſit altius, ſiue depreſſius, aequaliter premi tectorum cantheria, ab impoſitis ſibi tegulis, maius tamen eſſe in tectis altioribus fracturae periculum, quoniam, ob vectem longiorem, maiori momento agit haec preſſio in iis, quam in depreſſioribus. Perhibuerat porro *Coupletus*, minorem eſſe tectorum altiorum impulſum lateralem, aſt falli ipſum demonſtrat Auctor, probans, tectum altius maiori ſemper vi premere extrorſum, quam depreſſius. Pertinet huc quoque quaeſtio, de tectis, *Manſardicis* dictis, quae

quae ita conſtruere iubent firmitatis regulae, vt ipſa ſe teneant in aequilibrio, cuius problematis, poſt *Coupletum* aliam Auctor ſolutionem exhibet, lectori aequo ac intelligenti, vtra alteri praeferenda ſit, diiudicandum relinquens. Plura de hac eleganti et in praxi Architectonica valde vtili diſſertatione dicere ſuperuacaneum foret. Notamus errorem operarum, dum tecta Manſardica in diſſertatione Krafftiana p. 232. *Marſardica* fuerunt appellata.

Quae ſequuntur commentationes ſunt *Georgii Guilielmi Richmanni*, V. Cl. quas ipſe typis paratas Academiae exhibuit, poſtumae quidem, ſed non tales, in quibus vltima Auctoris lima deſideraretur. Sunt autem ſequentes:

II.

De virtute Magnetica abſque Magnete communicata Experimenta

p. 235.

Occaſionem ad haec experimenta inſtituenda ſuppeditauit vir ſumme reuerendus atque doctiſſimus *Daniel Dumaresque*, SS. Theol. D. et Eccleſiae Anglicanae, quae Petropoli colligitur, Paſtor meritiſſimus, qui vt Muſis, quae et ipſum amant, fauentiſſimus eſt, ſolet ſubinde libros nouos ex Anglia ad ſe miſſos, noua inuenta etiam ex Patria ad ſe perſcripta, cum Academicis

communicare. Hac humanitate vſus eſt inter caeteros *b. Richmannus*, qui poſtquam de arte, magnetes artificiales conficiendi, atque de experimentis circa hanc rem in Anglia inſtitutis, ex ſcriptis et litteris ad doctiſſimum *Dumaresquium* perlatis certior fuiſſet factus, mox occaſionem hanc inſtituendarum nouarum diſquiſitionum auide arripuit. Verum fateor, doctrina haec poſt fata viri Clariſſimi, ab aliis multum iam exculta eſt, et ad eximium perfectionis gradum producta; non tamen exiſtimandum hos aliorum labores, inutilia reddidiſſe, quae Academia hic publicae luci exponit *Richmanni* experimenta. Plurima enim ab aliis non notata in hac diſſertatione occurrunt. Primo ſtatim experimento deſcribit modum, quo duplo maiorem, ac *Michelius*, vis magneticae gradum laminae chalybeae impreſſit. Habet tum aliqua memoratu non indigna, circa deſtructionem vis magneticae, eiusque, poſtquam deſtructa fuit, nouam reproductionem. Tradit methodum a nemine, quantum ſcimus, obſeruatam, magneticam vim inſigniter augendi. Namque fulcra ferrea adhibet, quibus laminam, magnetica vi imbuendam imponit. Hoc ignoraſſe Clariſs. *Michelius* cenſendus eſt, quia nullam huius rei mentionem iniecit. Finem denique imponit diſſertationi experimentis quibusdam, circa attractionem laminarum artificiali magnetiſmo imbutarum, et augmentum huius vis indictis laminis, quae Phyſicis non ingrata futura exiſtimamus.

IIII.

III.

Inquiſitio in legem decrementi et incrementi caloris ſolidorum in aere.

p. 241.

De vi maiori aut minori corporum calorem retinendi, aut ipſum aſſumendi, per experimenta diligentiora exploranda, vix cogitaſſe videntur Phyſici ante Richmannum noſtrum, vnde mirum non eſt, accidiſſe quibusdam, quod raro euitabit, qui ſepoſitis experientiis, ſolorum ratiociniorum ope ad naturae myſteria penetrare conatur, vt nempe in erroreas inciderint hypotheſes. Differt iſta quam loquimur vis omnino ab ea, qua corpora diuerſa aut maioris, aut minoris, caloris gradus capacia dicuntur. Si enim de poſteriori quaeſtio eſt, maximi, quos recipere poſſunt varia corpora, caloris gradus, inter ſe comparantur, nulla habita temporum quibus acquirere aut perdere poſſunt hos calores, ratione; at, ſi de priori ſermo eſt, quaeritur, quodnam corpus ſimilibus circumſtantiis ſuppoſitis, dato tempore maiorem caloris gradum acquirat, aut perdat altero, aut quodnam corpus eundem caloris gradum maiori, quodnam minori temporis interuallo, vel acquirat, vel perdat. Oſtendit alibi Clariſſ. Auctor, falſo perhiberi a quibusdam, proprietatem hanc corporum, de qua loquimur, ſequi denſitatum rationem, ita vt corpus denſius, difficilius, rarius, facilius, calore aut priuetur, aut imbuatur. Deprehendit enim Mercurium,

Nou. Comm. Tom. III. p. 312. ſeq.

 fluidum

fluidum omnium denſiſſimum, inter fluida craſſiora calori eſſe obedientiſſimum, vnde et optimo conſilio factum eſt, vt ipſum pro conſtruendis Thermometris eligerint recentiores. Solida iam ſub examen vocare ſibi propoſuit Auctor, atque ſumma, qua potuit, ſolertia experimenta, quae huc pertinent, inſtituit. Non deſcribimus methodum, qua in inſtituendis ipſis, vſus eſt. Id enim paucis fieri non poteſt, melioremque, quam hic dare valemus, ex ſcripti ipſius lectione, ideam polliceri ſibi poſſunt lectores. Conſpirant autem omnia a Viro Clariſſimo inſtituta atque deſcripta experimenta, ad probandum, neque a denſitate, neque a cohaerentia abſoluta, neque a duritie corporum, pendere hanc proprietatem, qua calorem vel maiori, vel minori pertinacia retinent, aut auiditate aſſumunt, legem autem, quam hic ſequitur natura, penitus adhuc ignotam eſſe. Indigemus itaque adhuc plurimis in hanc rem inſtitutis experimentis, antequam ſufficientem huius Phaenomeni cognitionem ſperare queamus. Quanquam autem id ſolnm egerit Clariſſimus Collega, vt doceret, ignorare nos adhuc quandam ex praecipuis actionis cao is legibus: nihilominus obſtrictos ſe ipſi fatebuntur naturae ſcrutatores. Ab erroribus enim ſe tueri difficillimum eſt, ſi cognitum creditur, quod penitus ignoratur.

Continet haec Clariſſ. *Richmanni* Diſſertatio aliam adhuc diſquiſitionem, ad ſcopum ſcriptionis immediate quidem non ſpectantem, aſt dignam, cuius mentionem quoque iniiciamus. Obſeruarunt iam ante illum Phyſicorum aliqui, aquam in phiala contentam, ebullienti aquae immerſam

merſam, valide quidem incaleſcere, ſed perduci eo nunquam poſſe, vt et ipſa ebulliat. Sponte ſe hic offerente occaſione, exactius hanc rem Auctor rimatus eſt, atque inuenit, vix vnquam vltra gradum 205 aſcendere Thermometrum Fahrenheitianum, ſi immergatur aquae, vaſe metallico, quod vndique maiori ebullientis aquae copia cinctum eſt, contentae; quod tamen Thermometrum, ebullienti aquae immediate immerſum nunquam non ad gradum 212 adſcendit. Suspicari quis poſſet, cauſam huius Phaenomeni latere forſan in eo, quod aqua non capax quidem ſit caloris eius, qui 212 gradui Thermometri Fahrenheitiani reſpondet, aſt quod ſuperfluus ignis, argentum viuum, quod maiorem, quam aqua recipere poteſt calorem, intret, vt ſic Mercurius maiorem obtineat aqua ambiente calorem, atque ad gradum 212 aſcendere cogatur. Sed falſam eſſe hanc hypotheſin oſtendit Auctor, experimento quo docet, oleum loco aquae vaſi metallico, ab ebulliente aqua circumdato, infuſum, quanquam itidem maioris, quam aqua, caloris capax ſit, nunquam tamen vltro gradum 205 incaleſcere. Neque ratio inde petenda eſt, quod vas aquam continens, dum experimenta haec inſtituuntur, non totum in ebulliente aqua ſubmerſum eſſe ſolet, ſed aliqua ſui parte ex ipſa prominet. Expertus enim eſt Clariſſ. Auctor, etiamſi vas penitus aqua ebulliente vltra horam obtectum fuerit, contentam nihilominus vaſe hoc aquam, nunquam vltra gradum 205 incaluiſſe, vt itaque concludendum ſit, latere etiam hic naturae arcanum quoddam, cuius cauſam omnino ad huc ignoramus.

IV.

Tentamen, ſolutionem in diuerſa temperie ad menſuram reducendi.

p. 270.

Notiſſimum eſt, dum ſalia ſoluuntur ab aqua, velocius hoc fieri, ſi fluidum ſoluens maiorem, tardius, ſi minorem poſſideat caloris gradum, nondum tamen hactenus peruentum eſt ad regulam, quam natura hic ſequitur, et cuius ope, quantum ſolutionis increſcat celeritas, creſcente aquae ſoluentis calore, determinari poteſt, quamuis probabile videatur, eſſe velocitates ſolutionum, in ratione celeritatum particularum ſoluentis a calore agitatarum, ſiue in ipſa calorum ratione. Cum vero a priori, vt vocant, regulae huius veritas neutiquam cum certitudine probari queat, ad experimenta properandum eſſe iudicauit Auctor. Confici itaque curauit cubulos ex ſale gemmae, quantum fieri potuit, exacte aequales, quorum alterum in temperie 42, alterum in temperie 84 graduum Thermometri Fahrenheitiani ſolutioni permiſit, atque ſimul, quanta cuiusuis pars dato tempore ſoluta ſit, ope librae mobiliſſimae, accurate annotauit. Inuenit, eſſe ſolutionum celeritates, ſub temperiebus 42 et 84 graduum, quam proxime, vti 1 ad 2, quapropter, pro hoc caſu, ſolutionum velocitates exacte fere ſunt in ratione graduum Thermometri Fahrenheitiani, qui temperiebus fluidi ſoluentis, reſpondent. Quodſi itaque

que, de quo tamen nondum conſtat, idem obtineret, quod ad caeteros quoque Thermometri huius gradus, omnino ſcala Thermometri Fahrenheitiani inſigni prae reliquis gauderet praerogatiua, atque mirandum valde foret, absque conſilio Thermometrum hoc ita eſſe conſtructum.

V.

Tentamen rationem caloris reſpectiuam lentibus et Thermometris definiendi. p. 277.

Conſtat inter Phyſicos, datam quandam Mercurii, aut fluidi cuiusdam alterius maſſam, ſi augeatur ipſius calor, in maius volumen extendi; neque minus certum eſt, maiorem caloris gradum maius quoque voluminis augmentum producere. Nondum autem hinc elucet, an augmentum hoc voluminis in eadem prorſus ratione procedat, vti caloris augmentum, vt nempe duplum v. g. caloris incrementum, duplum quoque producat expanſionis incrementum, an minus. Dubitarunt ergo non ſine ratione Phyſicorum plerique, an Thermometra noſtra ipſa caloris incrementa menſurare apta ſint. Per ſe enim patet, exhibere haec inſtrumenta immediate, non niſi voluminis Mercurii, Thermometro incluſi, incrementa, quae, an caloris incrementis ſint proportionalia, iure dubitatur. Dantur nempe argumenta, quae contrarium indicare non obſcure videntur. Poſſident ſine dubio Mercurii

curii particulae vim quandam ipſas ad vnionem perpetuo ſollicitantem, quam calor, dum extenditur Mercurius, ſuperare debet. Admodum autem probabile aliisque naturae legibus analogum videtur, vim iſtam, quo magis dilatatur Mercurius, eo reddi minorem, ita vt in Mercurio multum iam dilatato, idem caloris incrementum de nouo accedens, minorem iam inueniens reſiſtentiam, maiorem producere debeat effectum, quam in Mercurio parum expanſo operari valet. Tentauit Clarisſ. Auctor, rem hanc experimentorum ope, quae lapidis inſtar lydii ſunt in Phyſicis, in lucem collocare, et non ſolum, an vere dilatationis augmenta in maiori creſcant ratione, ac caloris incrementa, determinare, ſed et in ipſam regulam, cuius ope ex dilatationis augmento, augmentum caloris, et vice verſa, inueniri poteſt, inquirere. Res haec eo diligentiore perquiſitione digna iudicanda eſt, quo detecta tandem hac regula ex datis Thermometri gradibus, ipſa calorum incrementa, ſeu potius ratio horum incrementorum, determinari poterunt. Opus erat ad inſtituenda haec experimenta, methodo, diuerſos caloris gradus, cognitae ad ſe inuicem rationis, producendi, quod feliciter Auctor obtinuit, ope lentium conuexarum, quae cylindros radiorum ſolarium in conum colligunt, vnde poſt eas, in diuerſis diſtantiis calores inuerſam quadratorum diſtantiarum a foco rationem, ſequuntur. Expoſuit conis iſtis radioſis, Thermometra perfecte concordantia et aequaliter mobilia, et quanta fuerint aequalibus temporibus dilatationis Mercurii in vtroque incrementa, diligenter annotauit. Ex his poſtea obſerua-

tionibus

tionibus ſcopum ſuum attingere laborauit, ac inuenit quidem, in eo, quod dilatationis incrementa in maiori ratione creſcant, quam incrementa caloris, non abludere penitus experientiam a Theoria, aſt ad legem eruendam, haec experimenta nondum ſufficere. Pollicetur itaque ſub finem, ſe laboraturum, vt nouis experimentis quibus Thermometra amplioris ſcalae adhibere volebat, legem hanc tandem eruat: ſed infelix atque improuiſa mors Collegae deſideratiſſimi aliis hunc, in quo laborent, campum reliquit.

VI.

De Indice Electricitatis et eius vſu in definiendis artificialis et naturalis Electricitatis Phaenomenis p. 301.

Diſſertationem hanc ſermoni Academico die VI. Septembris 1753 in ſolemni Academiae conuentu habendo deſtinauerat Cel. Auctor: at fato praeuentus, non habuit. Quare cum, quod alias fieri ſolet, ſingulariter typis excuſa non ſit, hic ei locum aſſignauimus, demtis, quae characterem ſermonis conſtituebant, et huic loco minus apta videbantur. Hoc opuſculum coronidem perſcrutationibus Phyſicis Richmannianis imponit. Haec meta ſtadii ab ipſo decurſi. Hic exequialis cantus, quo, olorum inſtar, mortem ſibi ipſi praeſagire viſus eſt. *Fortitudinem quandam*, dixit, (*) *et in re ancipiti audaciam*

e *nouiſ-*

(*) p. 335 huius diſſertationis.

nouiſſimis his temporibus Phyſicis pateret. Sed ipſius damno patuit. Primum de fulmine auertendo cogitabatur. Inde anſam arripuit noſter, vt conuenientiam inter Electricitatem naturalem et artificialem magis ſimul indagaret. Apparatus, quo vtebatur, in ipſa hac diſſertatione deſcriptus eſt. Fulmen ita attrahens, non auertens, monebatur quidem a plurimis, vt caute procederet. Sed ille fortitudinem ſuam Phyſicam eminenti gradu poſſidebat, periculum ſibi non obuerſari ratus, quoad index non maiorem Electricitatis gradum monſtraret, quam ipſa machina electrica producere poſſit. Aſt factum eſt, vt repente terribile fulmen oriretur, antequam noſter, qui indici ſuo adſtabat, violentiam eius obſeruare potuiſſet. Ita periit eheu! infelici ſuo fato Richmannus, Phyſicos ſuo exemplo docens, quanta cautione opus ſit in experimentis huius indolis ſine periculo capiendis. Iam ad ipſam diſſertationem procedimus.

Primus procul dubio Phyſicorum eſt Clariſs. Richmannus, qui de conſtruendo indice Electrico, ſiue inſtrumento, cuius ope quantitatem productae in corpore quodam Electricitatis ad menſuram reuocare, aut ſaltem aeſtimare queamus, cogitauit. Non infeliciter rem ipſi ceſſiſſe deſcriptio inuenti, Commentariorum noſtrorum Tomo XIV data, ſatis indicat. Repetit hanc breui Auctor ſub initium diſſertationis, ſtatimque, quae ipſi in inſtrumento hoc adhuc deſiderari videntur, ingenue ſubiungit. Laborare nempe duplici defectu indicem, quod adplicatus corpori cuidam electrificato, vt cito pereat Ele-

ctricitas

ctricitas, efficere ſoleat, quodque non ſatis commode cuilibet maſſae aut corpori adplicari queat. Vtrique defectui remedium quaerens Auctor, in penitus nouam incidit conſtructionem eiusmodi indicis, quem delineatum et exacte deſcriptum hic ſiſtit. Legant harum rerum auidi deſcriptionem ipſam; inſerere enim eam hic, a ſcopo noſtro alienum eſt.

Abſoluit haec noui indicis electrici inueſtigatio aque deſcriptio primam diſſertationis partem, aſt habet praeterea quoque ipſa haec prior pars egregia plurima ac notatu digna, quo referimus, quae circa lumen conicum, ex angulis ſolidis acutis corporum electrificatorum erumpens, deque coniuncto cum luminis huius apparentia inſigni atque notabili electricitatis decremento, aliisque, quae debilitare ſolent Electricitatem, cauſis, commentatus eſt Vir Clariſſimus.

Progreditur tum Auctor ad primarium diſſertationis ſcopum, qui in eo conſiſtit, vt, quae ope indicis electrici prioris ſui, (poſteriorem namque, quem pauco ante mortem tempore primum exogitauerat, in vſum vocare nunquam potuit) circa Electricitatis Phaenomena obſeruare ipſi contigit, notabilia, deſcribat. Plura ſunt in quibus vtilem expertus eſt indicem ſuum experimenta, quam vt recenſere ea, ac in compendium redigere queamus: hoc ſolum monemus, in duas claſſes diſtribui ab Auctore obſeruationes ſuas; exhiberi primum, quae Electricitatem artificialem, vt vocant, dein quae Electrici-

tatem atmoſpherae aereae ſpontaneam, ſiue fulmineam, aut naturalem, concernunt. In vtroque genere habet Auctor quae ipſi propria, ac, vt orbi erudito innoteſcant, digna, putamus.

Natus erat noſter Pernauiae in Liuonia die XI. Iulii ſt. v. cIↄIↄccxi. patre Wilhelmo Richmanno, Quaeſtore eius vrbis, ſub finem anni 1710, antequam naſceretur noſter, peſte defuncto. Bonas litteras Reualiae, Halae et Ienae gnauiter excoluit, totum ſe Matheſeos et Phyſices ſtudiis conſecrauit. Venit Petropolin, filios Comitis Oſtermanni litteris imbuturus, quo munere per aliquot annos non ſine laude functus eſt. Anno 1535 in Academia Adiuncti munus obtinuit, anno 1741 ad Profeſſionem Phyſices extraordinariam, et anno 1745 ad ordinariam, abitu Cel. Krafftii vacuam, adſcendit. Diem vitae vltimum vidit XXVI. Iulii 1753, Orpheo, Aeſculapio, Zoroaſtri, ſimilis, qui etiam fulmine enecti perierunt, ſed qui magis Ethnicorum fabulis, quam ob hoc ipſum, celebritatem nominis aſſequuti ſunt, cum noſter e contrario famam ſibi ſcriptis partam inſolito hoc mortis genere quam maxime confirmauerit. Si plures erunt eruditi martyres, qui in ipſa functione muneris ſui, et propter eam ipſam, mortem paſſi ſunt, procul dubio Richmannus noſter choream ducet. Caeterum lectorem remittimus ad ea, quae de tragico hoc euentu in ſingulari ſcripto, Tranſactionibus Philoſophicis Anglicanis pro anno 1753 inſerto, commentati ſumus.

PHY-

PHYSICA.

Variorum Auctorum lucubrationes hanc claſſem conſtituentes ſequente ſe ordine excipiunt:

I.

Abrahami Kaau Boerhaue Diſſertatio de cohaeſione ſolidorum in corpore animali. p. 343.

Etiamſi vir doctiſſimus nuper apud nos vita defunctus in hac diſſertatione cogitata magis ſua, quam obſeruata, tradiderit; non dubitamus tamen, fore, vt omnes, qui doctrinam de corporis animalis fabrica excolunt, eodem fauore illam, quo priora eius ſcripta dignati ſunt, proſequantur. Reperient enim hic Auctorem in omnibus ſibi ſimilem, multa eruditione et iudicii dexteritate argumentum pertractantem, genuinum, vt paucis dicam, *Magni Boerhaauii* diſcipulum, qui veſtigiis diui praeceptoris et auunculi ſui vbiuis preſſe inſiſtit. Tam ample ante illum nemo de hac materia ſcripſit, nemo comparationem inter corpus animale, vegetabile et minerale, quod ad hanc doctrinam attinet, tam belle inſtituit. Mos erat Auctori, vt diffuſa eruditione pollebat, in quoduis, quod tractabat, argumentum copioſe redundante, plura in ſcriptis ſuis praeſtare, quam quidem primum intenderat. Ita hic quoque multa cumulauit, quae ſub

praefata inſcriptione vix quisquam quaerat. Nimium certe prolixus euaderem, ſi varia capita ab Auctore noua luce perfuſa enumerarem. Perderet ſuas gratias rudi penicillo adumbrata Veneris imago. Praeterea lectorem cupidum et intelligentem ipſo fonte magis, quam riuulis noſtris, delectatum iri praeuidemus. Sunt potius, quae de defuncto Auctore, memoriam eius omni aeuo dignisſimam recolendi gratia, breuibus adiiciam.

Natus eſt Hagae Comitum die V. Ianuarii 1715 patre *Iacobo Kaau*, Iuris vtriusque atque Medicinae Doctore et Practico Hagenſi, ex nobili familia Scotica oriundo, et matre *Margaretha Boerhauia*, quae Magni *Hermanni Boerhauii* et *Iacobi* Eccleſiaſtis Leidenſis, quibus noſter omnia ſe debere profeſſus eſt, ſoror fuit. A prima iuuentute bonis litteris ſedulo innutritus, anno 1733 Academiam Lugduno-Batauam adiit, ibidemque, cum ſtudio Medico ſe dicaſſet, potiſſimum quidem ex auunculi ore pependit, ſed non minus quoque viris tota Europa celeberrimis *Bernardo Sigefrido Albino*, *Hermanno Oeſterdyk Schachtio*, *Adriano van Royen* et *Hieronymo Dauide Gaubio* praeceptoribus vſus eſt. In optimo ſtudiorum curſu accidit, vt anno 1736 nocte quadam, dormiens, quo caſu neſcius, auditu priuaretur. Surgit nihil tale ſuſpicatus, aduocat famulum, exiraſcitur, quod illum ad iuſſa ſua reſpondentem non audiret; obſeruat autem famulum labia mouentem, pulſat denique tabulam, et, cum neque tunc ſonum perciperet, ſurditatis ſuae conuincitur. Haec praegrauis ipſi iactura fuit: nam poſthac nunquam auditum

tum recepit. Id quoque multum iucunditatis iucundiſſimae alias cum ipſo conuerſationis ademit. Oportebat enim cogitata ſua vel in tabula ſcribere, vel per ſigna in digitis facta prodere, vel interprete loquelae digitum gnari vti. Ille, vt feliciſſimo erat ingenio, mira facilitate loquelam digitum addidicerat; ad labiorum quoque motum multa, quae quis loquebatur, intelligebat. Cum ab eo tempore praeceptorum viua inſtitutione frui ipſi non liceret, eo plus lectioni optimorum in quauis doctrina librorum incubuit, natura, vt fieri ſolet, auditus defectum prompta recordatione rerum lectione perceptarum reſarciente. Surdos oratores raro bonos euadere palam eſt; plerumque vel nimis alta, vel nimis remiſſa, voce loquuntur, quia, vbi extollitur vox, vbi deprimitur, audire nequeunt. At noſtro, qui artem, Quinctiliano *corporis eloquentia* dictam, iam ante didicerat, feliciter res ſucceſſit. Teſtatur id declamatio Academica, quam die IV. Septembris 1737 *de Gaudiis Alchemiſtarum* habuit. In ea ſi nitorem ſtili, ſi eruditam, ſi iucundam, argumenti tractationem ſpectes, nihil deſideraueris. Actionem autem oratoriam in ſurdo omnes mirati ſunt. Tam egregio eruditionis ſpecimine, multo maiora in poſterum promittente, promeruit, vt Ampliſſimi Curatores Academiae Lugduno-Batauae illum *Numo aureo*, decem et quod excurrit drachmarum pondere donarent, in cuius altera parte Pallas repraeſentatur inſignia Statuum Hollandiae et Occidentalis Friſiae vrbisque Leydenſis arbori adpenſa reſpiciens, in altera Epigraphe: ABRAHAMO KAAU IUVENI ORNATISS. DECLAMATIONE ACADEMICA GAUDIA ALCHEMISTARUM RECENSENTI HUNC NUMM. CURAT. ACAD.

ET

ET VRB. LUGD. CONSS. D. D. cIↄIↄccxxxvII. Quae ipſe Auctor de hoc ſermone, cum eodem anno typis exſcriberetur, in praefatione obſeruauit, magis ea, quae dixi, illuſtrant. „ Hoc in votis erat, inquit, vt „ iudicarent auditores, an carenti facultate hauriendi prae- „ cepta à ſapientibus auri accommodatae inſtillanda, „ vox ſupereſſet aliis animi ſenſa inſinuando idonea. „ Hoc obtento laetus abiiſſem. Sed beneuolentia, „ nec opinanti, plauſus dedit. Imo auditam benigne „ orationem velle ſe et perlegére teſtati ſunt viri, quorum „ iuſſa ſequi debeo. „ Altero poſt anno, qui erat 1738, ſummos in Medicina honores conſecutus eſt, publicato ſpecimine inaugurali de *Scirrho*, quod ſi aegrorum ſalutis ratio eſt, optimis eius ſcriptis annumerari meretur. Nam hoc ſe talem futurum probauit, qualis poſtmodum reuera exſtitit; Medicum nempe theoria non minus, quam praxi, excellentem, experientiam cum ratione prudenter coniungentem, artem quoque Chirurgicam non indignam, quae a Medico addiſcatur, reputantem. Nemo credat, ſpecimen hoc publice ex cathedra ventilatum eſſe. Surditas auctoris, quo minus id fieri potuerit, obſtitit. Praeterea mos eſt in Belgio, vt etiam ſine tam praegnante ratione, colloquia priuata diſputationum publicarum vices obtineant. Et quid hic opus erat multis? cum Promotoribus abunde conſtaret, honores non in indignum collatum iri. Notatu dignum, quod eodem die, qui ventilationi ſpeciminis deſtinatus erat, die ſcilicet XXIII. Septembris, *Magnus Boerhauius* ex hac vita emigraret. Hic adhuc ſalvus, iuſſerat, vt, quia maſcula prole carebat, ipſius ex ſorore nepos *Hermannus Kaau*, qui tunc Hagae Comitum Medicinam exercebat, *Boerhaavii* nomen aſſumeret. Itaque

noſter fratrem ſuum, dum hoc ſpecimen inaugurale ipſi inſcriberet, *Hermannum Kaau Boerhaave* adpellauit. Hoc argumentum opponendum obtrectatoribus, qui dubitarunt, vtrum re vera auunculus nepotem in communionem nominis adoptauerit. Nam vixit adhuc venerandus ſenex, cum ſpecimen iſtud inaugurale typis exſcriberetur. Num auſus fuiſſet noſter fratri ſuo *Boerhaavii* nomen, auunculo ſuperſtite, tribuere, niſi hic ante obitum ſuum ita iuſſiſſet? *Hermannus* poſt modum anno 1740 Petropolin noſtram euocatus, atque aulae Imperatoriae Medicus conſtitutus eſt. Anno 1743 dignitatem Conſiliarii ſtatus, 1748 die VI. Decembris Conſiliarii intimi et Archiatrorum Comitis munus obtinuit, in quo, omnibus amicus, nemini inuiſus, famam Medici conſummatiſſimi, quem ſors raro deſereret, poſt ſe relinquens, die VII Octobris 1753 Moſcuae deceſſit. Hic cum pariter prole maſcula careret, conſentiente filia Magni Boerhauii, quae *Thomſono Comiti* nupſit, anno 1744 *Boerhauianum* nomem in fratrem *Abrahamum* tranſtulit, qui interea temporis, anno nempe 1738, librum de *Perſpiratione* emiſerat, quo ius ſuum, *Boerhaviani* nominis celebritate vtendi, demonſtraſſe videri poterat. Multo ſane ſtudio conſcriptus eſt liber, et multiplici eruditione refertus, quae nec Poetas veteris Latii, perpetuas noſtri delicias, excludit. Proprie et potiſſimum Perſpirationem corporis humani, tam externam, quam internam, anatomice illuſtrat. Acceſſit declamatio *de Gaudiis Alchemiſtarum* ſub calcem recuſa. Intuitu huius libri Academia noſtra auctorem, tunc quidem Hagae Comitum praxin medicam exercentem, anno 1744 die 2. Nouembr. ſociis ſuis exteris annumerauit. Hoc obtento

ſuffragio, *Boerhaavii*, nomen ſuo noſter adiecit, et quidem prima vice cum 1745 Lugduni Batauorum librum ederet, de eo quod *Impetum faciens dictum Hippocrati*, quod *per corpus conſentiens Philologice et Phyſiologice illuſtratum*, *obſeruationibus etiam et experimentis paſſim firmatum* eſſe, titulus libri declarat. Principium vitae explicare ardua omnino et ſubtiliſſima res eſt, ad quam auctor, vt in praefatione monet, non niſi crebro hortatu Amicorum ſe accinxit; ita autem in hoc negotio ſe geſſit, vt aliis vix quidquam addendum reliquiſſe videatur. Philologicam, quam dicit, argumenti illuſtrationem omnes fere paginae exhibent. Quid non de Phyſiologica cenſendum, quae caput rei eſt, et in quam omnia contulit, quae ratio et experientia boni dictitant, quae perpeti ſtudio ex tot auctoribus collecta propria ſibi facere, et, quod aiunt, in ſuccum et ſanguinem conuertere didicerat? Subſequente anno 1746 fratre ita ſuadente venit Petropolin, acceptis conditionibus pro obeunda Profeſſione Anatomica in Noſocomio marino Petropolitano ſibi oblatis. Non autem hic locus erat, vbi haereret diu. Prima occaſione in Academia noſtra orta, cum poſt obitum Viri Celeberrimi *Ioſiae Weitbrechti* Profeſſio Anatomiae et Phyſiologiae vacaret, arctius nobis ſe iunxit, et anno 1747 die VII. Nouembris in locum *Weitbrechti* ſuffectus eſt. Quae ab hoc tempore egit in ſcientiis ipſi demandatis magis excolendis, patent tam ex noſtris *Commentariis*, quam ex duobus tractatibus *de monſtris*, annis 1754 et 1757 ſingillatim editis. Habuit quoque di VI. Septembris 1750 in Conuentu Academiae ſolemni ſermonem *de iis*, *quae Virum*

Medicum perficiunt et exornant, qui etiam tunc typis expreſſus, et Lugduni Batavorum recuſus eſt. Plura neque dedit Academiae, neque conſcripta poſt obitum reliquit. Nam inchoata memorare, quae luci publicae exponi nequeunt, quid iuuat? Nec mirum. Nam poſtremis hiſce annis multum valde temporis exercitio artis medicae impendere coactus fuit, quod non potuit non ſtudiis ipſius Academicis impedimento eſſe. Et quamuis ſub initium labentis anni ab omni aegrotorum cura, paucis exceptis, ſe abdicaſſet; precibus tamen illorum, qui omnem fiduciam in eum collocabant, victus, priſtinam aſſiduitatem continuauit. Mortuus eſt die XIV. Iulii huius anni 1758 acutiſſima febre correptus, quae nullis remediis obtemperans, vegetum, quod a natura habuit, corpus intra XI dierum ſpatium deſtruxit. Sic periit vltimus *Boerhaaviani* nominis haeres, nulla, cum coelibem vitam duxerit, poſteritate relicta. *Hermanni* autem fratris natu maioris filia ſupereſt, *Caroli Friderici Kruſe*, Medicinae Doctoris et Legionum Praetorianarum Medici ſollertiſſimi, noſtrae itidem Academiae ſocii, lectiſſima coniux. Ab hoc iam expectabunt Eruditi, quae noſter in praefata diſſertatione ſub calcem promiſerat, ſe *ſcripta Boerhauiana poſthuma*, otium nactus, editurum eſſe. Non dubitandum multa in ſcriptis illis latere, quae ad latius promouendos cognitionis humanae limites faciunt, multa inprimis chemica, practica multa, poſteris inſigniter profutura. Tacemus litterarum commercium, quod *Magno* olim *Boerhauio* cum ſummis totius Europae Viris intercesſit. Unum inſtar omnium fuit, quod cum *Iacobo Kaau*, affine ſuo, per plus quam XXX annos geſſit. Hic medicus medico, affinis

affini, amicus amico, de rebus ad ſcientias et curam morborum facientibus non minus erudite, quam candide, perſcribit. Alter alteri intima cordis penetralia pandit, conſilia petit, dat, nihil praetermittit, quo amicum optimum, affinem coniunctiſſimum, iuuare poſſit. Series litterarum eſt, quacum vix vlla inter adhuc editas comparari poſſit. Tacemus quoque conſultationes medicas, vndequaque ad *Magnum Boerhauium* miſſas. Paucae illae, quae vna cum ipſius conſiliis prodierunt, quid non ſperare iubent de reliquis, in theſauro hoc inaeſtimabili adhuc dum latentibus? Tacemus reliqua. Optamus autem maximopere, vt tandem eruditus orbis horum, quae dixi, ſcriptorum reddatur compos, quo vtilitati non minus publicae, quam gloriae nominis *Boerhauiani*, inſigniter prouiſum iri, nemo dubitabit.

II.

Mus aquaticus exoticus Cluſ. Auctar. Raii Synopſ. Quadrup. Ruſſ. Выхухоль. Auctore Io. Geo. Gmelin. p. 383.

Quod adhuc cum ſcriptis *Stelleri* poſtumis factum, id nunc quoque cum *Gmelinianis* facere Academia inſtituit. Digniora etenim per partes his Commentariis inſerere viſum eſt, illa potiſſimum, quae ad *Hiſtoriam animalium* pertinent, cui Auctor non minorem, quam plantarum deſcriptioni, operam impendit. Sunt autem, quae hic damus, in itinere Sibirico, maxima quidem accuratione, at ſine multo librorum adparatu, conſcripta. Vltimam limam non experta ſunt. Hoc namque operae illi tempori reſeruauerat

Gme-

Gmelinus, quo omnes obſeruationes ſuas ad *Hiſtoriam Naturalem* ſpectantes, cum nouiſſimis ſcriptoribus collatas, et iuſto ordine diſpoſitas, ſingillatim edere per partes poſſet, eadem ratione, vt *Floram Sibiricam* edere incepit. Quemadmodum autem nec hanc vltra tertium Tomum, pauco ante obitum tempore, produxit: ita nihil eſt, quod de reliquis eius operibus, niſi ita, vt iam agere incipimus, ſperemus. Putamus quoque, lectorem in his, quas nunc publicae luci damus, obſeruationibus non multa deſideraturum eſſe, ſi collationem cum recentioribus Hiſtoriae naturalis Scriptoribus excipias, quam facile quiſque ſuo marte ſupplebit.

Mus Aquaticus, de quo hic agitur, Ruſſiae indigena eſt, Volgae et Iaico fluuiis familiaris. In Sibiria nuſquam habitat. Opportune itaque *Gmelinus*, in itinere Sibirico Caſani aliquam moram faciens, occaſione ſibi oblata, animal, vt ab hominibus piſcaturae intentis ex fluuio extractum erat, videndi, vſus eſt, dum illius non externam tantum formam deſcripſit, ſed et partes eius genitales, ortum odoris Moſchici, quo animal pollet, inueſtigandi gratia, cultro anatomico ſubiecit. Quid in hoc negotio praeſtiterit, praeconio noſtro non indiget. Alias obſeruationes adiicere animus eſt, quae deſcriptioni *Gmelinianae* inſtar ſupplementi inſeruiant.

Recte Auctores Hiſtoriae Naturalis nouiſſimi, *Linnaeus* et *Kleinius*, viri celeberrimi, et noſtrae Academiae Socii digniſſimi, *Muris aquatici exotici* nomen, quo *Cluſius* et *Raius* vſi ſunt, repudiauerunt. Scilicet hoc illis tem-

poribus ortum debet, cum adhuc Ruſſia extra cultioris Europae limites ſita crederetur. Verum quidem, in Canada, Americae ſeptentrionalis regione, idem animal, aut aliud ſimile noſtro, reperiri. Aſt non id exoticum eſt, quod in Europa et in aliis mundi partibus ſimul, ſed quod in his ſolis, naſcitur. Cum muri noſtro proprium ſit, moſchum olere, nihil videtur conuenientius, quam quod citati viri doctiſſimi *Moſchati*, vel *Moſchiferi*, epitheton adiungunt. Ita namque mox ex nomine cognoſcitur, de quo animali ſermo ſit; quod et Galli, Angli et Germani vulgari ſermone loquentes obſeruant. Recte etiam *Linnaeus* murem moſchatum inter *Caſtores* retulit. Caſtoris enim veram ſpeciem eſſe, tam ex cauda et pedibus palmatis, quam ex moribus concluditur. *Wychuchol* vox Ruſſica, quid ſibi velit ignoro. Neque murem, neque caſtorem, neque odorem exprimit; forte ſonum, quem edit animal; forte ex Tatarorum, aut Calmuccorum, lingua Ruſſicae illata eſt.

Gmelinus ex deſcriptione celeberrimi *Reaumuri* perſpiciens, animal Americanum a noſtro in quibusdam corporis partibus, tam externis, quam internis, differre, diuerſitates has ſedulo notauit. Mihi quoque, quod ad mores animalis ſpectat, varia a *Sarrazino* tradita non congruere viſa ſunt. Ne autem in hac re improuide verſarer, ſcripſi Orenburgum ad Virum Nobiliſſimum, bonis litteris exornandis natum, *Petrum Ritſchkow*, AUGUSTAE Conſiliarium et regundae prouinciae praefectum, ipſique maioris confirmationis gratia cogitationes meas, aliquot quaeſtionibus comprehenſas, expoſui, ad quas cum Vir humaniſſimus

maniſſimus omnino ex mente mea reſponderit, non dubito, quae ad viteriorem hiſtoriam animalis faciunt, ad Volgam quidem et Iaicum fluuios cuiuis, ſed non aeque alibi, comperta, ſubiicere.

Mus moſchiferus fluuios quidem minores et lacus, qui cum fluuiis cohaerent, intrat: nunquam autem reperitur in paludibus, aut ſtagnis, a fluuiorum commercio remotis. Excipienda ſtagna, quae tempore verno aquas ex fluuiis extra ripas diffluentes recipiunt, quas ſubſidentibus vndis reddere nequeunt. In haec quandoque mures moſchiferi, curſum aquarum ſequentes, transferuntur. Quod dum fit, et dum ſtagna multum aquae per euaporationem aeſtiuam, in calidis iſtis regionibus valde grandem, amittunt, id quod in ſtagnis aquae reſtat, odorem moſchi a muribus contrahere dicitur. Nunquam procul a ripa exſpatiantur. Greſſu incedunt lento. Latebras, vt Caſtores, in riparum praeruptis ſibi excauant, quarum oſtium infra horizontem depreſſiſſimarum aquarum eſt, et ea interior conditio, vt, dum aquae increscunt, per gradus, quaſi per tabulata, loca ab exundatione libera petere poſſint. In his pariunt, in his pullos educant. Exeunt, quando libet, omni anni tempore, per oſtium, quod deſcripſi, ſub aqua latens. Nullum enim aliud iſtae cauernae habent, et ſuperne nulla illarum indicia adparent. Veſcuntur plurimam partem piſcibus, raro radicibus herbarum. Calamum aromaticum potiorem illorum cibum eſſe dubitatur. Sunt enim loca, vbi mures moſchiferi copioſe degunt, vbi tamen calami aromatici nec vola, nec veſtigium, obſeruatur. Tantum ab-

abeſt, vt, quod *Sarrazinus* autumauit, odor moſchicus ex hoc victu oriatur. Falſum quoque, illos ſub terra, talparum more, cuniculos agere. Neque opus eſt cuniculis, cum non ex radicibus viuant, ſed ex piſcibus, quorum capturae vnice dediti ſunt, eique omni anni tempore indulgent. Hoc exinde patet, quia vna cum piſcibus ſemper fere in retia piſcatorum et in alia inſtrumenta piſcaturae inſeruientia incidunt; ſicut viciſſim ipſi a piſcibus maioribus deglutiuntur, vt in Siluris et Luciis, ad Silurorum magnitudinem quandoque excreſcentibus, ſaepius obſeruatum eſt. Cum in ſicco raro reperiantur, modus alius capiendi illos, praeter piſcaturam, non eſt. Praeter pellem et caudam nihil, quod in vſum cedat. Caro neque a Tataris, neque a Calmuccis, omnis generis fercula indiſtincte caeterum appetentibus, comeditur. Imo Lucius, poſtquam murem moſchiferum deglutiit, abiicitur, ob difficilem odorem, ipſi ab hac eſca communicatum. Fragrantiſſimus odor in cauda reſidet, quam ideo piſcatorum non nulli ſolam reſecant, et pellem ob laborem, illam detrahendi, minus curant. Vtraque, et pellis et cauda, blattas odore ſuo fugare dicitur. Hinc eſt, quod cum veſtimentis communiter reponuntur in ciſtis, et a pellionibus aliorum animalium pellibus adpenduntur. Sunt, qui fruſtula pellis fimbriis veſtium intexunt, vt ab aeris peſtilentia et a febribus tuti maneant. Orenburgi pelles duabus copecis et caudarum centum 15 aut 20 copecis venduntur.

Hactenus notitiae a *Ritſchkovio* V. Ampliſſ. ſuppeditatae, ex quibus abunde patet, notabilem eſſe morum diuerſitatem inter

inter animal Americanum et noſtrum, niſi quis ſuspicari velit, quaedam falſa *Sarrazino* impacta fuiſſe ab aliis, aut minus recte ab ipſo intellecta, quae forſitan nec in ipſa Canada fidem merentur.

Amatores rerum naturalium procul dubio deſiderabunt iconem animalis. Quoniam illa ſub auſpiciis *Gmelini* ad mortui exemplum accurate adumbrari non potuit, curabit Academia, vt in poſterum in loco natali ad viuum delineetur. An icon a *Sarrazino* et *Reaumuro* exhibita animal, vti vere eſt, ſiſtat, alii iudicent, qui figuram cum deſcriptione conferre voluerint.

III.

Rupicapra cornibus arietinis. Ruſſ. степной баранъ. Calmuc. Argali. Auctore *Io. Geo. Gmelin* p. 383.

Mandata Imperatoria multoties in Sibiriam miſſa et annis 1732. et 1733. renouata, de animalibus rarioribus, quae in Ruſſia non habitant, viuis capiendis, et Petropolin tranſportandis, hanc *Gmelino* occaſionem ſubminiſtrarunt, vt animal, cuius nullum adhuc in auctoribus Hiſtoriam naturalem illuſtrantibus veſtigium exſtat, *Rupicapram* nempe *cornibus arietinis*, viuum videre, deſcribere, diſſecare, et delineationem eius curare, ipſi licuerit. Arx eſt *Uſt-Kamenogorskaia* ad *Irtiſch* fluuium eo in loco, vbi hic fluuius ex montium iugo,

Tatarorum, Calmuccorum et Mongolenſium lingua *Altai* dicto, egreditur, ſita. Quo cum *Gmelinus* aeſtate 1734 proficiſceretur, accidit, vt tria huius generis animalia in foueas, pro capiendis ceruis, ibi locorum *Maral* dictis, effoſſas, paucis ante aduentum eius diebus, inciderint. *Cerui* ſaepiuſcule Petropolin inde viui miſſi, non quod ab aliis ceruis ſpecie differunt, ſed quia in viuario Imperatorio, quod mirifice exornant, commode aluntur. Nam nomen *Maral*, quod Calmuccicum eſt, nihil aliud, quam Ceruum communem, denotat. Neque etiam cerui, ad Ieniſeam fluuium *Sin*, et ad lacum Baical *Iſubr* dicti, alius ſpeciei ſunt, etiamſi *Strablenbergius* (*) Iſubr pro *Dama* habeat, quod quam falſum ſit, exinde patet, quia nemo eſt, qui dicere poſſit, ſe per totum Imperium Ruſſicum, viuariis exceptis, vsquam Damas vidiſſe. Ex Rupicapris in arcem *Uſt-Kamenogorenſem* allatis vna, aduentante *Gmelino*, cum morte luctabatur. Hanc facili negotio ad diſſecandam obtinuit. Reliquas duas ad viuum deſcripſit et delineati iuſſit. Vtrum Petropolin perlatae ſint dubito. Ferociſſimum namque animal eſt, omnem obedientiam refugiens, et, ſi ciſtae vehiculo imponendae includitur, vehementiſſima agitatione et inedia mortem ſibi contrahit. Habitat non modo ad Irtiſch fluuium, ſed per vniuerſam Sibiriam, qua montibus obſita eſt. Frequenter in confiniis Sinicis verſatur, imo ad littora vsque Oceani Orientalis excurrit. Inacceſſas plerumque rupes inhabitare amat, a montium iugis in camporum planities deſcendit, mox amata ſibi loca

(*) p. 371.

loca repetit. Ruſſica igitur lingua rectius *Kamennoi*, quam *Stepnoi Baran* dicendum eſſet, quod etiam in locis, vbi perpetuis ſolum rupibus ſcatet, nullique campi montes inter iacent, ad Olecmam, inquam, ad Aldanum, Maiam, Iudomam, Ochotam et Udum fluuios, ita vſu venire audiui, cum poſterius nomen non niſi ad Irtiſch, Obum et Ieniſeiam fluuios obtineat. *Argali*, vel, ſi mauis, *Archali*, Mongolorum ac Calmuccorum vocabulum eſt, a Tungufis etiam, qui territorium vrbis *Nertſchinsk* incolunt, aſſumptum. Si dicas *Strahlenbergium* (*) Argali ceruis annumerare, hoc nihil eſt; per *hircum ferum* (einen wilden Bock) interpretatur, et in aliis quoque animalibus genus caprinum cum ceruino negligenter confundit. Confuſio autem nusquam hoc loco facilior, quia re vera animal tam a ceruo, quam a capra multum participat, vt ex deſcriptione patet. Non praetermittendum puto, quod et *Meſſerſchmidius* Vir Cl. qui ab anno 1719 ad annum vſque 1727, eodem, quo *Gmelinus*, ſtudio, maximam Sibiriae partem perluſtrauit, in ſchedis ſuis eiusdem huius animalis ſub die XI. Iulii 1724 mentionem facit. Ex Hodegetico eius video, illum tunc in vico *Galkina* ad *Ingodam* fluuium ſub ſtitiſſe. Ibi ergo animal vidit, delineauit, et exuuias, tam maris, quam foeminae, parauit, quas Petropolin ad Cancellariam Medicam miſit. Quid de exuuiis factum ſit ignoro. Delineationes ſuperſunt, quibus cum *Gmelinianis* noſtris, quod ad habitum corporis attinet, ſic ſatis conuenit, magnitudinem tantum animalis iuſto maiorem, et ceruo adulto fere aequalem raepreſentare videntur

(*) l. c.

dentur. Extat quoque in Xenio Iſidis Sibiricae, a *Meſſerſchmidio* poſt reditum ſuum ex Sibiria Academiae oblato, aliqualis Rupicaprae deſcriptio, quam hic adiungere non incongruum putamus. „*Archali* Mas, ſic ille, *Chol-*
„*za* Mongolis in Dauria, Indis cis Gangem *Dſhaen-*
„*gaeli Bheda*, *Acriodorcas*, *Pygargus rupeſtris*, viſu exi-
„mie pollens, cornibus arietinis mole ſtupendis, habitu
„ſtatura et pelle cerui, clunibus et cauda capri, albidis,
„biſulca, ruminans. An *Pygargus* Plinii, Aldrouandi et
„Ionſtoni? An Ebraeorum *Dyſchon* Deut. XIV. 5? „
Ita *Meſſerſchmidius*, qui vocem *Archali* alio loco et *Argali* ſcribit, pronunciationis in Sibiria vulgatae memor, qua plerumque aſperiores Mongolenſium et Tatarorum ſoni mitius efferuntur. Ex nomine Indico concludendum, animal etiam in India reperiri. Amauit *Meſſerſchmidius* nomina rerum exotica conquirere, eaque, quantum potuit, vbique ſuis locis adſcripſit. Hunc in finem conciliauerat ſibi ſacrificulum Indicum, tunc temporis inter Tunguſos Nertſchienſes degentem, vt, quoad in regionibus trans-baicalenſibus verſaretur, ſecum iret, rerumque omnium nomina Indica et Tangutica ſibi diceret. Ab hoc quoque ſacrificulo Tangutice et Brahmanice ſcribere edoctus eſt, vnde nomina iſta ipſiſmet earum gentium litteris in Xenio eius ſcripta reperimus. Nomen *Acriodorcae* ob cornua arietina *Meſſerſchmidio* placuiſſe videtur, vt *Pygargi* ob caudae cluniumque colorem, quem tamen *Gmelinus* non albidum, ſed luteſcentem, deſcribit. Tam verum eſt, colorem pilorum, vt qui multum in feris variat, et pro diuerſis anni temporibus ſaepius mutatur, niſi variatio totum ani-

mal

mal et conſtanter ; vt in Lepore et Lagopode , occupet , pro nota characteriſtica habendum non eſſe. De excellentia viſus nihil apud *Gmelinum* , quia forſitan venatores hac de re interrogare oblitus eſt. Supplenda itaque haec qualitas ex *Meſſerſchmidio*. Caeterum multa egregia *Gmelino* obſeruata , de quibus ex conſulto tacemus, ne duplicem lectori operam cauſſemur. Speciminis gratia ſit obſeruatio de aeſtu ſanguinis in moribundo animali thermometro explorato , et altera de ſtupenda cornuum mole , qua , reſpectu ad corpus habito , vix maiorem dari confitendum eſt. Vt ille ſummam animalis agilitatem pernicitatemque curſus , ita haec vires , quibus omnino maximis pollet , comprobare videntur. Gradus in Thermometro Delisliano 80 efficiunt in Fahrenheitiano 118 , in Reaumuriano 37 $\frac{1}{2}$. Aſt dubitare licet , vtrum hic tantus calor ſanguinis non potius ſtatui animalis morboſo adſcribi debeat. Res clarior euadet , ſi plures hanc in rem obſeruationes cum animalibus aut tarditate , aut velocitate , eximiis inſtituentur. De cornibus recte monet *Gmelinus* , dari in adultis animalibus maiora , quam quae icon repraeſentat ; addo et magis incuruata. Aſſeruantur hic Petropoli in Muſeo Imperatorio , quae pondus 30 librarum aequant , imo ſuperant.

Caeterum reperitur inter obſeruationes Gmelini manu ſcriptas additamentum aliquod ad deſcriptionem Rupicaprae , quod , cum deſcriptio typis excuderetur, curam noſtram effugit , ideoque illud hoc loco addere placet. Ita ille :

Plinius Hiſt. Nat. Lib. VIII. Cap. XLIX. haec habet: Eſt et in Hiſpania, ſed maxime Corſica, non maxime abſimile pecori, genus Muſmonum, (Muſmonium, aut Muſimonum) caprino villo, quam pecoris velleri, propius. Infirmiſſimum pecori caput etc. *Idem* Libro XXVIII. Cap. IX. ſub finem: Inuenio apud Auctores Graecos animal ceruo minus, et pilo demum ſimile, quod Ophion vocatur. Sardiniam id tantum ferre ſolitam. *Idem* Libr. XXX. Cap. XV. ſub finem: In eadem prouincia (Sardinia) eſt Ophion ceruis tantum pilo ſimilis, nec alibi naſcens. *Geſnerus* autem monſtrat, Muſimon animal cum Ophio idem eſſe, effigiemque Muſimonis a *Theod-Beza* ſecum communicatam exhibet, quae cum Rupicapra cornibus arietinis, a me deſcripta, ſi totam animalis habitum, aut cornuum faciem externam ſpectes, tantum conuenit, vt dubitare non liceat, quin idem ſit animal. Hic quidem Geſnerianae effigiei defectus eſt, vt cornuum ſitum male exprimat, quae magis ad latera, quam in ſuperiori capitis parte, ex rei natura, collocari debuiſſent. Verum tota effigies ita comparata eſt, vt ad naturam haud factam eſſe ſuſpicari liceat. Adde *Geſneri* tempore opus effigies vel animalium, vel plantarum, e deſcriptionibus adornandi, impune exerceri potuiſſe. Alium vero me adhuc caſum ſubolere mihi videor. Effigiei Gesnerianae et magnitudine et habitu cum animalium figuris ex aurichalco fuſis, quae in tumulis ſepulchralibus Saianenſis regionis ad Ieniſeam fluuium reperta ſunt, eximie conuenit. De his vero animalibus dubium non eſt, quin Rupicapram cornibus arietinis exprimant. An non igitur effigies Geſneriana ad ſimile aliquod idolum, ab antiquitate

tate reliquum, delineata eſſe potuit? Adeoque, dummodo haec effigies Muſimonem veterum, aut, quod idem eſt, Ophion Plinii exprimat, certiſſimum eſt, Rupicapram cornibus arietinis eſſe Muſimonem veterum. Expimere autem Muſimonem vero eſt admodum ſimile, quando quidem *Plinius* patriam Muſimonis Sardiniam eſſe indicat. *Geſnerus* enim a Sardo quodam, viro non illiterato, ſibi affirmatum fuiſſe ſcribit, Sardiniam alere animal quoddam, quod *Muſlonem* vulgo vocent, quod nuſquam alibi in Europa reperiatur, pelle et pilis ceruo ſimile, cornibus Arieti, non longis, ſed retro circa aures reflexis, magnitudine mediocris cerui, herbis tantum viuens, in montibus aſperioribus degens, curſu velociſſimo. Quid diſtinctius dici poteſt, ſi quis animalis deſcriptionem inter familiares diſcurſus facit? Adeo verum eſt, quod *Geſnerus* et *Raius*, e cuius Synopſi Quadrupedum iſta Gesneriana hauſi, nobili in creatorem rerum amore contra *Plinium*, qui L. XXVIII. C. IX. Ophion interiiſſe arbitratur, propugnarunt, naturam rerum genera et ſpecies omnes animalium ſedulo ſemper conſeruare. *Tragelaphus Bellonii* multum a Muſimone differt, non perparum, vti *Geſnerus* ex effigie tantum ſua doctus ſentit, quod deſcriptiones *Bellonii* et meam conferenti patebit Cum Muſimon in montoſis Schilcae fluuii, in primis in iugo montium, *Stanowoi Chrebet* dicto, et in montoſis ſuperioris Ononis fl. regionis, etiam verſetur, quibus in locis tam a Ruſſis, quam a Mongolis et Tunguſis Argali nomine ſalutatur, Cl. *Meſſerſchmidio* illius videndi copia facta eſt, deditque Vir Cl. tres eius effigies, ſatis rudes, quarum vna maſculum a latere, altera eundem

dem ab anteriori parte ſpectatum, tertia foemellam exhibet. Nomen effigiebus adſcripſit: Argali Dauuriae Acriodorcas, Pygargus Ionſt. rupeſtris. Ein Weiß-Arß. Ex *Ionſtoni* quidem deſcriptione Pygargi, cuius illa ſit animalis, vel oculatiſſimnm quemque eruere non poſſe, confido. Verba *Ionſtoni* haec ſunt: Placet et Pygargi *Aldrouandi* verbis agere. Pygargon, (verba eius ſunt) *Plinius*, in praecitatis verbis etc. p. 304. vſque ad finem frequenter *ſyluoſa* et deſerta *frequentans* loca. Ipſe igitur *Ionſtonus*, plagiator alias peſſimus, et alienorum corraſor, Pygargon Aldrouandi vocat, alium vero, quod ſciam, non deſcribit. Vt vt haec ſint, quoniam *Ionſtonus* pleraque *Aldrouandi* verba omittit, ſola indicatione paginae contentus, e deſcriptione eius id vnicum perſpicitur, de animali, loca ſiluoſa et deſerta frequentante, ſermonem eſſe. Atqui Muſimon Vett. aut Argali *Meſſerſchmidii* et Mongolorum, ſiluoſis locis non delectatur. Solo igitur nomine Vir Cl. ſeductus fuiſſe videtur, quod clunibus albis Muſimonis, quas forte autumni tempore conſpexerat, apprime conuenire ſibi perſuadebat. Non debuiſſet vero Virum Cl. latere, non Muſimonem tantum, ſed et Ceruum, Animal moſchiferum, Capream Plinii, Capream campeſtrem gutturoſam, Ibicem imberbem et alia huius generis animalia hiſce in regionibus pilos appropinquante autumno mutare, hacque mutatione album clunibus colorem induci non niſi aeſtatis tempore euaneſcentem. Haec *Gmelinus*.

IV.

Deſcriptio Animalis Moſchiferi, Ruſſice Kabarga dicti. Auctore *Io. Geo. Gmelin* p. 393.

Quae de Animali moſchifero auctoribus hiſtoriam naturalem tractantibus innotuerunt, ſola fere peregrinantium fide niti in confeſſo eſt. Aſt horum nemo data opera in id incubuit, vt accuratam et pleniorem de hoc animali notitiam adquireret, cum eruditis communicandam. Pro vulgo ſcripſiſſe videntur, quosuis incertos rumores in tabulas referentes, indocti plerumque, et ad ea parum attenti, quae potiſſimum reſpicere debuiſſent. Hinc tanta opinionum diuerſitas, tam falſa multa prodita, tam manca, tam incerta omnia, vt Oedipo opus ſit, veritatem diuinare, eamque, niſi ocularis inſpectio animalis accedat, ab errorum ſordibus repurgatam in lucem producere. Quid ineptius, quam quod alii animal moſchiferum magnitudine ceruum, alii leporem, aut catum aemulari fabulati ſunt? Hi poſtremi cum Cato zibethico illud confudiſſe videntur. Alii cornua illi affinxerunt, quae, vt vt falſiſſima opinio, et a multis aliis reprobata, tam altas egit radices, vt *Kleinius* Vir Cel. ſententias diuerſas conciliare cupiens, (Quadrup. p. 18.) *Moſchorum alios cornutos*, *alios excornes* eſſe ſtatuerit. Alii dentes exſertos, qui in ſuperiori maxilla ſunt, quaſi in hoc illi cum apro conueniret, in inferiorem collocarunt. Alii lupinam faciem animali tribuerunt, alii roſtrum porcinum. Pellem alii candidam, alii nigram deſcripſerunt.

Aliis biſulcum animal eſt, aliis quadriſulcum. Alii maximam velocitatem animali adſcribunt, alii valde tardum eſſe perhibent, et tam ſtolidum, vt ipſum ſe venatoribus confodiendum praebeat. Et quae non de ſitu *folliculi moſchici* diuerſae ſententiae? quem alii ad vmbilicum, alii teſticulorum loco, imo ad genua alii poſuerunt. Non memini, vllum peregrinantium de ſe ſcripſiſſe, quod ipſe animal moſchiferum ſuis oculis viderit, multo minus, quod prope contemplatus ſit, quod diſſecauerit. Animal viuum nunquam in Europam allatum, pelles autem quandoque, ad quas deſcriptiones et figurae animalis efformatae, aut correctae, ſunt a cautioribus. Aſt quantum non perdit animal, ſi figura eius ad pellem exſiccatam, ad exuuias infarctas, exprimitur? Deſcriptio nihil continere poteſt, niſi quod ex pelle cognoſcitur. Vtiliſſimam igitur operam nauaſſe meritiſſimus *Gmelinus* cenſendus eſt, quod, cum natale ſolum huius animalis attingeret, mox curauit, vt quaedam animalia occiſa, tam mares, quam foeminae, ſibi ad deſcribendum et diſſecandum exhiberentur. Deſcriptionem ita adornauit, ac ſi animal prorſus nouum, pro quo et haberi poterat, ſibi obtigiſſet. Praeterea exuuias et ſceleton parauit, quae in Muſeo Imperatorio adhuc conſpiciuntur. Laudandus *Tavernerius*, qui folliculum Moſchicum propius ad penem, quam ad vmbilicum, extare retulit. Sed ex aliorum relatione loquutus eſt. Inde forſitan factum, quod recentiores hiſtoriae animalium ſcriptores teſtimonium eius neglexerunt. *Meſſerſchmidius* V. Cl. *Gmelini* in perluſtranda Sibiria anteceſſor, potuiſſet ſane dicere, quid rei ſit, ſi marem moſchicum videre et examinare ipſi licuiſſet.

At

At foeminam tantum vidit, cuius exuuias Petropolin miſit, vt ex ipſius ſchedis colligitur. Hinc communi errore abreptus, et nihil aduerſi ſuſpicans, folliculum cum vulgo pro vmbilicali habuit, et duobus locis *vmbilicalem* nominauit. Nemini, niſi *Gmelino*, fortuna fauit, verum ſitum folliculi perſpiciendi et in apricum producendi. Quid hic praeſtiterit accuratiſſimus Auctor, quam ſedulo partes genitales maris aeque ac foeminae inueſtigauerit atque deſcripſerit, ipſa eius deſcriptio loquitur. Vnum idemque animal eſſe, quod ſub *Moſchi*, ſeu *Moſchiferi*, nomine in Sinis et in regno Tangut, in terris Mongolenſibus et in Sibiria reperitur, nemo dubitet. Differt tantum noſtrum a Sinico craſſioribus pilis et Moſchi odore minus fragrante, ſicut viciſſim Sinicus Moſchus a Tibetico, ſi auctoribus fides, fragrantiore odore ſuperatur. Huius modi varietas a diuerſa qualitate ſoli et climatis provenire poteſt. Attamen nec hoc negandum, Sinas Moſchum ſaepius adulterare, a qua fraude gens Tibetica abſtinet. Non abs re erit, varia nomina addere, quibus animal moſchiferum in Sibiria ſalutatur. *Kabarga* Ruſſicum eſt, ſed a Tataris deſumtum, qui tamen litteram nominis initialem ita efferunt, vt magis T quam K, audire tibi perſuadeas. *Isbrandus* animal *Kabarda* et folliculum *Kabardin* adpellauit, vtrumque falſo. Folliculus *Kair* vocatur Tataris, vnde Ruſſis olim *Kairi Kabargimie* dicti, pro quo nunc *Kabarginnie ſtruia* obtinet, ſicut *Bobrowie ſtruia* Caſtoreum denotant. Sunt gentes ad *Manam* et *Vpſam* fluuios, Ieniſeae vadas miſcentes, *Camaſchincii* et *Taiginzii* dictae. Illis Moſchiferum animal *Südo*, his *Togorgo* audit. Oſtiaccis ad Ieniſcam eſt

h 2 *Böſſ.*

Böſſ. Tunguſis ad Tunguſcam *Tſchanja*, vel *Dſanja*, ad Lenam *Dſeia*, et mas ſeorſim *Möktſchan*, ſeu *Miktſchan*. Iakuti vocant *Daadang*, Mongolenſes, Buraeti et Tunguſi vrbi Nertſchinsk ſubiecti *Küderi* et *Kuderö*, quam vocem *M. Paulus Venetus* (L. II. C. 38) per *Gadderi*, vel, vt in codice Berolinenſi legitur, per *Gudderi* expreſſit. Tunguſicum *Dſeia* imitantes Ruſſi ad Lenam fluuium animal noſtrum *Seiga*, vel *Saiga*, vocant. Eſt autem aliud praeter hoc animal, ſub nomine *Saiga* in citeriori Sibiria ad Irtin, Tobolem et Iaicum fluuios notum, quod cum ad Tanain quoque et ad Boryſthenem habitet, a Coſaccis, mutuato a Tataris Crimenſibus vocabulo, *Subac* dicitur. Hoc obſeruandum, ne fabulae *Stellero* impactae aſſenſum tribuamus, dum Nouor. Comm. Tomo II. p. 293 animal *Subac* capream *monocerotem* eſſe perhibuit, quod valde rident Coſacci, animalis *Subac* probe gnari, at nullius conſcii *monocerotis*. Monſtraui ipſis cornua *Saigae* ex Sibiria allata, et mox omnes eadem animali *Subac* cornua eſſe profeſſi ſunt. Superſedeo de hoc animali plura dicere, quia deſcriptionem eius a *Gmelino*, qui nomen *Ibicis imberbis* illi indidit, confectam in poſterum dabimus. Non fruſtra *Gmelinus* in Praef. Florae Sibir. Tom I. p. XLIII et XLIV. Sibiriam, ob inſignem in prouentibus naturae diuerſitatem, cis et trans Ieniſeam fluuium notabilem, in duas partes diſterminauit. Animal moſchiferum non niſi Sibiriam vlteriorem inhabitat, cis Ieniſeam fluuium nusquam conſpicitur. Si dixero, reperiri quandoque et ad Vdum fluuium, Oceanum orientalem intrantem, intelligitur, in iſto terrarum tractu vbicunque eſſe. Non autem eadem vbique copia eſt, quia non vbique inuenitur pabulum naturae ipſius conueniens.

Veſci-

Veſcitur enim muſco, ſiue lichene, vt Tarandus, et in primis illo delectatur, qui abietibus adnaſcitur, vnde raro exſtat in ſiluis, quae abietibus carent. Dicunt etiam radicibus Lilii purpurei, Ruſſis *Sarana* dictis, aliarumque herbarum paſci, quas dentibus ſuis exſertis e terra effodit. Loca amat, vt valde timidum eſt, a ſocietate hominum remotiora, ſiluas, montium iuga et campos deſertos, hinc inde ſiluis diſtinctos. Habitacula, in quibus per hiemem commoretur, nulla obſeruata. Sub diu requiem capiens dormit in niue, nihil virgultorum ſibi ſubſternens. Autumno coeunt, vere pariunt, vnicum edunt partum. Recens natorum vocem fiſtula imitantur venatores, vt matres alliciant, quas tunc globulis traiicivnt. Alias etiam retibus animalia capiuntur, imo canibus. Incidunt quoque in foueas, pro alcibus capiendis effoſſas. Si viua capiuntur, inedia pereunt. Neque hinnuli victui ab hominibus dato aſſueſcunt. *Gmelinus* ad Lenam fluuium ſubſiſtens omnem lapidem mouit, vt iuniora animalia caperentur, quae manſuefacere ſperauit. Capta ſunt, ſed antequam adportarentur, (procul enim erat) interierunt. De folliculis notandum, illos in iunioribus animalibus vix conſpicuos eſſe. Maturitatem adquirunt, cum animal tertium, aut quartum, aetatis annum attingit, poſtmodum minuuntur iterum, et in aetate confectis prorſus pereunt. Non nulli auctores tempore plenilunii, aut cum animal coitum appetit, folliculum turgeſcere perhibent; dicunt ab aeſtu venereo folliculum rumpi, et effluere liquorem Moſchi ſuaui odore aera replentem; imo animal venere percitum, aut a venatoribus agitatum, liquorem moſchicum ad arbores et rupes

 ex-

exprimere. Haec vel commenta ſunt, vel relationibus dubiis adſcribenda. In Sibiria nemo eſt, qui talia ſe obſeruaſſe dicat. Reſtat, vt quaedam de iconibus animalis moſchiferi, apud auctores, qui de illo egerunt, exſtantibus, moneamus. *Gmelinus* in icone Isbrandiana nimiam ventri prominentiam, et quod ſine pilis repraeſentetur, taxat. E contrario icon *Tauernerii* corpus animalis nimis villoſum, pedes nimis nudos ſiſtit, caudam animali tribuit, qua caret, folliculum etiam iuſto grandiorem repraeſentat. *Renaudotius* in annotationibus ad antiqua de Indis et Sinis itineraria Arabica p. 217. reprehendit *Tauernerium* et *Theuenotium*, eandem iconem reiterantem, quod animal non cornutum, et dentes exſertos non ſurſum incuruatos, depinxerint. Sed quam hoc fruſtra fecerit, ex deſcriptione *Gmeliniana* et ex ſupradictis adparet. In iconibus à *Neuhofio* et *Kirchero* ſuppeditatis roſtrum porcinum et pedes digitati cenſuram merentur. *Martini Martinii* icon in Atl. Sin. Tab. X enſi totum habitum corporis animalis difformat, dum gibboſum ſiſtit, et capite ad terram ſegniter inclinato, quod capreoli inſtar, habitu corporis agilitate conſpicui, pingi debuiſſet. *Segeri*, vel potius *Breynii*, icon in Eph. N. C. a. 1675 in eo peccat, quod caput ad inſtar lupi famelici praedae inhiantis effingit. Icon *Schroeckii* in hiſtoria Moſchi, cum qua etiam illa *Valentini* in Muſeo Muſ. concordat, collum nimis protenſum et pedes reſpectu corporis iuſto longiores ſiſtit, manifeſto indicio, quod et a *Schroeckio* non negatur, figuram ad exuuias infarctas adumbratam eſſe. Quid hinc oriri poteſt aliud, quam vt etiam deſcriptiones ad tales figuras efformatae peccent, inter quas vnam Cel.

Kleinii

Kleinii Quadrup. p. 18. diligentiſſimi alias naturae obſeruatoris, memorare lubet, collum protenſum, ſicut eſt in icone Schroeckiana, pro naturali animalis qualitate habentis. Taceo icones *Geſneri*, *Calceolarii*, *Boymii*, quorum errores iam ab aliis indicati ſunt. Ad folliculorum icones quod attinet, minus erratum eſt, quia ipſi folliculi in Europam haud difficulter tranſportari potuerunt. Alii tenuiſſimis pilis obſiti, aut ſere depiles, alii pilis craſſioribus et longioribus tecti, cernuntur. Et vtrumque recte. Haec etenim differentia eſt inter folliculos moſchicos, ex Tibeto et Sinis prouenientes, et illos, qui in Sibiria naſcuntur. Hac dignoſci poſſunt, etiam abſque tentaminibus, odorem plus minus fragrantem indicantibus.

V.

Obſeruationes quaedam nidos et oua auium concernentes.
Auctore *Geo. Wilh. Steller.* p. 411.

Si poſt *Ioſephi Proſperis Zinanni* Comitis de ouis et nidis auium commentationem Venetiis 1737. editam haec b. *Stelleri* noſtri tractatio cuiquam videbitur ſuperflua: apologiam quidem plenariam pro ea afferre nunc non poſſumus, quoniam librum Zinannianum ipſis videre nobis nondum licuit. At certo conſcii, *Stellerum*, dum haec ſcriberet, omnino nullam auctoris Itali eiuſque obſeruationum notitiam habuiſſe; vt qui in vno mundi angulo ſcripſit, paulo poſt quam *Zinanni* liber in altero prodiit: confidimus fore, vt aequioris iudicii viri differtationem

tionem hanc non indignam iudicaturi ſint, quae reliquis auctoris ſcriptis in his Commentariis exſtantibus iungatur. Saltem, quae inter vtrumque auctorem ingeniorum paritas, aut diſparitas, fuerit, inde liqueſcet; aut vnius obſeruationes obſeruationibus alterius magis confirmabuntur; et, quod ob locorum diſtantiam rarasque in terris Kamtſchaticis obſeruatas aues, probabile eſt, non nulla reperientur, noſtro auctori propria, et hiſtoriae auium alicui ornamento futura. Primum auctor in eo verſatur, vt ſententiam illorum refellat, qui ex nidis et ouis auium methodum ornithologicam confici poſſe putauerunt, dein obſeruationes generales de nidorum et ouorum diuerſitate affert, et tandem ad ipſam rem pertractandam ſe accingit, qua ſingula oua diuerſarum auium a ſe viſa ſecundum magnitudinem, colores et maculas ipſis inhaerentes deſcribit, et XXIX. oua in IV Tabulis depicta curioſo harum rerum lectori offert. Quod ad tractationem ipſam attinet, monendum ducimus, has obſeruationes in itinere confectas eſſe, ne quis maiora ſibi hic reperturum eſſe, polliceatur, quam re ipſa offendet. Denique obſeruatiunculam de nomine incolarum ad *Kamtſchatka* et *Bolſchaia reka* fluuios habitantium adiiciemus, ab hoc loco non prorſus alienam. Quos namque *Kamtſchedalos* vulgari nomine ſalutamus, hos *Stellerus*, tam in hoc ſcripto, quam in praecedentibus ſuis, *Itaelmenos* vocare aſſolet. Quare hoc? Quia Gens iſta, terris Kamtſchaticis indigena, ipſa ſemet hoc nomine adpellat. Nullum dubium eſt, ſi primi Ruſſi, qui de Kamtſchedalis notitiam perhibuerunt, *Itaelmenorum* vocabulo ad eos deſignandos vſi fuiſſent, illud, tanquam genti iſti proprium, magis quam alienum, promeri-

meriturum fuiſſe, vt ab omnibus vſurparetur. Sed alia quaeſtio eſt, num *Kamtſchedalorum* nomen, omnibus vſu receptum, nulla vrgente neceſſitate, reiiciendum, et ignotum nouum addiſcendum ſit? Pleraeque gentes in Sibiria gentilia alia nomina profitentur, quam Ruſſi ipſis tribuere ſolent. Haec ergo pari modo immutanda eſſent. Aſt quae non inde oriretur confuſio? Mittamus ergo *Itaelmenos*, et, vt melius intelligamur, loquamur, ſi occaſio feret, de *Kamtſchedalis*.

VI.

Obſeruationes Meteorologicae annorum CIƆCCXLIV - - CIƆCCXLVII cum animaduerſionibus et confectariis. Auctore *Ioſ. Ad. Braunio* p. 429.

Solemne eſſe Academiae, obſeruationes meteorologicas inſtituere, inſtitutas inter ſe conferre, collatas confectariis illuſtrare, illuſtratas luci publicae exponere, ex veteribus Commentariis cuiuis abunde liquet. Aſt vltimae obſeruationes, in Tomo XIV Vet. Comm. typis exſcriptae, finiunt exeunte anno 1743, qui vltimus eſt, quo *Krafftius* V. Cl. hoc labore vacauit, et etiamſi poſt huius abitum non defuerint, qui obſeruationes continuarent, nemo tamen curam publicationis in ſe ſuſceperit, antequam *Braunius* V. Cl. qui et ipſe ab a. 1751. aeris et tempeſtatum mutationes ſedulo annotauit, huic labori ſe accingeret. Communicatae cum illo ex tabulario acade-

mico praecedentium annorum obſeruationes in ſpecula Aſtronomica inſtitutae. Harum quatuor priores annos hic exhibet, ſequentes, excepto vno, qui, neſcio quo caſu, deeſt, ſequenti Commentariorum volumini reſeruat.

ASTRONOMICA.

I.

Methodus inueſtigandi Parallaxin Lunae et Planetarum Eclipſibus ſtellarum fixarum a Luna et Planetis innixa. Auctore *A. N. Griſchow.* p. 451.

Ex quo Academia Scientiarum Pariſienſis Virum Cl. *De la Caille*, vt ſiderum ſcientiam per Parallaxes corporum coeleſtium accuratius indagandas perficeret, ad Bonae ſpei promontorium ablegauit, noſtraque Academia *Griſchouium* V. Cl. in Oeſiliam Inſulam, ſub eodem fere meridiano cum Bonae ſpei promontorio iacentem, ire iuſſit, vt obſeruationes iis, quas *De la Caille* fecerit, correſpondentes inſtitueret, non tantum ſpartam ſuam, ob quam miſſus erat, gnauiter *Griſchouius* expleuit, ſed etiam doctrinam ipſam de Parallaxi Lunae obſeruanda

noua

noua methodo, Eclipſibus fixarum a Luna innixa, auctiorem reddere ſtuduit. Res in eo verſatur: Eclipſes fixarum a Luna non niſi ad differentias longitudinum terreſtrium definiendas ab Aſtronomis adhibitae adhuc fuerunt; ſucceſſu quidem optimo: nam certiorem longe hanc viam eſſe, quam qua alii per Eclipſes Satellitum Iouis obſeruandas incedunt, quis neſcit? at non tota vtilitate perpenſa, quae ex his obſeruationibus in Aſtronomiam redundare poteſt. Monſtrat itaque Cl. Auctor, ſicut ſecundum methodum ſimpliciſſimam ad determinandas Parallaxes Planetarum duo obſeruatores in duobus locis ſub eodem fere meridiano ſatis longe diſſitis locati requiruntur: ita eundem finem obtineri poſſe, ſi in locis ſub eodem fere parallelo iacentibus, ſatisque longe ab inuicem diſtantibus, duo obſeruatores, per Eclipſes fixarum a Luna, Parallaxeos lunaris quantitatem ſaepius et in diuerſis orbitae lunaris punctis inueſtigare allaborent. Et hanc quidem methodum Parallaxin Lunae obſeruandi, ob longam locorum intercapedinem ab occidente in orientem in Imperio Ruſſico comprehenſorum, inprimis huic Imperio aptam et conuenientem fore Auctor iudicat, quia, ſi vnus obſeruator in ſpecula Aſtronomica Petropolitana, alter in extrema Peninſulae Kamtſchatkae ora, conſtituatur, differentia meridianorum 125 gradus ſuperatura ſit, ideoque in Ruſſia ſola obſeruationes perfici poſſint. Reſpexiſſe videtur Cl. Auctor ad moleſtias itineris longinqui et valde difficilis Kamtſchatkam verſus ſuſcipiendi, dum ſupellectilem inſtrumentorum ſatis modicam, et quae Geographiae Imperii Ruſſici perficiendae ſimul accommodata ſit, proponit. Optamus tantum, vt obſeruator idoneus reperiatur, qui in

tantum tempus, quantum ad obſeruationes iſtas requiritur, in Kamtſchatka ſedem figere non dubitet. Quod niſi fuerit, obſeruationes etiam ex vna parte Londini, aut in ſpecula Aſtronomica Grenuicenſi, ex altera in vrbe Nertſchinsk, vt pote agricultura et re pecuaria pollente, inſtitui poterunt; quia haec duo loca pariter ſub eodem fere parallelo iacent, et non multo minori ſpatio, quam Kamtſchatka a Petropoli, a ſe inuicem diſtant. Imo ſpes eſt Aſtronomos Pekinenſes ex Ieſuitis, ſub eodem fere meridiano cum vrbe Nertſchinsk collocatos, operam ſuam huic rei, ſi rogabuntur, addicere non detrectaturos eſſe. His difficultatibus, quae non niſi externae et accidentales ſunt, neglectis, methodus a Cl. Auctore tradita ingenioſa valde eſt, et pro Parallaxi aliorum quoque Planetarum obſeruanda vtilis, ſicut ſub calcem diſſertationis oſtenditur.

II.

Obſeruatio inſoliti luminis auſtralis Petropoli habita.

Auctore *A. N. Griſchow*. p. 474.

A lumine boreali radios quandoque vltra verticem horizontis auſtrum verſus porrigi, plures de hoc meteoro obſeruationes loquuntur. Aſt huius a Cl. *Griſchouio* obſeruati luminis auſtralis alia ratio eſt. Hoc in ipſo horizonte per duas veſperas immotum ſtetit, ſine vlla figurae variatione, tandem, nubecula cinctum, radiatio-

diationes, fulgurationibus haud abſimiles, et per totum coelum ſe diffundentes, emiſit, donec coelum vndique nubibus tegeretur, ex iſta, vt adparuit, nubecula prouenientibus. Caeterum nullum iisdem noctibus aurorae borealis veſtigium. Obſeruata autem, cum lumen radios emitteret, ſubitanea venti et temperiei aeris mutatio; quare Cl. Auctor tabulam, trium dierum obſeruationes meteorologicas continentem, adiecit.

III.

Obſeruationes Lipſiae habitae a G. *Heinſio*. p. 477.

Quae ſub hac epigraphe vſque ad calcem huius voluminis occurrunt obſeruationes, titulo tantum tenus indicare ſufficiat. Sunt autem ſequentes:

1) Eclipſes Satellitum Iouis diebus 16 Septembr. 10 Octobris et 24 Decembris anni 1749 ſt. n. obſeruatae.

2) Eclipſis Lunae partialis, quae contigit die 23 Decembr. ſt. n. e. a.

3) Obſeruationes meteorologicae, maximum frigus et calorem maximum, quae a. 1749 Lipſiae fuerunt, indicantes, vbi quoque aurora borealis deſcribitur d. 22. Septbr. e. a. Lipſiae et Romae ſimul viſa.

4) Obſeruatio Eclipſis Solis a. 1750. die 8. Ianuarii ſt. n. habita, quae calculum *Manfredi* in Ephemeridibus 19 fere minutis primis anteuertit.

5) Reſiduum obſeruationum Lipſienſium anni 1750, vbi *a*) Comparatio obſeruationis Eclipſis Lunae totalis a. 1750. d. 19 Iunii ſt. n. Lipſiae habitae, et Commentarior. Nouor. Tomo III. inſertae, cum aliis eiusdem Eclipſis obſeruationibus, Veronae, Caſſellis, Berolini et Goettingae inſtitutis, qua ſimul differentia meridianorum inter loca iſta Lipſiamque eruitur. *b*) Obſeruatio occultationis Fixae in Serpentario a Luna. *c*) Obſeruationes meteorologicae de maximo frigore et calore maximo e. a. Lipſiae et Berolini obſeruatis. *d*.) Aurorarum aliquot borealium deſcriptiones. *e*.) Obſeruatio pro declinatione acus magneticae.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE NVMERIS QVI SVNT AGGREGATA DVORVM QVADRATORVM.

AVCT. L. EVLERO.

§. 1.

Naturam numerorum pluribus modis ſcrutari ſolent Arithmetici, dum eorum originem vel per additionem vel per multiplicationem repraeſentant. Prioris generis ſine dubio ſimpliciſſima eſt compoſitio ex vnitatibus, qua omnes numeri integri per aggregationem vnitatum oriri concipiuntur. Tum numeri quoque ita conſiderari poſſunt, prouti ex additione duorum pluriumue aliorum numerorum integrorum naſcuntur, quo pertinet problema de partitione numerorum, cuius ſolutionem aliquot abhinc annis expoſui, in quo quaeritur, quot variis modis quilibet numerus propoſitus per additionem duorum pluriumue numerorum minorum reſultare poſſit. Hic autem conſtitui eam numerorum compoſitionem perpendere, qua per additionem duorum quadratorum prodeunt; et cum hoc modo non omnes numeri oriantur, quoniam ingens eſt eorum multitudo, qui per additionem duorum quadratorum produci nequeunt, in eorum naturam et proprietates, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, hic inquiram. Quarum proprietatum etiamſi

pleraeque iam ſint cognitae, et quaſi per inductionem erutae, tamen firmis demonſtrationibus maximam partem deſtituuntur: quarum veritati cum haud contemnenda pars Analyſeos Diophanteae innitatur, in hac diſſertatione plurium huiusmodi propoſitionum, quae adhuc ſine demonſtrationibus ſunt admiſſae, demonſtrationes adornabo, ſimul vero etiam eas commemorabo, quas mihi quidem etiamnunc demonſtrare non licuit, etiamſi de earum veritate nullo modo dubitare queamus.

§. 2. Primum igitur cum numeri quadrati ſint: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, etc. iſtos numeros qui ex combinatione binorum quadratorum oriuntur, inſpexiſſe iuuabit, quos propterea vsque ad 200 hic apponam:

0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 121, 122, 125, 128, 130, 136, 137, 144, 145, 146, 148, 149, 153, 157, 160, 162, 164, 169, 170, 173, 178, 180, 181, 185, 193, 194, 169, 197, 200 etc.

Hi nempe omnes ſunt numeri vsque ad 200, qui ex additione duorum quadratorum proueniunt: hosque numeros cum omnibus in infinitum ſequentibus vocabo ſummas duorum quadratorum, quos idcirco in hac formula generali $xx + yy$ comprehendi manifeſtum eſt, dum pro x et y ſucceſſiue omnes numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. ſubſtituuntur. Qui igitur numeri in his non reperiuntur, ii non ſunt ſummae duorum quadratorum, qui ergo

go ſunt vsque ad 200:
3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 75, 76, 77, 78, 79, 83, 84, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 99, 102, 103, 105, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 119, 120, 123, 124, 126, 127, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 147, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 158, 159, 161, 163, 165, 166, 167, 168, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 179, 182, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 195, 198, 199, etc.
Vnde patet ſaltem vsque ad 200 multitudinem numerorum qui non ſunt ſummae duorum quadratorum, maiorem eſſe quam eorum qui ſunt ſummae duorum quadratorum. Ceterum inſpicienti ſtatim patebit neutram iſtorum numerorum ſeriem certa et aſſignabili lege contineri; atque ob hoc ipſum difficilius erit vtriusque indolem inueſtigare.

§. 3. Cum omnis numerus quadratus ſit vel par, hocque caſu per 4 diuiſibilis et in hac forma $4a$ contentus, vel impar, hocque caſu in hac forma $8b+1$ contineatur: omnis numerus ex duobus quadratis compoſitus erit vel 1mo. ſumma duorum quadratorum parium, et ad hanc formam $4a+4b$ pertinebit; eritque ergo per 4 diuiſibilis.

Vel 2do. Summa duorum quadratorum alterius paris alterius imparis, et propterea in huiusmodi forma

 $4a+$

$4a+8b+1$ ſeu in hac $4a+1$ continebitur: vnitate ergo excedet multiplum quaternarii.

Vel 3tio. Summa duorum quadratorum imparium, eritque idcirco huius formae $8a+1+8b+1$ ſeu in hac $8a+2$ continebitur. Erit ſcilicet numerus impariter par et binario excedet multiplum octonarii.

Quia ergo omnes numeri impares vel vnitate excedunt multiplum quaternarii ſeu huius ſunt formae $4n+1$ vel vnitate deficiunt a multiplo quaternarii ſeu huius ſunt formae $4n-1$; patet nullos numeros impares huius poſterioris formae $4n-1$ eſſe ſummas duorum quadratorum, ſeu ex ſerie numerorum qui ſunt ſummae duorum quadratorum, excluduntur omnes numeri in hac forma contenti $4n-1$.

Deinde quia omnes numeri impariter pares vel binario ſuperant multiplum octonarii, vt ſint $8n+2$, vel binario deficiunt a multiplo octonarii vt ſint $8n-2$, patet nullos numeros huius poſterioris formae eſſe ſummas duorum quadratorum, ſicque ex ſerie numerorum qui ſunt ſummae duorum quadratorum excluduntur numeri huius formae $8n-2$.

Interim tamen probe obſeruandum eſt neque omnes numeros in hac forma $4n+1$, neque in hac $8n+2$ contentos eſſe ſummas duorum quadratorum. Illius enim formae excluduntur numeri: 21, 33, 57, 69, 77, 93, 105, 129, etc. huius vero iſti: 42, 66, 114, 138, 154, etc. quorum ratio deinceps inueſtigabitur. §. 4.

§. 4. Interim tamen numeri, qui ſunt ſummae duorum quadratorum ita nexu quodam inter ſe coniunguntur, vt ex vno huius indolis numero infiniti alii eiusdem naturae aſſignari queant. Quod quo facilius perſpiciatur, ſequentia lemmata, quae quidem vulgo ſatis ſunt nota, adiungam.

I. Si numerus p ſit ſumma duorum quadratorum, erunt quoque numeri $4p$, $9p$, $16p$ et generatim nnp ſummae duorum quadratorum.

Cum enim ſit $p = aa + bb$, erit $4p = 4aa + 4bb$; $9p = 9aa + 9bb$: $16p = 16aa + 16bb$ et $nnp = nnaa + nnbb$, quae formulae ſunt pariter ſummae duorum quadratorum.

II. Si numerus p ſit ſumma duorum quadratorum, erit quoque $2p$, et generatim $2nnp$ ſumma duorum quadratorum.

Sit enim $p = aa + bb$ erit $2p = 2aa + 2bb$. Sed eſt $2aa + 2bb = (a+b)^2 + (a-b)^2$, vnde erit $2p = (a+b)^2 + (a-b)^2$, ac propterea ſumma duorum quadratorum. Hinc vero porro erit $2nnp = nn(a+b)^2 + nn(a-b)^2$.

III. Si numerus par $2p$ fuerit ſumma duorum quadratorum, erit etiam eius ſemiſſis p ſumma duorum quadratorum.

Sit enim $2p = aa + bb$, erit numerorum a et b vterque vel par, vel impar: vnde vtroque caſu erit tam $\frac{a+b}{2}$ quam $\frac{a-b}{2}$ numerus integer. Eſt vero $aa + bb =$

$bb = 2(\frac{a+b}{2})^2 + 2(\frac{a-b}{2})^2$, quo valore ſubſtituto fit $p = (\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a-b}{2})^2$.

Hinc ergo omnes numeri pares, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, per continuam biſectionem tandem reuocantur ad numeros impares eiusdem indolis. Quare viciſſim ſi ſoli numeri impares, qui ſunt ſummae duorum quadratorum cognoſcantur, ex iis omnes quoque pares per continuam duplicationem deriuabuntur.

§. 5. Deinde notatu dignum eſt ſequens theorema, quo natura numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum non mediocriter illuſtratur.

THEOR. *Si* p *et* q *ſint duo numeri, quorum vterque eſt ſumma duorum quadratorum, erit etiam eorum productum* pq *ſumma duorum quadratorum.*

DEM. Sit $p = aa + bb$ et $q = cc + dd$ erit $pq = (aa + bb)(cc + dd) = aacc + aadd + bbcc + bbdd$: quae expreſſio hoc modo repraeſentari poteſt vt ſit:

$$pq = aacc + 2abcd + bbdd + aadd - 2abcd + bbcc,$$

ideoque $pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$: vnde productum pq erit ſumma duorum quadratorum. Q. E. D.

Ex hac propoſitione ſequitur, quomodocunque plures numeri, qui ſinguli ſint ſummae duorum quadratorum inuicem multiplicentur, producta ſemper eſſe ſummas duorum quadratorum. Atque ex forma generali tradita patet, productum ex duobus huiusmodi numeris duplici modo

in

in duo quadrata reſolui poſſe: ſi enim ſit $p = aa + bb$, et $q = cc + dd$, erit tam $pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, quam $pq = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, quae formulae erunt diverſae, niſi ſit, vel $a = b$, vel $c = d$. Sic cum ſit $5 = 1 + 4$, et $13 = 4 + 9$, productum $5.13 = 65$ duplici modo erit ſumma duorum quadratorum, ſcilicet erit $65 = (1.3 + 2.2)^2 + (2.3 - 1.2)^2 = 49 + 16$, et $65 = (2.2 - 1.3)^2 + (2.3 + 1.2)^2 = 1 + 64$. Atque ſi productum habeatur ex pluribus numeris, qui ſinguli ſint ſummae duorum quadratorum, id pluribus modis in duo quadrata reſolui poterit. Vti ſi proponatur numerus $1105 = 5.13.17$, eius reſolutiones in duo quadrata erunt hae: $1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2$. Quatuor ſcilicet hic reſolutiones locum habent.

§. 6. Quanquam autem ita euictum eſt, ſi factores p et q ſint ſummae duorum quadratorum, etiam fore productum pq ſummam duorum quadratorum; tamen huius propoſitionis conuerſa hinc non ſequitur, vt, ſi productum ſit duorum quadratorum ſumma, etiam eius factores ſint numeri eiusdem naturae, neque enim hanc concluſionem regulae Logicae, neque ipſa rei natura probarent. Nam numerus $45 = 36 + 9$ eſt ſumma duorum quadratorum, interim tamen horum factorum eius 3.15 neuter eſt ſumma duorum quadratorum. Magis autem firma videatur haec concluſio: ſi productum pq, et alteruter eius factor p fuerint duorum quadratorum ſummae, alterum quoque factorem q fore ſummam duorum quadratorum. Tametſi autem haec concluſio forte ſit vera, regulis tamen ratiocinandi non confirmatur, neque enim

cum demonſtratum ſit, ſi producti pq, bini factores p et q, ſint duorum quadratorum ſummae, ipſum pq fore ſummam duorum quadratorum, hinc legitima conſequentia inferri poteſt; ſi et productum pq, et alter factor p, ſint ſummae duorum quadratorum, etiam alterum factorem q fore ſummam duorum quadratorum. Huiusmodi enim conſequentiam non eſſe legitimam, vel hoc exemplum euidenter euincet: certum eſt ſi bini factores p et q ſint numeri pares, etiam productum pq fore numerum parem, ſi quis autem hinc concludere velit, ſi productum pq et alter factor p ſint numeri pares, etiam alterum factorem q fore parem, is vehementer falleretur.

§. 7. Quare ſi verum ſit, vt, cum productum pq et alter eius factor p fuerint ſummae duorum quadratorum, alter quoque factor q ſit ſumma duorum quadratorum; haec propoſitio non ex ante demonſtrata poteſt inferri, ſed peculiari demonſtratione muniri debet. Haec autem demonſtratio non tam plana eſt, quam praecedens, et non niſi per plures ambages concinnari poteſt, ac demonſtratio quidem, quam inueni, ita comparata videtur, vt non mediocrem vim ratiocinii requirat. Hanc ob rem propoſitiones, ex quibus tandem non ſolum haec veritas conficitur, ſed etiam aliae inſignes proprietates huiusmodi numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, cognoſcuntur, cum ſuis demonſtrationibus hic ordine proponam, operamque dabo, vt nihil quicquam in rigore demonſtrandi deſiderari queat. Iis autem, quae hactenus de his numeris praemiſi, vti ſunt triuia et in vulgus nota, ita inſtar lemmatum in ſequentibus demonſtrationibus vtar.

PRO-

PROPOSITIO I.

§. 8. *Si productum* p q *ſit ſumma duorum quadratorum, et alter factor* p *ſit numerus primus, paritérque duorum quadratorum ſumma, erit quoque alter factor* q *ſumma duorum quadratorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit $pq = aa + bb$, et $p = cc + dd$; quia p eſt numerus primus, erunt c et d numeri inter ſe primi. Erit itaque $q = \frac{aa+bb}{cc+dd}$, et propterea, ob q numerum integrum, numerator $aa+bb$ per denominatorem $cc+dd$ erit diuiſibilis. Hinc quoque per $cc+dd$ diuiſibilis erit numerus $cc(aa+bb) = aacc+bbcc$; at cum etiam hic numerus $aa(cc+dd) = aacc+aadd$ per $cc+dd$ ſit diuiſibilis, horum numerorum differentia $aacc+bbcc-aacc-aadd$ ſeu $bbcc-aadd$ per $cc+dd$ diuiſibilis ſit neceſſe eſt. Cum autem ſit $cc+dd$ numerus primus, et $bbcc-aadd$ factores habeat $bc+ad$ et $bc-ad$, alteruter horum factorum, nempe $bc\pm ad$ per $cc+dd$ erit diuiſibilis. Sit itaque $bc\pm ad = mcc+mdd$: quicunque autem numeri ſint a et b, ii ita exprimi poſſunt, vt ſit $b = mc+x$, et $a = \pm md + y$, exiſtentibus x et y numeris integris ſiue affirmatiuis ſiue negatiuis. His vero valoribus pro b et a ſubſtitutis aequatio $bc\pm ad = mcc+mdd$ induet hanc formam: $mcc+cx+mdd\pm dy = mcc+mdd$ ſeu $cx\pm dy = 0$. Hinc erit $\frac{x}{y} = \mp\frac{d}{c}$, et quia d et c ſunt numeri primi inter ſe, neceſſe eſt, vt ſit $x = nd$ et $y = \mp nc$, vnde habebitur $a = \pm md \mp nc$ et $b =$

 $mc +$

$mc+nd$, huiusmodi ſcilicet valores habere debebunt numeri a et b, vt numerus $pq=aa+bb$ ſit diuiſibilis per numerum primum $p=cc+dd$. Verum iſtis valoribus pro a et b ſubſtitutis fiet:
$pq=mmdd-2mncd+nncc+mmcc+2mncd+nndd$, ſeu $pq=(mm+nn)(cc+dd)$. Iam ob $p=cc+dd$ erit $q=mm+nn$; ideoque ſi productum pq fuerit ſumma duorum quadratorum $aa+bb$, et alter factor p ſit numerus primus pariterque duorum quadratorum ſumma $cc+dd$, neceſſario ſequitur etiam alterum factorem q fore ſummam duorum quadratorum. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 9. Si ergo ſumma duorum quadratorum diuiſibilis ſit per numerum primum, qui ipſe ſit ſumma duorum quadratorum, etiam quotus ex diuiſione reſultans erit ſumma duorum quadratorum. Ita ſi ſumma duorum quadratorum fuerit diuiſibilis per quempiam ex his numeris primis 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97 etc. quotus ſemper erit ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 2.

§. 10. Si ergo litterae α, β, γ, δ, etc. denotent huiusmodi numeros primos, qui ſunt ſummae duorum quadratorum; hinc patet, ſi productum αq ſit ſumma duorum quadratorum, fore etiam factorem q ſummam duorum quadratorum.

COROLL.

COROLL. 3.

§. 11. Hinc autem porro facile colligitur, ſi productum $\alpha \beta q$ fuerit ſumma duorum quadratorum, fore etiam factorem q ſummam duorum quadratorum. Cum enim ſit $\alpha \beta q$ ſumma duorum quadratorum, per *coroll. praec.* erit quoque βq ſumma duorum quadratorum; et ob eandem rationem erit quoque q ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 4.

§. 12. Simili modo euidens eſt, ſi productum $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon q$ fuerit ſumma duorum quadratorum, tum quoque factorem q eſſe ſummam duorum quadratorum; hinc ſi productum pq ſit ſumma duorum quadratorum, eiusque factor p productum ex quotcunque numeris primis, quorum ſinguli ſint ſummae duorum quadratornm, fore etiam alterum factorem q ſummam duorum quadratorum.

SCHOLION.

§. 13. Regulae Logicae non permittunt, vt haec propoſitio ita conuertatur, vt, quoties alter factor q ſit ſumma duorum quadratorum, etiam alter factor p pronunciari poſſit, vel ſumma duorum quadratorum, ſi eſt primus, vel productum ex numeris primis, qui ſinguli ſint ſummae duorum quadratorum. De hoc ipſo enim nondum conſtat, vtrum productum ex aliquot numeris primis, qui ipſi non ſint ſummae duorum quadratorum, nequeat eſſe ſumma duorum quadratorum: quin potius contrario iam habemus caſum, quo produ-

ctum $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ eſt ſumma duorum quadratorum, cum tamen eius factores 3 et 3 non ſint huius indolis. Verum propoſitio *coroll. vlt.* ita conuerti poteſt, vt a negatione conſequentis recte ad negationem antecedentis concludatur, quam conuerſionem vtpote maximi momenti in hac propoſitione complectar.

PROPOSITIO II.

§. 14. *Si productum* p q *ſit ſumma duorum quadratorum, eius factor autem* q *non ſit ſumma duorum quadratorum, tum alter factor* p, *ſi ſit numerus primus, non erit ſumma duorum quadratorum, ſin autem non ſit primus, ſaltem factorem certe habebit primum, qui non ſit ſumma duorum quadratorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum alter factor p ſit, vel numerus primus, vel compoſitus, vtrumque caſum ſeorſim perpendere conuenit. Sit 1mo p numerus primus; cum igitur ſi eſſet ſumma duorum quadratorum; quoque alter factor q foret ſumma duorum quadratorum; quod cum hypotheſi aduerſetur, ſequitur, factorem p non eſſe ſummam duorum quadratorum. Sit 2do p numerus compoſitus; et ex praec. liquet, ſi omnes eius factores primi eſſent ſummae duorum quadratorum, etiam alterum factorem q eiusdem fore indolis. Quare cum per hypotheſin q non ſit ſumma duorum quadratorum, ſequitur, non omnes factores ipſius p eſſe ſummas duorum quadratorum. Q. E. D.

COROLL.

COROLL. 1.

§. 15. Si igitur productum $p q$ ſit ſumma duorum quadratorum, eius tamen alter factor q in duo quadrata ſit irreſolubilis; alter factor p, vel ipſe non erit ſumma duorum quadratorum, vel ſaltem factorem habebit primum in duo quadrata irreſolubilem. Vti ſi ſit $p q = 45$ et $q = 3$, erit $p = 15$ et factorem habet 3, qui non eſt ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 2.

§. 16. Hinc autem nondum concludere licet, alterum factorem p plane non eſſe ſummam duorum quadratorum, quamuis enim hoc certum ſit caſu, quo p eſt numerus primus, tamen id nondum conſtat caſu, quo p eſt numerus compoſitus; quia p habere poſſet factorem in duo quadrata irreſolubilem, etiamſi ipſe numerus p eſſet ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 3.

§. 17. Hoc autem colligere licet; ſi p eſſet ſumma duorum quadratorum, tum non ſolum vnum, ſed ad minimum duos habere debere factores primos in duo quadrata irreſolubiles. Sit enim $p = \alpha \beta \gamma \delta$, et δ factor ille in duo quadrata irreſolubilis; perſpicuum eſt, ſi p eſſet ſumma duorum quadratorum, deleto factore δ, inſuper factorem reſiduum $\alpha \beta \gamma$ factorem in duo quadrata irreſolubilem habere debere.

SCHO-

SCHOLION.

§. 18. Cum de diuiſoribus numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, quaeſtio inſtituitur, circa quadratorum ſummam $aa + bb$, caſus hi probe ſunt diſtinguendi, vtrum haec quadrata aa et bb, ſeu eorum radices a et b ſint numeri primi inter ſe nec ne? Si enim a et b non ſint numeri primi inter ſe, ſed habeant communem diuiſorem n, vt ſit $a = nc$ et $b = nd$, ſumma quadratorum erit $nncc + nndd = nn(cc + dd)$, ac propterea diuiſorem habebit n, hoc eſt, numerum quemcunque. Sin autem radices a et b fuerint numeri primi inter ſe, tum ſumma quadratorum $aa + bb$ plures numeros pro diuiſoribus non admittet; euidens enim eſt huiusmodi ſummam duorum quadratorum $aa + bb$ nunquam per 3 eſſe diuiſibilem. Nam quia per hypotheſin vtrumque quadratum ſeorſim non eſt per 3 diuiſibile, cum alioquin non forent prima inter ſe; ſi ſumma $aa + bb$ eſſet per 3 diuiſibilis, neutrum foret per 3 diuiſibile. Vtriusque ergo radices futurae eſſent, vel huius formae $3m + 1$, vel huius $3m - 1$; ſed ſumma huiusmodi duorum quadratorum, per 3 diuiſa, ſemper reſiduum 2 relinquit, ideoque per 3 nunquam eſt diuiſibilis. Eodem modo intelligitur, ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum $aa + bb$ nunquam eſſe per 7, vel 11, vel 19 etc. diuiſibilem. Quinam autem ſint in genere hi numeri, qui nunquam ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum diuiſores exiſtere queant, hoc modo non facile definitur. Demonſtrari igitur conuenit propoſitionem alias quidem ſatis notam, ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum alios diuiſores primos

primos non admittere, niſi qui ipſi ſint ſummae duorum quadratorum. Praemitti autem debet ſequens propoſitio.

PROPOSITIO III.

§. 19. *Si ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum* $aa + bb$ *diuiſibilis ſit per numerum* p, *ſemper exhiberi poterit ſumma duorum aliorum quadratorum* $cc + dd$ *diuiſibilis per eundem numerum* p, *ita vt iſta ſumma* $cc + dd$ *non ſit maior quam* $\frac{1}{2}pp$.

DEMONSTRATIO.

Sit ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum $aa + bb$ diuiſibilis per numerum p, et a et b numeri quantumuis magni. Quia ergo neque a neque b ſeorſim per p diuiſibilis eſt, numeri a et b ita exprimi poterunt, vt ſit $a = mp \pm c$ et $b = np \pm d$, vbi numeros m et n ita determinare licet, vt c et d non excedant ſemiſſem ipſius p. Erit ergo $aa + bb = mmpp \pm 2mcp + cc + nnpp \pm 2ndp + dd$, quae formula cum et tota diuiſibilis ſit per p (per hyp.) et eius pars $mmpp \pm 2mcp + nnpp \pm 2ndp$ per ſe diuiſorem habeat p, neceſſe eſt, vt altera pars $cc + dd$, quae eſt ſumma duorum quadratorum, itidem per p ſit diuiſibilis. At cum radices c et d non excedant ſemiſſem ipſius p, ſumma quadratorum $cc + dd$ non excedet quadratum $\frac{1}{4}pp$ bis ſumtum; ideoque ſumma duorum quadratorum $cc + dd$ exhiberi poteſt non maior quam $\frac{1}{2}pp$, quae tamen ſit per p diuiſibilis. Q. E. D.

 COROLL.

COROLL. 1.

§. 20. Si igitur non detur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum diuiſibilis per numerum p, quae non excedat $\frac{1}{2}pp$, nullae omnino dantur ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum, quae per hunc numerum p eſſent diuiſibiles.

COROLL. 2.

§. 21. Sic cum nulla detur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum infra $\frac{1}{2} \cdot 3^2$ ſeu infra $4\frac{1}{2}$, quae ſit per 3 diuiſibilis, hinc luculenter ſequitur, nullam omnino ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum per 3 eſſe diuiſibilem. Similique modo pro numero 7, cum non detur ſumma duorum quadratorum infra $\frac{1}{2}7^2 = 24\frac{1}{2}$ per 7 diuiſibilis, ſequitur ne in maximis quidem numeris dari ſummas duorum quadratorum inter ſe primorum per 7 diuiſibiles.

PROPOSITIO IV.

§. 22. *Summa duorum quadratorum inter ſe primorum diuidi nequit per vllum numerum, qui ipſe non ſit ſumma duorum quadratorum.*

DEMONSTRATIO.

Ad hoc demonſtrandum ponamus ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum $aa + bb$ diuiſibilem eſſe per numerum p, qui non ſit ſumma duorum quadratorum. Exhiberi ergo poſſet alia ſumma duorum

qua-

quadratorum inter ſe primorum $cc+dd$ non maior quam $\frac{1}{2}pp$, quae eſſet diuiſibilis per p. Sit igitur $cc+dd=pq$, et cum p non ſit ſumma duorum quadratorum, vel ipſe numerus q non erit eiusmodi ſumma, vel ſaltem factorem habebit r, qui non erit ſumma duorum quadratorum. Quia vero $pq<\frac{1}{2}pp$, erit $q<\frac{1}{2}p$ et multo magis $r<\frac{1}{2}p$. Quare cum $cc+dd$ quoque diuiſibilis ſit per $r<\frac{1}{2}p$; per *prop. praec.* ſumma duorum quadratorum $ee+ff$ per eundem numerum r diuiſibilis exhiberi poſſet, quae non excederet $\frac{1}{2}rr$, neque multo magis $\frac{1}{8}pp$. Et cum r non ſit ſumma duorum quadratorum, ſimili modo procedendo continuo ad minores ſummas duorum quadratorum deueniretur, quae per numerum non ſummam duorum quadratorum eſſent diuiſibiles. Quocirca cum in minimis numeris nulla detur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum, quae eſſet diuiſibilis per numerum, qui non ſit ſumma duorum quadratorum, ne in maximis quidem numeris eiusmodi erunt ſummae duorum quadratorum, quae diuiſibiles ſint per numeros, qui ipſi non eſſent ſummae duorum quadratorum. Q. E D.

COROLL. 1.

§. 23. Si ergo ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum non fuerit numerus primus, omnes eius factores primi quoque erunt ſummae duorum quadratorum. Quemadmodum igitur productum ex quotcunque numeris primis, qui ipſi ſunt ſummae duorum quadratorum, pariter eſt ſumma duorum quadratorum, ita nunc huius propoſitionis conuerſa eſt demonſtrata, vt ſum-

ma duorum quadratorum (inter ſe primorum) per multiplicationem oriri nequeat, niſi ex numeris, qui ipſi ſint ſummae duorum quadratorum.

COROLL. 2.

§. 24. Omnes ergo numeri, qui ſunt ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum, vel ipſi in hac ſerie numerorum primorum continentur:
2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, etc.
vel ex duobus pluribusue numeris huius ſeriei per multiplicationem componuntur. Omnes autem hi numeri primi praeter 2 vnitate excedunt multiplum quaternarii ſeu in hac forma $4n+1$ continentur.

COROLL. 3.

§. 25. Si igitur ſumma duorum quadratorum $aa+bb$ diuiſibilis ſit per numerum, qui non fuerit ſumma duorum quadratorum; hinc intelligetur quadrata illa aa et bb non eſſe inter ſe prima, neque adeo eorum radices a et b.

COROLL. 4.

§. 26. Cum autem ſi $a=nc$ et $b=nd$ ſumma duorum quadratorum $aa+bb=nn(cc+dd)$ per quemuis numerum n, qui non eſt ſumma duorum quadratorum, diuidi poſſit, quoniam non ſolum per n, ſed etiam per nn eſt diuiſibilis, euidens eſt, ſi ſumma duorum quadratorum diuiſibilis ſit per quempiam numerum, qui non eſt ſumma duorum quadratorum, tum eam quoque per quadratum huius numeri fore diuiſibilem. Sic cum $45=36+9$ ſit diuiſib. per 3, ſimul quoque diuiſibilis eſt per 9. COROLL.

COROLL. 5.

§. 27. Cum nullus numerorum in hac forma $4n-1$ contentorum ſit ſumma duorum quadratorum, manifeſtum quoque eſt, nullam ſummam quadratorum inter ſe primorum diuidi poſſe per vllum numerum primum, in forma $4n-1$ contentum, qui numeri primi ſunt: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 103, 107 etc.

SCHOLION.

§. 28. Cum omnes numeri primi, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, excepto binario, hanc ſeriem conſtituant:

5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, etc.

qui non ſolum in hac forma $4n+1$ continentur, ſed etiam, quantumuis ea longe continuetur, deprehendemus in ea omnes omnino numeros primos huius formae $4n+1$ occurrere: vnde per inductionem ſatis probabiliter concludere licet, nullum dari numerum primum formae $4n+1$, qui non ſimul ſit ſumma duorum quadratorum. Interim tamen cum inductio quantumuis ampla vicem demonſtrationis ſuſtinere nequeat; hanc veritatem, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ ſimul ſit ſumma duorum quadratorum, etiamſi nemo agnoſcere dubitet, tamen adhuc demonſtratis matheſeos veritatibus annumerare non licet. *Fermatius* quidem profeſſus eſt, ſe eius demonſtrationem inueniſſe; quia autem eam nusquam publicauit, aſſerto quidem huius profundiſſimi Viri merito fidem adhibemus, iſtamque numerorum proprietatem

 credimus

credimus ; haecque cognitio noſtra mera fide ſine ſcientia nititur. Quanquam autem ego multum in demonſtratione eruenda fruſtra laboraui , tamen aliud argumentum pro hac veritate adſtruenda reperi , quod etiamſi non ſummum rigorem ſuſtineat , tamen cum inductione coniunctum demonſtrationi pene rigoroſae aequiualere videtur.

PROPOSITIO V.

§. 28. *Omnis numerus primus , qui vnitate excedit multiplum quaternarii , eſt ſumma duorum quadratorum.*

TENTAMEN DEMONSTRATIONIS.

Numeri primi , de quibus hic ſermo eſt , in hac forma $4n+1$ continentur. Quodſi ergo numerus $4n+1$ fuerit primus , demonſtraui per eum ſemper diuiſibilem eſſe hanc formam $a^{4n}-b^{4n}$, quicunque numeri pro a et b ſubſtituantur , dummodo neuter ſeorſim fuerit per $4n+1$ diuiſibilis. Cum autem ſit $a^{4n}-b^{4n}=(a^{2n}-b^{2n})(a^{2n}+b^{2n})$, neceſſe eſt, vt alteruter factor, nempe vel $a^{2n}-b^{2n}$, vel $a^{2n}+b^{2n}$ ſit diuiſibilis per numerum primum $4n+1$. Prout autem pro a et b alii atque alii numeri aſſumuntur , aliis caſibus formula $a^{2n}-b^{2n}$, aliis vero formula $a^{2n}+b^{2n}$ erit per $4n+1$ diuiſibilis : vnde aſſumere licet , etſi quidem hoc nondum firma demonſtratione euincere valeo , ſemper eiusmodi numeros pro a et b aſſignari poſſe , vt formula $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit per $4n+1$ diuiſibilis : iis ergo caſibus altera formula $a^{2n}+b^{2n}$ neceſſario per $4n+1$ erit diuiſibilis. Sit $a^n=p$ et $b^n=q$, habebitur

biturque ſumma duorum quadratorum $pp + qq$ per $4n + 1$ diuiſibilis, ita vt neutrum quadratum pp vel qq ſeorſim habeat diuiſorem $4n + 1$. Ideoque etiamſi fortaſſe pp et qq communem habeant diuiſorem mm, vt ſit $pp + qq = mm(rr + ss)$, quia factor communis mm diuiſorem non habet $4n + 1$, neceſſe eſt, vt ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum $rr + ss$ habeat diuiſorem $4n + 1$; Conſequenter cum huiusmodi ſumma duorum quadratorum alios non admittat diuiſores, niſi qui ipſi ſint ſummae duorum quadratorum, neceſſe eſt, vt numerus primus $4n + 1$ ſit ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 1.

§. 29. Demonſtratio haec igitur eſſet perfecta, ſi modo demonſtrari poſſet, ſemper eiusmodi exiſtere valores pro a et b ſubſtituendos, quibus formula $a^{2n} - b^{2n}$ non fiat diuiſibilis per numerum primum $4n + 1$; iisdem enim caſibus formula $a^{2n} + b^{2n}$ neceſſario eſt diuiſibilis per $4n + 1$.

COROLL. 2.

§. 30. Quod ſi quis autem hanc rem per calculum tentet, non modo ſemper plures caſus, imo infinitos, formulae $a^{2n} - b^{2n}$ reperiet, quibus ea per numerum primum $4n + 1$ non eſt diuiſibilis, ſed etiam pro b vnitatem ponere licet, ita, vt etiam haec formula ſimplicior $a^{2n} - 1$ ſaepe numero per $4n + 1$ non ſit diuiſibilis.

SCHOLION

SCHOLION.

§. 31. Caſus ſeu valores ipſius a, quibus formula $a^{2n} - 1$ certe ſit diuiſibilis per numerum primum $4n+1$, facile aſſignari poſſunt. Primo enim ſi ſit $a = pp$, formula $a^{2n} - 1 = p^{4n} - 1$ ſemper eſt diuiſibilis per $4n+1$, dummodo p non ſit $= 4n + 1$ vel eius multiplo. Deinde ſi $a = pp \pm (4n + 1)q$, formula $a^{2n} - 1$ quoque diuiſorem habet $4n + 1$, reſoluitur enim $a^{2n} = (pp \pm (4n + 1)q)^{2n}$ in ſeriem terminorum, quorum primus eſt p^{4n}, ſequentes vero omnes ſponte ſunt per $4n + 1$ diuiſibiles. Vnde patet, valores idoneos pro a eſſe omnia reſidua, quae reſtant, ſi numeri quadrati p^2 per $4n + 1$ diuidantur. Haec autem reſidua ſiue pro a ponatur r, ſiue $4n + 1 + r$, ſiue $(4n + 1)q + r$ prodeunt eadem, vnde omnia poſſibilia reſidua obtinentur, ſi pro p ſucceſſiue ſtatuantur numeri 1, 2, 3, 4, 5, ... vsque ad $4n$, at valor $4n$ pro p poſitus idem dat reſiduum, quod valor 1, ſimilique modo valores 2 et $4n - 1$, item 3 et $4n - 2$, item 4 et $4n - 3$ etc. eadem dant reſidua. Vnde cum bina ſemper reſidua, quae ex numeris 1, 2, 3, .. vsque ad $4n$ pro radicibus quadratorum ſumtis proueniunt, ſint aequalia, numerus diuerſorum reſiduorum reſultantium tantum erit $2n$, ideoque totidem dabuntur numeri ipſo $4n + 1$ minores, qui non eſſe poſſunt reſidua ex diuiſione numerorum quadratorum per $4n + 1$ emergentia; hique numeri pro a ſubſtituti ſemper formulam $a^{2n} - 1$ reddent non diuiſibilem per $4n + 1$. Hoc quidem pariter demonſtrari nequit; verumtamen quia periculum faciendo, quotcunque etiam numeri hoc modo explorentur, ne unicus quidem caſus occurret, quo haec regula

gula fallat, eius veritatem agnoſcere oportet. Quo haec clarius perſpiciantur, exempla aliquot ſubiungam, ſit primo $4n + 1 = 5$, et caſus, quibus formula $a^2 - 1$ per 5 erit diuiſibilis, habebuntur, ſi pro a reſidua ex diuiſione quadratorum per 5 oriunda ponantur, quae reſidua ſunt 1, 4. At ſi pro a ponatur vel 2, vel 3, formula $a^2 - 1$ non erit per 5 diuiſibilis; his ergo caſibus formula $a^2 + 1$ diuiſorem habebit 5. Deinde ſi ſit $4n + 1 = 13$, ſeu $n = 3$, reſidua, quae ex diuiſione numerorum quadratorum per 13 reſtant, ſunt 1, 4, 9, 3, 12, 10. vnde ſi quis numerorum reliquorum, 2, 5, 6, 7, 8, 11, pro a ſubſtituatur, non formula $a^6 - 1$, ſed $a^6 + 1$ per 13 erit diuiſibilis. Porro ſi $4n + 1 = 17$, ſeu $n = 4$, quia reſidua quadratorum per 17 diuiſorum ſunt 1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13, ſi pro a ſtatuatur quiſpiam ex reliquis numeris 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, non formula $a^8 - 1$, ſed haec $a^8 + 1$ erit per 17 diuiſibilis. Cum igitur haec lex perpetuo obſeruetur, haec inductio vim demonſtrationis fere induere cenſenda erit; hincque propoſitio tantopere confirmata videtur, vt eius veritatem non amplius in dubium vocare liceat. Interim tamen operae pretium eſſet eo maius, ſi quis rigoroſam huius propoſitionis demonſtrationem exhibere poſſet, quo magis de eius veritate ſimus certi: nullum enim eſt dubium, quin eiusmodi demonſtratio, tamdiu fruſtra quaeſita, ad plurimas alias inſignes numerorum proprietates ſit manuductura. Quamquam autem huius propoſitionis veritas extra dubium eſt poſita, tamen eas conſequentias, quae ipſi innituntur, diligenter notabo, ab aliisque, quae rigidis de-

monſtrationibus muniuntur, diſtinguam: ex hac autem propoſitione nondum demonſtrata ſequuntur haec corollaria, quae hoc nomine notata velim.

COROLL. 3.

§. 32. Si igitur numerus formae $4n+1$ in duo quadrata nullo modo reſolui nequeat, hoc certum erit ſignum, eum numerum non eſſe primum: ſi enim iſte numerus $4n+1$ eſſet primus, certe in duo quadrata reſolui poſſet. Sic cum numeri 21, 33, 57, 69, 77, 93 etc. qui in forma $4n+1$ continentur, non ſint ſummae duorum quadratorum, ex hoc ipſo patet, eos non eſſe primos.

COROLL. 4.

§. 33. In ſerie ergo numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, omnes primo continentur numeri primi huius formae $4n+1$, deinde omnia producta ex duobus pluribusue huiusmodi numeris primis; tam producta ex ſingulis hisce numeris in binarium et quosuis numeros quadratos.

COROLL. 5.

§. 34. Omnes numeri n, ex quibus formula $4n+1$ euadit numerus primus, ſunt ſummae duorum numerorum trigonalium. Cum enim $4n+1$ ſit ſumma duorum quadratorum, erit eius duplum $8n+2$ ſumma duorum quadratorum imparium: ſit ergo $8n+2=(2x+1)^2+(2y+1)^2$, fiet $n=\frac{xx+x}{2}+\frac{yy+y}{2}$. Quare ſi n non ſit ſumma duorum numerorum trigonalium, certe numerus $4n+1$ non erit primus.

PRO-

PROPOSITIO VI.

§. 35. *Si numerus formae* $4n+1$ *vnico modo in duo quadrata inter ſe prima reſolui queat, tum certe eſt numerus primus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim hic numerus eſt ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum, ſi non ſit prima, ſinguli eius factores erunt ſummae duorum quadratorum. Quare ſi hic numerus non eſſet primus, in huiusmodi ſaltem duos factores reſolui poſſet, vt eſſet $4n+1 = (aa+bb)(cc+dd)$, hoc autem caſu duplex reſolutio in duo quadrata locum habet; ſcilicet:

I. $4n+1 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

II. $4n+1 = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2$

Haeque reſolutiones ſemper ſunt diuerſae, niſi ſit vel $ac+bd = ad+bc$ vel $ac+bd = ac-bd$. Priori vero caſu foret $ac+bd-ad-bc = 0$, ſeu $(a-b)(c-d) = 0$, ideoque vel $a=b$ vel $c=d$; atque hinc vel $aa+bb$ vel $cc+dd$ numerus par, quorum neutrum eſſe poteſt diuiſor ipſius $4n+1$ vtpote numeri imparis. Poſteriori vero caſu eſſet vel $b=0$ vel $d=0$, ideoque $4n+1$ vel $= aa(cc+dd)$ vel $= cc(aa+bb)$; vnde haec duo quadrata non forent prima inter ſe contra hypotheſin. Quibus caſibus notatis ſequitur, numerum compoſitum $4n+1$, ſi in duo quadrata inter ſe prima fuerit reſolubilis, eundem ad minimum duobus modis in duo quadrata eſſe reſolubilem. Quo circa ſi tan-

tum vnico modo numerus $4n+1$ ſit ſumma duorum quadratorum, certe non erit compoſitus, ac per conſequens erit primus. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 36. Si igitur propoſito quopiam numero formae $4n+1$ poſt inſtitutum examen comperiatur, eum vnico modo in duo quadrata inter ſe prima reſolui poſſe, inde tuto colligemus, eum numerum eſſe primum; etiamſi eius diuiſibilitatem per numeros primos more conſueto non tentauerimus. Sic cum numerus 73 vnico modo ſit ſumma duorum quadratorum, nempe $64+9$, eum eſſe primum, certo nouimus.

COROLL. 2.

§. 37. Si ergo methodus expedita haberetur, cuius ope facile inquirere liceret, an et quot modis propoſitus numerus in forma $4n+1$ contentus in duo quadrata reſolui poſſit exinde promte iudicare poterimus, vtrum ſit primus; ſi enim vnico modo in duo quadrata ſit reſolubilis, eaque quadrata fuerint prima inter ſe, is certe pro primo erit habendus.

COROLL. 3.

§. 38. Manifeſtum autem eſt, ſi duo quadrata, in quae numerus quiſpiam reſoluitur, non ſint prima inter ſe, eum numerum non eſſe primum. Si enim numerus propoſitus inueniatur eſſe $= nnaa + nnbb$, tum diuiſores habebit n et nn: quod idem eſt intelligendum, ſi

numerus

numerus propoſitus ipſe ſit quadratum, ſeu $= aa + 0$, tum enim diuiſorem habebit a.

SCHOLION.

§. 39. Haec regula numeros primos explorandi tantum ad numeros impares formae $4n + 1$ eſt adſtricta, numeri enim pares quandoque vnico modo in duo quadrata reſolui poſſunt, cum tamen non ſint primi; ita 10 vnico modo eſt ſumma duorum quadratorum, etſi non eſt primus, cuius rei ratio eſt, quod in producto $(aa + bb)(cc + dd)$, cui huiusmodi numeri aequantur, eſt vel $a = b$ vel $c = d$, quo caſu duplex reſolutio, quae generatim innui videtur, ad vnam redit, vti in demonſtratione eſt animaduerſum. Neque vero hac exceptione regula data infringitur, cum numerorum parium per ſe facile ſit iudicium. Numeri autem impares alterius formae $4n - 1$ hinc ſponte excluduntur, quoniam ii plane non in duo quadrata ſunt reſolubilis. De cetero ſi numerus $4n + 1$ vel plane non reſolubilis ſit in duo quadrata, vel pluribus modis haec reſolutio ſuccedat, pro priori caſu iam notauimus, eum numerum certe non eſſe primum, etſi hoc nititur *Prop. praec.* non ſatis rigide demonſtrata. Pro caſu vero poſteriori in ſequenti propoſitione iudicium afferetur.

PROPOSITIO VII.

§. 40. *Qui numerus duobus pluribusue diuerſis modis in duo quadrata reſolui poteſt, ille non eſt primus, ſed ex duobus ad minimum factoribus compoſitus.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus propoſitus N, qui duplici modo in duo quadrata ſit reſolubilis; nempe $N = aa + bb = cc + dd$. Quoniam haec quadrata non ſunt aequalia, alioquin enim numerus N per ſe non eſſet primus, ſit $a > b$ et $c > d$, et quia reſolutiones hae duae ſunt diverſae, neque erit $a = c$ neque $b = d$. Sit igitur $a > c$; erit $b < d$; vnde ponatur $a = c + x$ et $d = b + y$. Quare ob $aa + bb = cc + dd$ fiet: $2cx + xx = 2by + yy$. Sit vtraque forma $= xyz$, quia altera per x, altera per y eſt diuiſibilis; fiet $x = \frac{yz - x}{2}$; $b = \frac{xz - y}{2}$; $a = \frac{yz + x}{2}$; $d = \frac{xz + y}{2}$ hincque erit $N = aa + bb = \frac{xxzz + yy + yyzz + xx}{4}$ ſeu $N = \frac{(yy + xx)(1 + zz)}{4}$. Niſi ergo $xx + yy$ per 4 ſit diuiſibile, erit $xx + yy$ diuiſor ipſius N, ſin autem $xx + yy$ ſit per 4 diuiſibile, vel numerus vtcunque compoſitus, eius certe factor quidam erit diuiſor ipſius N. Cum igitur ſit $x = a - c$ et $y = d - b$, numerus propoſitus $N = aa + bb = cc + dd$ diuiſorem habebit vel ipſum numerum $(a - c)^2 + (d - b)^2$, vel eius ſemiſſem quadrantemue, et quia numeros a, b et c, d, inter ſe vtcunque permutare licet, factores ipſius N quoque erunt $(a - d)^2 + (c - b)^2$, vel etiam quia radices a, b, c, d negatiue aſſumere licet $(a \pm c)^2 + (d \pm b)^2$ vel $(a \pm d)^2 + (c \pm b)^2$, ſeu harum formularum ſemiſſes aliaeue partes aliquotae. Quare cum numeri plus vno modo in duo quadrata reſolubilis factores adeo aſſignari poſſint, ille numerus certe non erit primus, ſed compoſitus. Q. E. D.

COROLL.

COROLL. 1.

§. 41. Cum igitur numerus $N = aa + bb = cc + dd$ ſit compoſitus, erit huiusmodi $N = (pp + qq)(rr + ss)$. Hinc autem viciſſim duplex reſolutio in duo quadrata reſultat, erit nempe:

$$a = pr + qs \qquad c = ps + qr$$
et
$$b = ps - qr \qquad d = pr - qs.$$

Hincque vlterius obtinetur $a - d = 2qs$ et $c - b = 2qr$, vnde fit $\frac{r}{s} = \frac{c-b}{a-d}$. Quare ſi fractio $\frac{c-b}{a-d}$ ad minimos terminos reducatur, vt ſit $\frac{c-b}{a-d} = \frac{r}{s}$, ex hac fractione $\frac{r}{s}$ orietur numeri N diuiſor $= rr + ss$, niſi ſit par, nam ſi fuerit par, eius dimidium ſumi debet.

COROLL. 2.

§. 42. Simili modo cum numeros a, b et c, d inter ſe permutare atque adeo negatiuos ponere liceat, ſi fractionum harum $\frac{a \pm c}{b \pm d}$, vel $\frac{a \pm d}{b \pm c}$ altera ad minimos terminos reducatur, vt fiat $= \frac{r}{s}$, erit $rr + ss$ ſemper diuiſor numeri propoſiti N.

COROLL. 3.

§. 43. Quanquam autem hinc plures duobus diuiſores naſci videntur, tamen diuerſae formulae ita ad eundem diuiſorem deducunt, vt non plures quam duo eliciantur, ſi quidem numerus propoſitus duobus tantum modis in duo quadrata fuerit reſolubilis. Sit, ſi $N = 85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$; formulae $\frac{9 \pm 7}{6 \pm 2}$; $\frac{9 \pm 6}{7 \pm 2}$ has qua-

quatuor tantum fractiones in minimis terminis ſuppeditant nempe : $\frac{2}{1}$; $\frac{4}{1}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{1}$; quarum binae poſteriores pro formula $rr + ss$ duplum valorem tantum exhiberit, eius qui ex primis oritur : vnde patebit, factores eſſe binos $2^2 + 1 = 5$ et $4^2 + 1 = 17$. Breuiſſime ergo hi factores inueniuntur, ſi tantum radices quadratorum pares et impares ſeorſim inuicem combinentur, et combinatio parium cum imparibus penitus omittatur, quia hinc fractiones orirentur, numeratorem et denominatorem impares habentes.

PROBLEMA.

§. 44. *Propoſito numero quocunque formae* $4n + 1$ *explorare vtrum primus ſit nec ne ?*

SOLVTIO.

Per operationem deinceps explicandam inueſtigetur numerus propoſitus, vtrum in duo quadrata reſolui poſſet nec ne ? et, ſi poſſit, an plus vno modo reſolutio ſuccedat ? Si enim reſolutionem in duo quadrata plane non admittat, id per §. 32 certum erit ſignum, numerum propoſitum non eſſe primum, etiamſi haec concluſio ex *Prop. V.* non ſatis demonſtrata ſequatur. Hoc quidem caſu de eius diuiſoribus nihil conſtat; interim tamen certo colligimus, eum diuiſores primos habere formae $4m - 1$, quia ſi omnes eius factores eſſent formae $4m + 1$, is certe in duo quadrata foret reſolubilis. At ſi numerus propoſitus vnico modo ſit in duo quadrata reſolubilis, tum infallibiliter pro primo erit habendus. Sin autem

autem reſolutio plus vno modo ſuccedat, tum non ſolum conſtabit, eum non eſſe primum, ſed etiam eius diuiſores aſſignari poterunt per §. 43. His perpenſis regulam tradam, cuius ope reſolubilitas in duo quadrata non difficulter explorari poterit.

Numerus propoſitus deſinet vel in 1, vel in 3, vel in 7 vel in 9; caſum quo in 5 deſinit hic omitto, quia diuiſor 5 tum eſt manifeſtus, et indicat numerum non eſſe primum. Deinde numeri quadrati incipiendo a maximis ipſo numero propoſito minoribus ſucceſſiue ab eo ſubtrahantur, vt pateat, vtrum vnquam numerus quadratus reſtet, quoties enim hoc euenit, toties reſolutio in duo quadrata ſuccedit.

At cum numeri quadrati in nullum horum numerorum 2, 3, 7, 8, deſinere queant, ſubtractio eorum numerorum quadratorum, qui reſidua dant in hos numeros deſinentia omitti poterit. Hinc tantum opus eſt vt a numero propoſito ea quadrata ſubtrahantur, quae reſidua in 0, 1, 4, 5, 6, 9, deſinentia praebent; nempe

Si numerus propoſitus deſinat in	Quadrata ſubtrahenda deſinent in	Et horum quadratorum radices deſinent in
1	0, 1, 5, 6,	0, 1, 4, 5, 6, 9
3	4, 9	2, 3, 7, 8
7	1, 6	1, 4, 6, 9
9	0, 4, 5, 9	0, 2, 3, 5, 7, 8

Pro quolibet igitur numero propoſito $4n + 1 = N$ tot operationes ſeorſim inſtituantur, quot radicum idoneae ſunt terminationes. Sit igitur pp maximum quadratum

huius indolis, quod a numero propoſito N ſubtrahi debet: ac tum ſucceſſiue ſubtrahantur quadrata $(p-10)^2$, $(p-20)^2$, $(p-30)^2$, $(p-40)^2$, etc. Verum reſidua hinc emergentia expedite per continuam additionem inueniri poterunt; Hoc modo

Numerus propoſitus	N
a quo ſubtrahatur	pp
	$N-pp$
Addatur . . .	$20p-100$
	$N-(p-10)^2$
Addatur . . .	$20p-300$
	$N-(p-20)^2$
Addatur . . .	$20p-500$
	$N-(p-30)^2$

Numeri igitur ſucceſſiue addendi ſunt: $20p-100$, $20p-300$, $20p-500$, $20p-700$, etc. qui decreſcunt in ratione Arithmetica per differ. $=200$. Huiusmodi operatio pro ſingulis numeris p, quorum quadrata numero propoſito proxime ſunt minora, et qui deſinunt in aliquem figurarum ſupra indicatarum, inſtituatur, neque vlterius continuetur, quam donec ad ſemiſſem numeri propoſiti N perueniatur. Si enim numerus N fuerit ſumma duorum quadratorum, alterum certe ſemiſſi pſius minus ſit neceſſe eſt. Quo obſeruato, quot hac operatione prodibunt quadrata, tot modis numerus propoſitus in duo quadrata erit reſolubilis. Hanc autem operationem nnon admodum eſſe moleſtam, omnibusque aliis methodis eumeros primos explorandi longe anteferendam, ſequentia xempla declarabunt.

Exem-

EXEMPLVM I.

§. 45. *Explorare vtrum hic numerus* 82421 *primus ſit nec ne ?*

Operatio per ſex columnas ſequentes inſtituetur.

p 82421	p 82421	p 82421	p 82421	p 82421	p 82421
286. 81796	285. 81225	284. 80656	281. 78961	280. 78400	279. 77841
□ 625	1196	1765	3460	4021	4580
5620	5600	5580	5520	5500	5480
6245	6796	7345	8980	9521	10060
5420	5400	5380	5320	5300	5280
11665	12196	12725	14300	14821	15340
5220	5200	5180	5120	5100	5080
16885	17396	17905	19420	19921	20420
5020	5000	4980	4920	4900	4880
21905	22396	22885	24340	24821	25300
4820	4800	4780	4720	4700	4680
26725	27196	27665	29060	29521	29980
4620	4600	4580	4520	4500	4480
31345	31796	32245	33580	34021	34460
4420	4400	4380	4320	4300	4280
35765	36196	36625	37900	38321	38740
4220	4200	4180	4120	4100	4080
39985	40396	40805	42020	42421	42820

Cum igitur hic vnicum occurrat quadratum 625, ideoque numerus propoſitus 82421 vnico modo ſit in duo quadrata reſolubilis nempe $= 25^2 + 286^2$, is erit primus.

SCHOLION.

§. 46. In hoc computo quatuor columnae, vbi numeri reſidui deſinunt vel in 5 vel in 0, notabiliter contrahi poſſunt, omittendis omnibus iis, qui non deſinunt vel in 25 vel in 00. Quare in columnis, in quibus reſidua deſinunt vel in 5 vel in 0, ſubtrahatur primo

mo proximum quadratum, quod reſiduum praebet vel in 25 vel in 00 deſinens, hocque quadratum dicatur pp, vt reſiduum ſit $= N - pp$: tum quadrata, vnde reſidua ſimili modo deſinentia oriuntur, erunt $(p-50)^2$, $(p-100)^2$, $(p-150)^2$ etc. ideoque haec reſidua obtinebuntur ſi ad $N-pp$ continuo addantur hi numeri $100p-2500$; $100p-17500$; $100p-125000$ qui decreſcunt arithmetice ſecundum differentiam conſtantem 5000; vnde hae columnae mox ad finem perducentur, dum eas non vltra ſemiſſem numeri propoſiti continuari opus eſt. Hoc igitur compendium locum habebit in numeris vel in 1 vel in 9 deſinentibus, qui propterea, etiamſi ſex columnas requirant, dum pro reliquis quatuor ſufficiunt, facilius expedientur.

EXEMPLVM 2.

§. 47. *Explorare vtrum hic numerus* 100981 *primus ſit nec?*

p	100981	p	100981	p	100981	p	100981
316.	99856	315.	99225	309.	95481	310.	96100
	1125		1756		5500		4881
	29100		6200		28400		6100
	30225		7956		33900		10981
	24100		6000		23400		5900
	* 54325		13956		* 57300		16881
p	100981		5800		100981		5700
284	80656		19756	291.	84681		22581
	20326		5600		16300		5500
	25900		25356		26600		28081
$215^2 =$	46225		5400		42900		5300
			30756		21600		33381
			5200		* 64500		5100
			35956				38481
			5000				4900
			40956				43381
			4800				4700
			45756				48081
			4600				
			50356				

Cum

Cum ergo vnicum occurrat quadratum $46225 = 215^2$ vnde fit $100981 = 215^2 + 234^2$, erit hic numerus primus.

EXEMPLVM 3.

§. 48. *Explorare vtrum hic numerus* 1000009 *ſit primus nec ne?*

p	1000009
1000	1000000
$3^2 =$	9
	19900
	19909
	19700
	39609
	19500
	59109
	19300
	78409
	19100
	97509
	18900
	116409
	18700
	135109
	18500
	153609
	13300
	171909
	18100
	190009
	17900
	207909
	17700
	225609
	17500
	243109
	17300
	260409
	17100
	277509
	16900
	294409
	16700
	311109
	16500
	327609
	16300
	343909
	16100
	*

*	
	360009
	15900
	375909
	15700
	391609
	15500
	407109
	15300
	422409
	15100
	437509
	14900
	452409
	14700
	467109
	14500
	481609
	14300
	495909

p	1000009
978..	956484
	43525
	95300
	138825
	90300
	229125
	85300
	314425
	80300
	394725
	75300
	470025

p	1000009
972	944784
$235^2 =$	55225
	94700
	149925
	89700
	239625
	84700
	324325
	79700
	404025
	74700
	478725

p	1000009
997..	994009
	6000
	97200
	103200
	92200
	195400
	87200
	282600
	82200
	364800
	77200
	442000

	1000009
953..	908209
	91800
	92800
	184600
	87800
	272400
	82800
	355200
	77800
	433000

	1000009
995.	990025
	9984
	19800
	29784
	19600
	49384
	19400
	69784
	19200
	88984
	19000
	107984
	18800
	126784
	18600
	145384
	18400
	163784
	18200
	181984
	18000
	199984
	17800
	217784
	17600
	235384
	17400
	252784
	17200
	269984
	17000
	286984
	16800
	303784
	16600
	320384
	16400
	336784
	16200
	352984
	16000
	*

*	
	368984
	15800
	384784
	15600
	400384
	15400
	415784
	15200
	430984
	15000
	445984
	14800
	460784
	14600
	475384
	14400
	489784

Hic ergo numerus 1000009 duplici modo eſt in duo quadrata reſolubilis quippe $= 1000^2 + 3^2 = 235^2 + 972^2$, vnde is non erit primus: factores vero eius reperientur ex hac formula $\frac{1000 \pm 972}{235 \pm 3}$ ad minimos terminos reducta, vnde oritur; $\frac{1000 + 972}{235 + 3} = \frac{1972}{238} \overset{2}{|} \frac{986}{119} \overset{17}{|} \frac{58}{7}$ ergo factor $= 3413$

$\frac{1000 + 972}{235 - 3} = \frac{1972}{232} \overset{4}{|} \frac{493}{58} \overset{29}{|} \frac{17}{2}$ ergo factor $= 293$

qui factores facilius inuenientur ex formula $\frac{1000 - 972}{235 \pm 3}$ $\frac{28}{238} = \frac{14}{119} = \frac{2}{17}$ et $\frac{28}{232} = \frac{7}{58}$.

Nouimus ergo eſſe $1000009 = 293 \cdot 3413$, qui factores nulla alia methodo tam facile reperti fuiſſent.

EXEMPLVM 4.

§. 49. *Explorare vtrum hic numerus* 233033 *primus ſit nec ne?*

233033	233033	233033	233033
$482^2 =$ 232324	$477^2 =$ 227529	$473^2 =$ 223729	$478^2 =$ 228484
709	5504	9304	4549
9540	9440	9360	9460
10249	14944	18664	14009
9340	9240	9160	9260
19589	24184	27824	23269
9140	9040	8960	9060
28729	33224	36784	32329
8940	8840	8760	8860
37669	42064	45544	41189
8740	8640	8560	8660
46409	50704	54104	49849
8540	8440	8360	8460
54949	59144	62464	58309
8340	8240	8160	8260
63289	67384	70624	66569
8140	8040	7960	8060
71429	75424	78584	74629
7940	7840	7760	7860
79369	83264	86144	82489
7740	7640	7560	7660
87109	90904	93904	90149
7540	7440	7360	7460
94649	98344	101264	97609
7340	7240	7160	7260
101989	105584	108424	104869
7140	7040	6960	7060
109129	112624	115384	111929
6940	6840	6760	6860
116069	* 119464	* 122144	* 118789

Quia

Quia ergo hic numerus, etſi eſt formae $4n+1$, non eſt ſumma duorum quadratorum, vi *Prop. V.* colligimus eum non eſſe numerum primum. Factores quidem eius hinc aſſignare non licet, interim tamen concludimus eum ſaltem duos habere factores formae $4m-1$: qui, inueſtigatione inſtituta, reperientur 467. 499.

EXEMPLVM 5.

§. 50. *Explorare vtrum hic numerus 262657 primus ſit nec ne?*

262657	262657	262657	262657
$511^2 =$ 261121	$509^2 =$ 259081	$506^2 =$ 256036	$504^2 =$ 254016
1536	3576	6621	8641
10120	10080	10020	9980
11656	13656	$129^2 =$ 16641	18621
9920	9880	9820	9780
21576	23536	26461	28401
9720	9680	9620	9580
31296	33216	36081	37981
9520	9480	9420	9380
40816	42696	45501	47361
9320	9280	9220	9180
50136	51976	54721	56541
9120	9080	9020	8980
59256	61056	63741	65521
8920	8880	8820	8780
68176	69936	72561	74301
8720	8680	8620	8580
76896	78616	81181	82881
8520	8480	8420	8380
85416	87096	89601	91261
8320	8280	8220	8180
93736	95376	97821	99441
8120	8080	8020	7980
101856	103456	105841	107421
7920	7880	7820	7780
109776	111336	113661	115201
7720	7680	7620	7580
117496	119016	121281	122781
7520	7480	7420	7380
125016	126496	128701	130161
7320	7280	7220	7180
*132336	*133776	*135921	*137341

Cum igitur hic vnicum quadratum occurrat $16641 = 129^2$ ita vt ſit vnico modo $262657 = 129^2 + 496^2$, hique numeri

numeri 129 et 496 ſint inter ſe primi, certum eſt numerum 262657 eſſe primum.

EXEMPLVM 6.

§. 51. *Explorare vtrum hic numerus* 32129 *ſit primus nec ne?*

32129	32129	32129	32129
$152^2 = 23104$	$177^2 = 31329$	$175^2 = 30625$	$170^2 = 28900$
$95^2 = 9025$	800.	1504	3229
12700	15200	3400	3300
* 21725	16000	4904	6529
		3200	3100

32129	32129	8104	9629
$148^2 = 21904$	$173^2 = 29929$	3000	2900
10225	2200	11104	12529
12300	14800	2800	2700
* 22525	* 17000	13904	15229
		2600	2500
		* 16504	* 17729

Hic igitur numerus quoque vnico modo eſt in duo quadrata reſolubilis $= 95^2 + 152^2$, ſed quia hi numeri 95 et 152 non ſunt primi inter ſe, ſed communem diuiſorem habent 19, numerus propoſitus non erit primus, ſed factorem habet $19^2 = 361$, eſtque $32129 = 19^2 . 89$.

SCHOLION.

§. 52. Quanquam haec methodus explorandi numeros vtrum ſint primi nec ne? tantum ad numeros in hac forma $4n + 1$ contentos extenditur, tamen ſaepe numero in diiudicandis numeris magnum ſubſidium afferre poteſt. Quantum autem aliis regulis hoc idem praeſtandi antecellat, quilibet, qui periculum huius rei facere velit, facile experietur. Qui enim numerum millione non minorem via conſueta examinare voluerit, eius diviſionem per omnes numeros primos ad millenarium vsque tentare debet, quod opus intra plures horas non abſoluet: dum ope huius regulae ipſi vix ſemihora opus erit.

DE CON-

DE CONSTRVCTIONE APTISSIMA MOLARVM ALATARVM

AVCT. L. EVLERO.

Nemo eſt qui ignoret, alas molarum alatarum venti directioni oblique exponi ſolere, vt hoc modo vis lateralis excipiatur qua alae in gyrum agantur, id quod non eueniret, ſi ventus normaliter in alas incideret. Hac de re iam prideme quaeſtio inter Geometras eſt agitata, ſub quonam angulo alae venti impulſionem recipere debeant, vt vi maxima circumagantur, ſicque maximum effectum praeſtare valeant. Plerique quidem hunc angulum conſtituerunt 54°, 45′, qui etiamnunc fere vbique in praxi obſeruari ſolet; verum notandum eſt ex hoc angulo tum ſolum maximum oriri effectum, quando alae adhuc ſunt in quiete, ac demum ad motum ſunt impellendae. Cum vero machina iam in motu verſatur quoniam ob motum alarum tam vis quam directio venti immutatur, angulus ille hanc praerogatiuam prorſus amittit, atque experientia iam docuit, maiorem effectum obtineri, ſi angulus ille maior quam 54°, 45′ ſtatuatur. Pendet ergo determinatio huius anguli quoque a motu alarum, qui quo fuerit velocior non difficulter colligere licet, eo maiorem quoque ſumi debere angulum, quem directio venti cum planitie alarum conſtituat. Verum etiam in ipſa alarum celeritate maximi quaedam proprietas locum habet; ſatis enim perſpicuum eſt, ſiue mola nimis celeriter circumagatur, ſiue nimis tarde, vtro-

que caſu effectum produci debiliorem: ex quo intelligitur, dari certum quendam celeritatis gradum, qua ſi alae circumagantur, maximus inde effectus proficiſcatur. Aeſtimatur autem quantitas effectus ex momento actionis vis impellentis, quod momentum definitur producto ex vi impellente in celeritatem qua machinam mouet; hincque etiam gradus ille celeritatis maxime idoneus viciſſim ab obliquitate qua ventus in alas incidit, pendet; vnde duplex naſcitur quaeſtio, qua tam obliquitas alarum ratione directionis venti, quam celeritas motus, quo alae in gyrum aguntur, determinanda proponitur, vt effectus maximus inde obtineatur, ſeu vt momentum actionis vis impellentis maximum valorem nanciſcatur. Quae diſquiſitio quo latius pateat, eam ita inſtituam, vt alarum ſuperficiem non planam, ſed vtcunque incuruatam ſim conſideraturus; qua feliciter ad finem perducta concludere tandem licebit, quomodo ſuperficies alarum vbique ad venti directionem comparata eſſe et quanta celeritate alae gyrari debeant, vt maximum a machinae actione effectum expectare queamus. Vtcunque autem alarum ſuperficies ſit incuruata, minima eius elementa pro planis haberi poſſunt, ex quo inueſtigationem hanc a ſuperficiebus planis inchoabo.

PROBLEMA I.

1. *Si ventus data celeritate in ſuperficiem planam quieſcentem ſub quocunque angulo impingat, definire vim, qua haec ſuperficies a vento ſollicitabitur.*

SOLVTIO.

Sit aa area ſuperficiei planae, quae vim venti excipit, et Φ angulus, quem venti directio cum hoc plano facit: tum vero ſit k altitudo debita celeritate venti. Iam ſi ventus perpendiculariter impingeret, foret eius vis aequalis ponderi columnae aereae, cuius baſis ſit $= aa$ et altitudo $= k$; ſeu haec vis eſſet aequalis ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= aak$. Verum propter obliquitatem impulſus haec vis diminui debet in ratione ſinus totius ad ſinum anguli Φ: poſito ergo ſinu toto $= 1$, vis venti in ſuperficiem propoſitam aa celeritate altitudini k debita, et ſub angulo $= \Phi$ incidentis aequabitur ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= aak$ ſin. Φ^2, huiusque vis directio perpetuo ad planum propoſitum eſt normalis. Q. E. I.

SCHOLION.

2. Etſi ſolutio huius problematis ſatis ſuperque eſt nota, tamen ab eo initium ducere eſt viſum, vt menſuras abſolutas, quibus in ſequentibus vtar diſtinctius explicare liceat. Primum igitur grauitate ſpecifica aeris cognita haec vis ad cognitam ponderum menſuram reducitur; tametſi vero denſitas aeris valde eſt variabilis, ea plerumque octingenties minor aeſtimatur, quam denſitas aquae; vnde ſi formula aak ſin. Φ^2 per 800 diuiditur, reperitur volumen aquae, cuius ponderi vis inuenta aequatur; quod ſi in pedibus cubicis exprimitur, facile ad libras reducitur tribuendo 70 ℔ ſingulis pedibus cubicis aquae. Quod deinde ad celeritatem venti attinet, ea per ſpa-

tium definiri ſolet, quod ventus ſingulis minutis ſecundis percurrit, quae menſura, quo facilius ad illam altitudinem k reuocari poſſit, omnes longitudines per datam menſuram metiri conuenit; pro qua aſſumam pedem Rhenanum. Si igitur venti celeritas ſit $= e$ pedum vno minuto ſecundo, quoniam graue hoc tempore delabitur per ſpatium 15, 625 pedum et celeritate acquiſita ſpatium duplum 31, 25 ped: conficere valet, erit $\sqrt{15,625} : \sqrt{k} = 31,25 : e$ vnde reperitur $e = 2\sqrt{15,625\,k} = 250\sqrt{\frac{k}{1000}} = 25\sqrt{\frac{1}{10}k}$ et $k = \frac{ee}{62\frac{1}{2}} = \frac{2ee}{125}$ ſicque celeritates vtroque modo expreſſae facile inter ſe conferri poſſunt.

PROBLEMA II.

Tab. I. 3. *Si ventus celeritate data ſecundum datam directionem in elementum ſuperficiei cuiuscunque quieſcentis impingat, inuenire vim, qua hoc elementum ſollicitabit.*

SOLVTIO.

Fig. 1. Referatur elementum ſuperficiei propoſitum ad planum quoddam fixum, quod plano tabulae repraeſentetur, ſitque elementum in ſublimi vtcunque poſitum in Z, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum ZY. Iam cum elementum hoc pro plano haberi poſſit, ſit eius area infinite parua $= dS$; continuetur hoc planum donec planum tabulae interſecet, ſit interſectio recta EF, ita vt planum EZF ſuperficiem propoſitam in puncto Z tangat. Ex Y ad EF ducatur perpendicularis

Y T, iunctaque Z T in eam normalis ducatur Y O, quae ſimul erit normalis in planum E Z F; ipſi O Y agatur parallela Z N occurrens ipſi T Y productae in N, erit N Z tam ad rectam Z T quam ad planum E Z F normalis. His poſitis angulus Z T Y erit menſura inclinationis plani E Z F ad planum tabulae, ac ponatur huius anguli complementum ſeu angulus Y Z T $= \Phi$; et rectae Y Z $= z$ et Y T $= t$; erit $t = z$ tangens Φ; et Y O x ſin. Φ, itemque Y N $= \frac{zz}{t} = z$ coſ. Φ et Z N $= \frac{z}{ſin. \Phi}$. Exprimat nunc recta Z V directionem venti, cuius celeritas debita ſit altitudini k, ita ſcilicet, vt ſi ventus per elementum Z penetraret, ſit ſecundum directionem Z V progreſſurus; ac manifeſtum eſt totum negotium huc redire, vt rectae Z V inclinatio ad planum E Z F inueſtigetur, poſita enim hac inclinatione $= \omega$ erit vis venti in elementum Z $= kd$ S ſin. ω^2, quia angulus ω exhibet inclinationem directionis venti Z V ad planum elementi E Z F. Verum ad hunc angulum ω inueniendum ex V in planum E Z F ducatur perpendiculum V S, iunctaque Z S, erit V Z S iſte angulus quem vocauimus $= \omega$, ideoque ſin. $\omega = \frac{VS}{ZV}$. Ex V ducatur ad E F normalis V R, eritque triangulum R V S ſimile triangulo T Y O; Hinc ſi Y P ad Y T normalis agatur, et ex P ducatur P Q ipſi Y O parallela, erit P Q normalis in planum E Z F, et ob T P $=$ R V habebitur P Q $=$ V S. Quare ſi vocetur Y V $= v$ et angulus T Y V $= \zeta$, quibus poſitio puncti V continetur, erit P Y $= v$ coſ. ζ, ideoque T P $= z$ tangens $\Phi - v$ coſ. ζ atque PQ $=$ TP coſ. $\Phi = z$ ſin. $\Phi - v$ coſ. ζ coſ. $\Phi =$ VS. Ergo ob Z V $= \sqrt{(zz + vv)}$ erit ſin. $\omega = \frac{z ſin. \Phi - v cos. \zeta cos. \Phi}{\sqrt{(zz + vv)}}$,

 vnde

vnde dicitur vis venti in elementum propoſitum $Z = \frac{k\,dS\,(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{zz + vv}$ qua expreſſione volumen aeris indicatur, cuius pondus vi quaeſitae eſt aequale. Huius autem vis directio eſt recta Z N normalis ad planum E Z F, exiſtente Y N $= z$ coſ. Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

4. In hac ſolutione aſſumſimus elementum Z a vento planum tabulae verſus impelli, ita vt inde vis naſcatur punctum Z ſecundum directionem Z N vrgens. Hoc autem non erit niſi ſit z ſin. $\Phi > v$ coſ. ζ coſ. Φ ſeu z tang. $\Phi - v$ coſ. $\zeta =$ T P > 0 nam ſi fuerit z ſin. $\Phi - v$ coſ. ζ coſ. Φ quantitas negatiua etiamſi eius quadratum, quo vis inuenta exprimitur, aeque ſit affirmatiuum, tamen vis directio in contrarium mutatur. Quia enim hoc caſu z tang. $\Phi - v$ coſ. ζ ſeu T P valorem ſortitur negatiuum manifeſtum eſt venti directionem vltra Z productam Z V ſupra planum E Z F prominere, ideoque ventum a regione tabulae in elementum Z incurrere, vnde eius vis in plagam contrariam tendet. Ita quanquam hoc diſcrimen per formulam inuentam non indicatur, tamen tenendum eſt expreſſionem vis venti $\frac{k\,dS\,(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\cos.\,\zeta\,\cos.\,\Phi)^2}{zz + vv}$ valorem habere affirmatiuum ſi fuerit z ſin. $\Phi > v$ coſ. ζ coſ. Φ, ſin autem ſit z ſin. $\Phi < v$ coſ. ζ coſ. Φ illam expreſſionem vis negatiue aſſumi debere.

COROLL. 2.

5. Si fiat z ſin. $\Phi = v$ coſ. ζ coſ. Φ, ſeu z tang. $\Phi = v$ coſ. ζ, vis venti omnino euaneſcit: id quod manifeſtum

ſeſtum eſt quia tum interuallum P T ideoque et V R in nihilum abit; Cadet ergo punctum V in rectam E F, atque directio venti Z V in ipſo plano E Z F erit ſita, vnde elementum Z a vento tantum ſtringetur neutiquam vero impelletur, quia angulus incidentiae V Z S euaneſci. Ex quo caſu eo clarius perſpicitur, ſi ſit z tang. $\Phi > v$ coſ. ζ elemento Z planitiem ſuperiorem ſeu eam, quae a plano tabulae eſt auerſa venti impulſionem recipere, ſin autem z tang. $\Phi < v$ coſ. ζ planitiem inferiorem quae planum tabulae reſpicit, a vento impelli, ſicque effectum plane contrarium produci debere.

COROLL. 3.

6. Si celeritas venti non per altitudinem ipſi debitam k detur, ſed ſpatium exhibeatur, quod ventus vno minuto ſecundo percurrat, vis venti aeque facile exprimi poterit. Sit enim ſpatium a vento vno minuto ſecundo percurſum $= e$ pedum Rhen. atque reliquae quantitates in eadem menſura exprimantur, erit vti vidimus (2), $k = \frac{2}{125} ee$, ita vis qua elementum $Z = dS$ ſecundum directionem Z N impelletur, aequalis erit ponderi voluminis aeris, quod eſt $= \frac{2}{125} e e dS . \frac{(z \text{ſin.} \Phi - v \text{coſ.} \zeta \text{coſ.} \Phi)^2}{zz + vv}$ ſeu poſita ratione grauitatis ſpecificae aeris ad aquam vt 1 ad 800, vis haec ponderi voluminis aquae aequabitur, quod eſt $= \frac{eedS\,(z \text{ſin.} \Phi - v \text{coſ.} \zeta \text{coſ.} \Phi)^2}{50000\,(zz + vv)}$ ped. cub.

COROLL. 4.

7. Poteſt etiam ad calculum contrahendum coefficiens iſte numericus penitus omitti, atque vis venti in elemen-

elementum Z ſimpliciter hac formula $\frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz + vv}$ exprimi, dummodo meminerimus, quando hanc vim ad menſuram abſolutam reducere voluerimus, iſtam expreſſionem vel per $\frac{2}{125}$ vel per $\frac{1}{50000}$ multiplicari oportere, prout quantitatem huius vis vel per pondus voluminis aeris vel per pondus voluminis aquae expreſſam deſideremus: Tum vero quantitates, vt iam monui, ex pede Rhen. pro vnitate aſſumta definiri debent.

COROLL. 5.

8. Vis a vento ſecundum directionem ZN elemento Z impreſſa $= \frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz + vv}$ commodiſſime reſoluitur in binas vires, quarum altera vrgeat ſecundum directionem ZY ad planum tabulae normalem, altera vero agat ſecundum directionem ipſi YN parallelam. Nam ob angulum $YNZ = YZT = \Phi$, erit

vis ſecundum $ZY = \frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz + vv}\,ſin.\,\Phi$

vis ſecundum $YN = \frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz + vv}\,coſ.\,\Phi$

Id quod intelligendum eſt ſi fuerit $z\,ſin.\,\Phi > v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi$; ſin autem ſit $z\,ſin.\,\Phi < v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi$, expreſſiones iſtae inuentae negatiuae capi debebunt.

PROBLEMA. III.

9. *Si ſuperficies quaecunque circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti ſit ipſi axi parallela, ſecundum quam in ſuperficiem data celeritate incurrat, inuenire vim, qua quoduis ſuperficiei elementum a vento impelletur.*

SOLV-

SOLVTIO.

Tranſeat axis per punctum C ſitque ad planum tabulae normalis, ita vt etiam directio venti in planum tabulae ſit perpendicularis, cuius celeritas debita ſit altitudini $= k$, ſeu ſingulis minutis ſecundis ſpatium e pedum abſoluat, ita vt ſit $k = \frac{2}{125} e e$ pedum. Iam motus gyratorius ſuperficiei propoſitae circa axem C tantus ſit, vt eius punctum ab axe diſtans interuallo $= f$ percurrat ſpatium u pedum ſingulis minutis ſecundis, ita vt u exprimat hanc celeritatem, ſi celeritas venti exponatur ſpatio e, quod pariter minuto ſecundo conficitur. Sit iam elementum quodcunque ſuperficiei Z in ſublimi poſitum, cuius area ſit $= d\,S$, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y $= z$: iungatur recta C Y $= s$, quae puncti Z diſtantiam ab axe praebebit, et puncti Z motus circa axem conueniet cum motu puncti Y circa eundem axem. Cum autem diſtantiae f ab axe celeritas ſit $= u$, ob motum angularem diſtantiae CY $= s$ celeritas conueniet $= \frac{us}{f}$, quia celeritas motus angularis ſunt diſtantiis ab axe proportionales. Habebit ergo punctum Y celeritatem $= \frac{us}{f}$ ſecundum directionem Yq ad CY in plano tabulae normalem, eique aequalis erit celeritas puncti Z et ſecundum directionem ipſi Y y parallelam. Venti autem in Z incurrentis directio erit Z Y normalis in planum tabulae quippe directioni axis C parallela, atque ſecundum hanc directionem in elementum Z impingeret, ſi hoc elementum quieſceret; verum cum id ipſum ſit in motu, tam celeritas venti, quam eius directio, qua elementum percutit, inde mutabitur. Ad quam mutationem inueniendam Fig. 2.

 conci-

concipiatur tam elemento quam vento inſuper motus aequalis et contrarius ei, quo elementum Z mouetur, imprimi, vt hoc modo ipſum elementum ad quietem reducatur, atque venti motus relatiuus in elementum obtineatur. Ducatur ergo Z z ipſi Y y parallela, capiaturque Z z ad Z Y in ratione celeritatis $\frac{us}{f}$ ad celeritatem e, vt ſit Z $z = \frac{usz}{ef}$, ac repraeſentante Z Y veram venti celeritatem e, eius motus relatiuus componetur ex motu ſecundum Z Y et motu ſecundum Z z. Compleatur ergo parallelogrammum Z Y V z, erit Y V $= \frac{usz}{ef}$ et cum Y y in directum iacebit; quo facto diagonalis Z V referet directionem venti relatiuam in elementum Z, atque celeritas relatiua erit ad celeritatem veram e, vt eſt Z V ad Z Y, ita vt celeritas relatiua ſit $= \frac{ZV}{ZY} \cdot e$: Quodſi ergo tantisper angulum, quem directio Z V cum planitie elementi conſtituit, ponamus $= \omega$ erit vis elemento impreſſa $= \frac{ZV^2}{ZY^2}\, ee\, d\, S$ ſin. ω^2; ſeu cum ſit $ZV^2 = ZY^2 + YV^2 = zz + \frac{uusszz}{eeff}$ erit haec vis $= (ee + \frac{uuss}{ff})\, d\, S$ ſin. ω^2, quae in planitiem elementi eſt normalis. Ponamus iam hanc planitiem ſeu planum tangens ſuperficiem in puncto Z plano tabulae occurrere in recta E F, ad quam ex Y perpendiculam ducatur Y T, et ex Y in ductam Z T normalis agatur Y O, erit haec in ipſam planum perpendicularis, cui ſi parallela ducatur Z N rectae T Y productae occurrens in N, erit haec Z N directio ſecundum quam elementum Z a vento impelletur. Porro ex V in T Y perpendiculum V P demittatur, itemque ex P in Z T perpendiculum P Q, atque vt in ſolutione praecedentis problematis

vidimus

vidimus, praebebit $\frac{PQ}{ZV}$ ſinum anguli, quo directio venti Z V in planum E Z F eſt inclinata, ita vt ſit: ſin. $\omega = \frac{PQ}{ZV}$. Hinc vis venti in elementum Z $=$ d S exerta fiet $= \frac{PQ^2}{ZY^2} eed\text{S} = \text{PQ}^2 \cdot \frac{ee}{zz} d\text{S}$. Iam ad P Q commode exprimendum, ponatur inclinatio elementi ſeu plani E Z F ad directionem venti veram Z Y, ſeu angulus Y Z T $= \Phi$, erit Y T $= z$ tang. Φ; Y N $= z$ cot. Φ; et Y O $= z$ ſin. Φ. Praeterea vocetur angulus F E Y $= \zeta$, cui aequalis erit angulus V Y P, vnde ob Y V $= \frac{usz}{ef}$, fiet Y P $= \frac{usz}{ef}$ coſ. ζ, hincque habebitur T P $= z$ tang. $\Phi - \frac{usz}{ef}$ coſ. ζ, ex quo tandem elicitur P Q $= z$ ſin. $\Phi - \frac{usz}{ef}$ coſ. ζ coſ. $\Phi = \frac{z}{e}(e$ ſin $\Phi - \frac{us}{f}$ coſ. ζ coſ. $\Phi)$. Quam ob rem vis, qua elementum Z$=d$S a vento ſollicitabitur, erit $= d$S $(e$ ſin. $\Phi - \frac{us}{f}$ coſ. ζ coſ. $\Phi)^2$, cuius vis directio eſt recta Z N normalis ad ſuperficiem E Z F, exiſtente Y N $= z$ cot. Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

10. Si ergo haec expreſſio per fractionem $\frac{2}{125}$ multiplicetur, et pes rhenanus pro communi menſura ſumatur, prodibit volumen aeris, cuius ponderi haec vis aequatur. Vel ſi eadem expreſſio per $\frac{1}{50000}$ multiplicetur, obtinebitur volumen aquae, cuius pondus huic vi eſt aequale, ſi quidem aer octingenties leuior ſit quam aqua: Ad hoc autem notandum eſt, celeritates per ſpatia vno minuto ſecundo confecta, haecque ſpatia pariter in pedibus exprimi debere, quem celeritates exprimendi modum in poſterum retinebo.

COROLL. 2.

11. Hic iterum tenendum eſt elementum Z non in directione ZN impelli, niſi ſit e ſin. $\Phi > \frac{us}{f}$ coſ. ζ, coſ. Φ, vel e tangens $\Phi > \frac{us}{f}$ coſ ζ. Si enim fuerit e tangens $\Phi < \frac{us}{f}$ coſ. ζ, vis euadit negatiua, etiam, ſi id formula inuenta non declaret, atque elementum in plagam oppoſitam NZ vrgebitur; a parte ſcilicet tum poſtica impulſum aeris excipiet. Perinde ac tabula vento velocius ſecundum eandem plagam mota non ſolum a vento nullam impulſionem accipit, ſed etiam ab aere poſteriori repellitur.

COROLL. 3.

12. Vis haec elementum Z ſecundum directionem ZN ſollicitam commode reſoluitur ſecundum directiones ZY et YN. Hinc autem orietur vis ſollicitans
ſecundum directionem $ZY = dS(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\,\text{ſin.}\Phi$
ſecundum directionem $YN = dS(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\,\text{coſ.}\Phi$
Haec autem poſterior vis ſecundum directiones Yy et CY reſoluta dabit vim ſollicitantem
ſecundum directionem $Yy = dS(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\,\text{coſ}\,\zeta\,\text{coſ}\,\Phi$
ſecundum directionem $CY = dS(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\,\text{ſin.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi$
ex quibus effectus vis venti ad motum gyratorium ſuperficiei perturbandum colligi poteſt.

COROLL. 4.

13. Perſpicuum autem eſt vires ſecundum directiones ZY et CY vrgentes nihil ad motum gyratorium conferre, quia vtraque ad directionem motus eſt normalis;

lis; Prior enim vis elementum Z tantum ſecundum venti directionem ſollicitat, altera vero id ab axe motus C directe reuellere conatur; Sicque ſola vis in directione Yy, ſecundum quam punctum Z re vera mouetur, reſtat qua motus totius ſuperficiei afficiatur.

COROLL. 5.

14. Momentum huius vis ad motum gyratorium accelerandum ergo inuenietur, ſi vis per longitudinem vectis CY in quem ſecundum Yy normaliter agit, multiplicetur. Cum igitur ſit $CY = s$ erit momentum vis venti ad motum gyratorium accelerandum quatenus ex elemento $Z = dS$ reſultat $s\,dS\,(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2$ $\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$

COROLL. 6.

15. Simili modo momentum actionis huius vis venti definietur. Si vis, quae punctum Z ſecundum motus ſui directionem propellens, quae eſt ea, quam ſecundum Yy agere inuenimus, per celeritatem puncti, Z, quae eſt $= \frac{us}{f}$, multiplicetur. Hanc ob rem vis venti elementum $Z = dS$ impellens praebebit hoc momentum actionis

$$\frac{usdS}{f}\,(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$$

quod ergo reperitur, ſi momentum illud ſtaticum per $\frac{u}{f}$ multiplicetur.

SCHOLION.

16. Non opus eſſe duco id, quod hic momentum actionis appello, etiamſi haec denominatio noua ſit,

peculiari definitione declarare; cum vis huius denominationis ex applicatione, quam feci, ſponte appareat. Quodſi enim machina quaecunque a vi quacunque in motu conſeruetur, ſpectari debet punctum machinae cui haec vis eſt applicata, huiusque inſuper puncti celeritas et directio ſecundum quam mouetur, tum niſi directio vis ſollicitantis in hanc ipſam directionem incidat, ea per notas reſolutionis regulas ad hanc directionem eſt reducenda, vt obtineatur vis punctum iſtud machinae ſecundum motus ſui directionem ſollicitans, quae etiam tota ad motum machinae accelerandum inſumeretur, niſi obſtacula accelerationem motus impedirent. Tum iſta vis, ſi per celeritatem puncti, cui eſt applicata, multiplicetur, productum erit id, quod hic momentum actionis appello. Vſus autem huius momenti actionis ampliſſimus eſt in diiudicandis omnis generis machinis, nam ſi omnium virium, quibus machina quaepiam incitatur, hoc modo momenta actionis capiantur, atque in vnam ſummam coniiciantur, huic ſummae ſemper aequalis eſt effectus, quem machina producere valet, quocunque demum modo machina ſit ex machinis ſimplicibus compoſita. Quare ſi machina viriumque applicatio ita inſtituatur, vt omnium iunctim ſumtarum momentum actionis fiat maximum, machina quoque maximum edet effectum, quo maior ab iisdem viribus nullo modo obtineri queat. In praeſenti quidem caſu momentum actionis venti in elementum Z impingentis, ita eſt comparatum, vt pluribus modis maximum valorem adipiscatur. Primo enim celeritas u ita definiri poteſt, vt momentum maximum euadat. Deinde tam angulus ζ quam angulus

angulus Φ, quibus inclinatio elementi reſpectu venti continetur, certos valores obtinere poſſunt, vt momentum actionis fiat maximum; atque ſi litteris u, ζ, et Φ ſimul valores ex natura maximi eruti tribuantur, momentum actionis erit maximum maximorum. Verum huiusmodi inueſtigationem hic, vbi adhuc de viribus elementaribus ſermo eſt, ſuſcipere non conuenit, ſed eam differam, donec ad vires finitas ſimus peruenturi.

PROBLEMA IV.

17. *Si ſuperficies quaepiam circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti ad hunc axem ſit vtcunque inclinata, ſecundum quam in ſuperficiem data celeritate impingat, inuenire vim, qua quoduis ſuperficiei elementum a vento impelletur.*

SOLVTIO.

Transeat axis per punctum C ſitque is ad planum tabulae normalis, venti autem directio ſit vbique rectae H C parallela, ad cuius poſitionem inueniendam ex eius puncto quopiam H ad planum tabulae demittatur perpendiculum H G, quod axi erit parallelum, et angulus C H G exhibebit inclinationem venti ad axem. Tum ducatur G C in plano tabulae ac directio venti H C determinabitur per angulum C H G et poſitionem rectae G C ſuper plano tabulae. Vocetur ergo angulus CHG $= \theta$, quo directio venti ad axem inclinatur. Deinde conſideretur ſuperficiei elementum quodcunque Z in ſublimi poſitum, cuius area ſit $= dS$, indeque ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y iunctaque C Y, cuius reſpectu poſitionem rectae G C noſſe oportet, Fig. 3.

vocen-

vocentur $ZY = z$: $CY = s$, et angulus $YCG = \rho$. Porro planum tangens ſuperficiem in Z ſecet planum tabulae recta E F, ſitque angulus $YEF = \zeta$, et inclinatio plani E Z F ad rectam Z Y ſit $= \Phi$ ad quem angulum repraeſentandum ducatur vt ante Y T normalis ad E F, iunctaque Z T, erit angulus $YZT = \Phi$ ideoque $YT = z$ tang. Φ. Tum recta Y O ex Y in T Z perpendiculariter ducta erit ſimul in planum tangens E Z F perpendicularis, eritque $YO = z$ ſin. Φ, ac ſi Z N pariter ad hoc planum ſit normalis, fiet $YN = z$ cot. Φ, et angulus $YNZ = YZT = \Phi$. His poſitis ſit Z S directio venti in elementum Z impingentis producta, erit Z S ipſi H C parallela, itemque Y S ipſi G C parallela, hinc ergo habentur angulo : $YZS = GHC = \theta$, et $CYS = YCG = \varrho$. Ergo ob angulum Z Y S rectum erit $YS = z$ tang. θ et $ZS = \frac{z}{cof.\,\theta}$, item ob angulum $EYT = 90° - \zeta$ erit $TYS = \varrho + \zeta - 90°$, vnde ſi ex S ad T Y perpendicularis S R ducatur erit $YR = z$ tang. θ coſ. $(\varrho + \zeta - 90°) = z$ tang. θ ſin. $(\zeta + \varrho)$ propter angulum $YSR = 180° - \zeta - \varrho$. Inuenta directione venti vera Z S, ſecundum eandem elementum $Z = dS$ feriretur, ſi id quieſceret : motum igitur eius gyratorium conſiderare oportet. Sit igitur u celeritas in diſtantia $= f$ ab axe, eritque celeritas gyratoria puncti $Z = \frac{us}{f}$, cuius directio erit parallela ipſi Yy ad C Y normali : Quare ſi celeritas venti vera ſecundum directionem ſuam Z S ponatur $= e$ atque ipſi Yy ducatur parallela S V tanta vt ſit $ZS : SV = e : \frac{us}{f}$, erit $SV = \frac{us}{ef} ZS = \frac{usz}{efcof.\,\theta}$. Iam recta Z V praebebit directionem relati-

vam,

vam, qua ventus in elementum Z impinget, eiusque celeritas relatiua erit $= \frac{ZV}{ZS} e$. Supereſt igitur, vt inclinatio huius directionis Z V ad planum E Z F indagetur; ad hoc ducatur V P ipſi Y T normalis, et quia V S eſt ad E Y normalis, quippe ipſi Yy parallela, erit angulus $SVP = EYT = 90° - \zeta$, vnde fiet $PR = VS \operatorname{coſ.} \zeta = \frac{usz \operatorname{coſ.} \zeta}{ef \operatorname{coſ.} \theta}$, et $TP = TY - YR - PR$ dabit

$$TP = z \operatorname{tang.} \Phi - z \operatorname{tang.} \theta \operatorname{ſin.} (\zeta + \varrho) - \frac{usz \operatorname{coſ.} \zeta}{ef \operatorname{coſ.} \theta}$$

Ex P ad ZT ducatur perpendicularis PQ ob ang. $PTQ = 90 - \Phi$, erit $PQ = z \operatorname{ſin.} \Phi - z \operatorname{tang.} \theta \operatorname{ſin.} (\zeta + \varrho) \operatorname{coſ.} \Phi - \frac{usz \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{coſ.} \Phi}{ef \operatorname{coſ.} \theta}$

At ex praecedentibus patet rationem $\frac{PQ}{ZV}$ dare ſinum anguli, quo venti directio Z V ad elementum Z inclinatur, vnde cum celeritas ſit $= \frac{ZV}{ZS} e$, erit vis venti in hoc elementum exerta $= dS . \frac{ZV^2}{ZS^2} ee . \frac{PQ^2}{ZV^2} = eedS . \frac{PQ^2}{ZS^2} = dS \left(\frac{e . PQ \operatorname{coſ.} \theta}{z}\right)^2$, ob $ZS = \frac{z}{\operatorname{coſ.} \theta}$. Quam ob rem vis quaeſita erit $= dS \left(e \operatorname{coſ.} \theta . \operatorname{ſin.} \Phi - e \operatorname{ſin.} \theta . \operatorname{ſin.} (\zeta + \varrho) \operatorname{coſ.} \Phi - \frac{us}{f} \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{coſ.} \Phi\right)^2$ atque directio huius vis eſt recta Z N ad planum E Z F normalis, cuius poſitionem ita inuenimus determinatam, vt ſit $YN = z \operatorname{coſ.} \Phi$. Haec autem expreſſio dat volumen vel aeris vel aquae, cuius pondus iſti vi eſt aequale, prout ea vel per $\frac{1}{325}$ vel per $\frac{1}{50000}$ multiplicetur. Q. E. I.

COROLL. 1.

18. Hic iterum notandum eſt, vim, qua elementum Z in directione Z N impelli inuenimus, fieri negatiuam, ideoque in regionem oppoſitam impelli, ſi fuerit

$e \text{ coſ } \theta \text{ ſin.} \Phi < e \text{ ſin. } \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho) \text{coſ.} \Phi + \frac{us}{f} \text{coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi$

ſeu tang. $\Phi <$ tang. θ ſin. $(\zeta + \varrho) + \frac{us}{ef} \frac{\text{coſ.} \zeta}{\text{coſ } \theta}$. Quare vt vis illa ſit affirmatiua, vti in figura repraeſentatur, atque elementum Z ſecundum directionem Z N ſollicitet, neceſſe eſt, vt ſit

$e \text{ coſ.} \theta \text{ ſin.} \Phi > e \text{ ſin.} \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho) \text{coſ.} \Phi + \frac{us}{f} \text{coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi$

ſeu $\frac{ef}{us} > \frac{\text{coſ.} \zeta}{\text{coſ.} \theta \text{ tang } \Phi - \text{ſin.} \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho)}$; ad quod eo diligentius eſt attendendum, quia hoc diſcrimen per formulam inuentam non indicatur.

COROLL. 2.

19. Reſolutio huius vis ſimili modo inſtituitur, quo in problemate praecedente, oriuntur autem hinc vires

ſecundum $ZY = dS(e \text{ coſ.} \theta \text{ ſin.} \Phi - e \text{ ſin.} \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho) \text{coſ.} \Phi - \frac{us}{f} \text{coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi)^2 \text{ ſin.} \Phi$

ſecundum $CY = dS(e \text{ coſ.} \theta \text{ ſin.} \Phi - e \text{ ſin.} \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho) \text{coſ.} \Phi - \frac{us}{f} \text{coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi)^2 \text{ ſin.} \zeta \text{ coſ.} \Phi$

ſecundum $Yy = dS(e \text{ coſ.} \theta \text{ ſin.} \Phi - e \text{ ſin.} \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho) \text{coſ.} \Phi - \frac{us}{f} \text{coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi)^2 \text{ coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi$

ex quarum vltima obtinetur momentum vis venti ad motum gyratorium accelerandum, quod eſt

$s\,dS(e \text{ coſ.} \theta \text{ ſin.} \Phi - e \text{ ſin.} \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho) \text{coſ.} \Phi - \frac{us}{f} \text{coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi)^2 \text{ coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi$

momentum autem actionis eiusdem vis eſt.

$\frac{us}{f} dS(e \text{ coſ.} \theta \text{ ſin.} \Phi - e \text{ ſin.} \theta \text{ ſin.} (\zeta + \varrho) \text{coſ.} \Phi - \frac{us}{f} \text{coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi)^2 \text{ coſ.} \zeta \text{ coſ.} \Phi$.

COROLL. 3.

20. Tribus ergo caſibus momentum actionis euaneſcere poteſt, quorum primus eſt ſi coſ. $\zeta = 0$ ſeu angulus ζ rectus, ideoque recta E F ad C Y normalis. Secun-

Secundo momentum actionis etiam fit $=0$, ſi cof. $\Phi = 0$ ſi $\Phi = 90°$, quod euenit, ſi planum tangens EZF fuerit ad axem motus normale: Tertio momentum actionis fit nullum, ſi angulus Φ eiusmodi fuerit vt ſit

$$\text{tang.}\,\Phi = \text{tang.}\,\theta\,\text{ſin.}\,(\zeta + \varrho) + \frac{us}{ef} \cdot \frac{\text{coſ.}\,\zeta}{\text{coſ.}\,\theta}.$$

PROBLEMA V.

21. *Si ventus data celeritate ſecundum directionem quamcunque in alam molae alatae, quae velocitate quacunque circa axem gyretur, impingat, atque ſuperficies alae habeat figuram vtcunque incuruatam, inuenire vim, quam ventus in alam exerit, eiusque momentum actionis.*

SOLVTIO.

Transeat axis molae per punctum C ſitque normalis ad planum tabulae, venti autem directio ſit vbique parallela rectae HC, ex cuius puncto quopiam H in planum tabulae normalis demittatur HG, quae cum axi ſit parallela, erit CHG angulus, quem directio venti cum axe conſtituit: ſit ergo vt ante hic angulus CHG $= \theta$. Superficies alae quaecunque ſit referatur ad planum tabulae, in quo ſumatur recta CA inſtar axis, ad quem coordinatae accommodentur: quae recta CA ſimul cum ala in gyrum agatur: dum recta GCB a venti directione pendens manet immota; ſitque angulus BCA $= \eta$, qui dum ala gyratur, continuo fiat maior, vim autem venti indagari oportet, dum ala in loco, quem figura exhibet, haeret, ſicque quamdiu vim venti per totam alae ſuperficiem colligimus, hunc angulum η Fig. 4.

 tan-

tanquam conſtantem ſpectabimus, erit ergo ang. A C G $= 180^\circ - \eta$. Sit venti celeritas $= e$, et poſita diſtantia C A $= f$, ſit celeritas motus gyratorii in hac diſtantia, qua punctum A circa C ſecundum A a progreditur $= u$. Iam ex puncto quocunque ſuperficiei alae Z ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y et ex Y ad rectam C A ducatur normalis Y X, ponanturque tres coordinatae orthogonales, quibus locus puncti Z definitur C X $= x$, X Y $= y$ et Y Z $= z$; et quia ſuperficies alae tanquam data ſpectatur, determinabitur z per x et y, ſeu erit z functio quaepiam ipſarum x et y; ſit igitur differentialibus ſumendis $dz = p\,dx + q\,dy$. Ducatur recta C Y, erit C Y $= \sqrt{(xx + yy)}$, et ſin. XCY $= \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$, coſ. XCY $= \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Hinc applicatione ad problema praecedens facta, erit CY $= s = \sqrt{(xx+yy)}$ et angulus YCG $= \varrho = 180^\circ - \eta - $ XCY, vnde ſin. $\varrho =$ ſin. $(\eta +$ XCY$) = \frac{x\,\text{ſin.}\,\eta + y\,\text{coſ.}\,\eta}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et coſ. $\varrho = \frac{y\,\text{ſin.}\,\eta - x\,\text{coſ.}\,\eta}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Sit D Z F planum tangens ſuperficiem alae in puncto Z exiſtente Y D rectae C A parallela, et ex natura tangentium erit Y F $= \frac{z\,dy}{dz}$ poſito x conſtante, et Y D $= \frac{z\,dx}{dz}$ poſito y conſtante. Cum igitur priori caſu ſit $dz = q\,dy$, et poſteriori $dz = p\,dx$ erit Y F $= \frac{z}{q}$ et Y D $= \frac{z}{p}$, vnde DF $= \frac{z}{pq}\sqrt{(pp+qq)}$. Hinc porro erit ſin. FDY $= \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}$ et coſ. FDY $= \frac{q}{\sqrt{(pp+qq)}}$. Iam quia ſupra poſuimus angulum Y E F $= \zeta$ erit $\zeta =$ F D Y + X C Y, vnde obtinebimus: ſin. $\zeta = \frac{px + qy}{\sqrt{(xx+yy)(pp+qq)}}$ et coſ. $\zeta = \frac{qx - py}{\sqrt{(xx+yy)(pp+qq)}}$.

Prae-

Praeterea vero erit $\zeta + \varrho = 180 - \eta + FDY$, vnde colligitur ſin. $(\zeta + \varrho) =$ ſin. $(\eta - FDY) = \frac{q\,ſin.\eta - p\,coſ.\eta}{\surd(pp+qq)}$, ſicque iam omnes valores ſumus conſecuti, qui in expreſſiones virium quaeſitarum ingrediuntur, praeter angulum Φ, ad quem inueniendum ex Y ad DF normalis ducatur YT, iunctaque ZT, erit angulus $YZT = \Phi$. At ob DF : FY = DY : YT erit YT $= \frac{z}{\surd(pp+qq)}$, ideoque tang. $\Phi = \frac{YT}{YZ} = \frac{1}{\surd(pp+qq)}$, ac propterea ſin.$\Phi = \frac{1}{\surd(1+pp+qq)}$ et coſ.$\Phi = \frac{\surd(pp+qq)}{\surd(1+pp+qq)}$ His valoribus ſubſtituendis habebimus:

$e\,coſ.\theta\,ſin.\Phi = \frac{e\,coſ.\theta}{\surd(1+pp+qq)}$; $e\,ſin.\theta\,ſin.(\zeta+\varrho)\,coſ.\Phi = \frac{e\,ſin.\theta\,(q\,ſin.\eta - p\,coſ.\eta)}{\surd(1+pp+qq)}$ et $\frac{u\,s}{f}\,coſ.\zeta\,coſ.\Phi = \frac{u(qx-py)}{f\surd(1+pp+qq)}$. Ponatur ad abbreuiandum $V = e\,coſ.\theta - e\,ſin.\theta\,(q\,ſin.\eta - p\,coſ.\eta) - \frac{u}{f}(qx-py)$, eritque $e\,coſ.\theta\,ſin.\Phi - e\,ſin.\theta\,ſin.(\zeta+\varrho)\,coſ.\Phi - \frac{u\,s}{f}\,coſ.\zeta\,coſ.\Phi = \frac{V}{\surd(1+pp+qq)}$. Si iam areola elementi ſuperficiei in Z, quae poſita eſt $= dS$ in plano tabulae elemento $dx\,dy$ immineat, erit $dS : dx\,dy = ZT : YT = 1 :$ ſin.Φ ideoque $dS = dx\,dy\,\surd(1+pp+qq)$: vnde vis, qua elementum Z ſecundum directionem normalem ZN vrgetur, erit $= \frac{VV\,dS}{1+pp+qq} = \frac{dx\,dy}{\surd(1+pp+qq)}\,.\,VV$. Hinc porro orietur vis ſecundum directionem $ZY = \frac{dx\,dy}{1+pp+qq}\,.\,VV$; et vis ſecundum directionem CY ſeu YI $= \frac{(px+qy)\,dx\,dy}{(1+pp+qq)\surd(xx+yy)}\,.\,VV$; et vis ſecundum $Yy = \frac{(qx-py)\,dx\,dy}{(1+pp+qq)\surd(xx+yy)}\,.\,VV$. Ex hac vltima vi oritur momentum potentiale, ad motum alae acceleran-

dum $= \frac{(qx - py)dxdy}{1 + pp + qq}$. V V, et momentum actionis erit $= \frac{u(qx - py)dxdy}{f(1 + pp + qq)}$. V V, quod reperitur ſi momentum potentiale per $\frac{u}{f}$ multiplicatur. Vt autem ex viribus his elementaribus eliciantur vires finitae ex tota alae ſuperficie oriundae, ponatur primo x conſtans, et quaerantur integralia ex ſola variabilitate ipſius y reſultantia, tumque y ad totam alae latitudinem abſciſſae C X reſpondentem extendatur, quo facto formula denuo integretur ex variabilitate ipſius x, tumque x ad totam alae longitudinem extendatur, ſicque tam vires quam earum momenta pro tota alae ſuperficie inuenientur. Q. E. I.

COROLL. 1.

22 Vires, quae ſecundum directiones ZY et YI alam ſollicitant, nihil conferunt ad motum alae vel accelerandum vel retardandum, ſed prior ad alam ab axe abrumpendam, altera vero ad alam euellendam conatum exerit; vnde alam ſatis firmiter axi infixam eſſe oportet, vt his viribus reſiſtere valeat. In hunc finem ſufficit iſtas vires proxime ſaltem noſſe, neque operae pretium foret earum quantitatem nimis ſtudioſe per integrationes acquirere, niſi calculus facile expediri poſſit.

COROLL. 2.

23. Totum ergo integrationis opus ad inuentionem momentorum redit, quae duplicem integrationem requirit. Erit nimirum momentum potentiale $= \int dx \int \frac{VV(qx - py)dy}{1 + pp + qq}$, quo inuento erit momentum actio-

nis

nis $= \frac{u}{f}\int dx \int \frac{VV(qx-py)dy}{1+pp+qq}$, ideoque totum negotium duplici hac integratione abſoluitur. Perinde autem eſt ab vtra variabili x et y conſtanti aſſumenda prima integratio inſtituatur, quin etiam alias nouas variabiles introducere licet, atque tum in hoc tantum eſt elaborandum, vt duplex integratio perficiatur, quae nullo diſcrimine inter variabiles habito hoc modo indicari poteſt $\iint \frac{VV(qx-py)dx\,dy}{1+pp+qq}$.

COROLL. 3.

24. De his viribus et momentis iterum notandum eſt eorum valores tum tantum eſſe affirmatiuos et aſſignatas directiones habere, quando valor ipſius V fuerit affirmatiuus, ſin autem V obtineat valorem negatiuum tum etiam ipſas vires earumque momenta in plagam contrariam agere. Quae conditio huc redit, vt quadrato V V idem ſignum tribuatur, quod conuenit ipſi quantitati V, ita vt ſi valor ipſius V fiat negatiuus, etiam quadrato V V ſignum negationis praefigatur.

COROLL. 4.

25. Quando igitur quaeſtio circa figuram alae ita inſtituatur, vt vis venti plurimum conferat ad eius motum promouendum, figuram alae ita comparatam eſſe oportet, vt nusquam ſeu pro nullo alae elemento valor ipſius V fiat negatiuus. Si enim pro quapiam parte valor ipſius V fieret negatiuus, ab ea motus alae impediretur, atque expediret illam partem reſcindi. Quae cautio eo magis

eſt

eſt obſeruanda, quod calculus nullam huiusmodi diminutionem indicat, etiamſi vsquam V valorem negatiuum ſortiatur.

COROLL. 5.

26. Cum valor ipſius V ita determinetur, vt ſit $V = e \operatorname{coſ.} \theta - e \operatorname{ſin.} \theta (q \operatorname{ſin.} \eta - p \operatorname{coſ.} \eta) - \frac{u}{f}(qx - py)$; hinc apparet, quomodo iſte valor ab obliquitate venti reſpectu axis C pendet, hoc eſt tum ab angulo C H G $= \theta$ et ab angulo A C B $= \eta$. Quare ſi obliquitas iſta euaneſcat, ventusque ſecundum directionem axis in alam impingat, erit $\theta = 0$, ideoque $\operatorname{coſ.} \theta = 1$ et $\operatorname{ſin.} \theta = 0$, vnde fiet $V = e - \frac{u}{f}(qx - py)$.

COROLL. 6.

27. Sin autem directio venti ſit ad axem C normalis, ideoque plano tabulae parallela, ita vt ſecundum directionem G C B in alas incurrat, ob angulum θ rectum fiet $V = e(p \operatorname{coſ.} \eta - q \operatorname{ſin.} y) - \frac{u}{f}(qx - py)$

SCHOLION.

28. Quia iam innui poſſe, ſitum cuiusuis elementi Z per alias coordinatas determinari, non abs re erit, hanc determinationem alio modo inſtituere, qui ſaepenumero calculum multo faciliorem reddet. Definiatur ſcilicet interuallum Y Z $= z$ ex diſtantia C Y $= s$ et angulo A C Y, quem ponam $= v$, ita vt iam z ſit functio quantitatum s et v, ex cuius differentiatione naſcatur

ſcatur $dz = P\,ds + Q\,dv$. Iam primo valores praecedentium coordinatarum x et y itemque quantitatum p et q per s, v, P et Q definiri oportet. Erit autem $x = s\,\text{coſ.}\,v$, $y = s\,\text{ſin.}\,v$, ideoque $dx = ds\,\text{coſ.}\,v - s\,dv\,\text{ſin.}\,v$ et $dy = ds\,\text{ſin.}\,v + s\,dv\,\text{coſ.}\,v$ quibus valoribus in forma praecedenti $dz = p\,dx + q\,dy$ ſubſtitutis fiet

$$dz = p\,ds\,\text{coſ.}\,v + q\,ds\,\text{ſin.}\,v - p\,s\,dv\,\text{ſin.}\,v + q\,s\,dv\,\text{coſ.}\,v$$

eritque ergo

$$P = p\,\text{coſ.}\,v + q\,\text{ſin.}\,v \text{ et } Q = q\,s\,\text{coſ.}\,v - p\,s\,\text{ſin.}\,v$$

vnde colligitur $P\,\text{coſ.}\,v - \frac{Q}{s}\,\text{ſin.}\,v = p$ et $P\,\text{ſin.}\,v + \frac{Q}{s}\,\text{coſ.}\,v = q$. Hincque porro fit $qx - py = Q$ et $1 + pp + qq = 1 + PP + \frac{QQ}{ss}$. atque $q\,\text{ſin.}\,\eta - p\,\text{coſ.}\,\eta = \frac{Q}{s}\,\text{ſin.}\,(\eta + v) - P\,\text{coſ.}\,(\eta + v)$: Vnde obtinetur: $V = e\,\text{coſ.}\,\theta + eP\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,(\eta + v) - \frac{eQ}{s}\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,(\eta + v) - \frac{uQ}{f}$. ita vt caſu $\theta = 0$ fit $V = e - \frac{uQ}{f}$. Iam elementum in plano tabulae elemento $Z = dS$ ſubiectum eſt $= s\,ds\,dv$ quod loco $dx\,dy$ ſcribi debet: vnde colligitur

vis ſecundum $ZY = \frac{s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

vis ſecundum $YI = \frac{P\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

vis ſecundum $Yy = \frac{Q\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

hincque erit vis venti momentum potentiale $= \frac{Q\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$, et momentum actionis $= \frac{uVV}{f} \cdot \frac{Q\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss}$. ex quibus per duplicem integrationem vires et momenta ex tota alae ſuperficie nata eliciuntur.

PROBLEMA VI.

29. *Si ſuperficies alae fuerit figura plana quaecunque ad axem vtcunque inclinata, quae circa axem motu quocunque gyretur, atque ventus in eam data celeritate ſecundum directionem quamcunque impingat, inuenire vim eiusque momentum, quo ala a vento ſollicitabitur.*

SOLVTIO.

Fig. 5. Inſiſtat axis plano tabulae normaliter, transeatque per eius punctum C; venti autem directio vbique parallela ſit rectae H C ex cuius puncto quopiam H in planum tabulae demiſſo perpendiculo H G axi parallelo, ſit angulus C H G $= \theta$, quo definitur inclinatio axis ad directionem venti, cuius celeritas ſit vt hactenus $= e$. Deinde cum alae ſuperficies ſit plana, ſit recta D E F eius interſectio cum plano tabulae, ad quam ex C ducatur normalis C D, ſitque C D $= c$; et ducta C K ipſi D F parallela ponatur angulus B C K $= \eta$, qui dum ala motu angulari promouetur, continuo creſcat; alae autem in diſtantia f ab axe celeritas ſit $= u$. Iam conſideretur alae punctum quoduis Z vnde in planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, et ex Y ad D F ducatur normalis Y T, iunctaque Z T, erit T Z Y angulus, quo planum alae ad axem C inclinatur, qui angulus ſupra poſitus eſt $= \Phi$. Quodſi ergo quaſi coordinatae pro figura alae ponantur, D T $= t$, et T Z $= y$, erit T Y $= y$ ſin. Φ, et Z Y $= y$ coſ. Φ: elementum autem alae erit $= dt\,dy$, quod ſupra per dS indicauimus. Ducatur recta C Y, et ſolutione *Probl. IV.* huc

huc tranſlata, erit $YEF = \zeta$, $CY = s$, et $YCG = \varrho$, ac $dS = dt\,dy$. Fiet autem ex praecedentibus denominationibus $s = \sqrt{(tt + (c + y\,\text{ſin.}\,\Phi)^2)}$, ac poſito tantiſper angulo $ECD = \omega$, vt ſit $\text{ſin.}\,\omega = \frac{t}{s}$; $\text{coſ.}\,\omega = \frac{c + y\,\text{ſin.}\,\Phi}{s}$, erit angulus $\zeta = 90° - \omega$, ideoque $\text{ſin.}\,\zeta = \frac{c + y\,\text{ſin.}\,\Phi}{s}$ et $\text{coſ.}\,\zeta = \frac{t}{s}$: deinde vero erit $YCG = \varrho = 180° - \eta - \zeta$ ideoque $\zeta + \varrho = 180° - \eta$ et $\text{ſin.}\,(\zeta + \varrho) = \text{ſin.}\,\eta$, tum vero $s\,\text{coſ.}\,\zeta = t$. Hinc prodit vis venti in elementum alae $Z = dt\,dy$ ſecundum directionem normalem ZN exerta $= dt\,dy(e\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi - e\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{coſ.}\,\Phi)^2$ poſito alam in plagam Yy gyrari. Ex quo colligitur vis ſecundum $ZY = dt\,dy(e\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi - e\,\text{ſin}\,\theta\,\text{ſin}\,\eta\,\text{coſ}\,\Phi$

$$- \frac{ut}{J}\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{ſin.}\,\Phi$$

vis ſecundum $CY = \frac{c + y\,\text{ſin.}\,\Phi}{s}\,dt\,dy(e\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin}\,\Phi - e\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ}\,\Phi$

$$- \frac{ut}{J}\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\Phi$$

vis ſecundum $Yy = \frac{t\,dt\,dy}{s}(e\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi - e\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\Phi$

$$- \frac{ut}{J}\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ}\,\Phi$$

Hinc ita elicitur momentum potentiale ad motum alae accelerandum $= t\,dt\,dy(e\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi - e\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{coſ.}\,\Phi)^2$ $\text{coſ.}\,\Phi$, quod per $\frac{u}{J}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Conſideretur primo t tanquam conſtans, atque integrale erit $= yt\,dt(e\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi - e\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\Phi$ quo exprimitur momentum ex areola alae $y\,dt$ ortum. Repraeſentetur iam tota ala in plano tabulae ſitque ea $EMFME$, quae a plano ad axem normali ſecetur recta DF, vt in figura praecedente, ſitque Cc huic alae plano oblique inſiſtens, ita vt iam ſit angulus $CcD = \Phi$, Fig 6.

 et

et linea C D tam ad axem c C quam ad rectam D F normalis. Sic cum ſit C D $= c$, erit D $c = \frac{c}{ſin.\,\Phi}$ ſicque punctum c in plano alae reperitur, in quo axis hoc planum traiicit. Quod ſi iam vocetur D T $= t$, et tota ordinata M P M $= v$, poſito v pro y, erit momentum vis venti in alae partem M E M impingentis ad motum alae gyratorium accelerandum

$$= \int v t dt (e \, coſ.\,\theta \, ſin.\,\Phi - e \, ſin.\,\theta \, ſin.\,\eta \, coſ.\,\Phi - \tfrac{ut}{f} coſ.\,\Phi)^2 coſ.\,\Phi$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Manifeſtum autem eſt hoc integrale ita capi oportere, vt id euaneſcat poſito $t =$ D E, quo facto ſi ponatur $t =$ D F prodibit momentum ex tota ala ortum. Integratio autem pendet a natura figurae alae, qua definitur, qualis functio v ſit ipſius t, ſicque pro quouis caſu tam momentum potentiale reperitur, quam momentum actionis, quod habebitur ſi illud per $\frac{u}{f}$ multiplicetur. Ceterum hic notandum eſt omnes quantitates quae in hanc formulam ingrediuntur, praeter binas t et v eſſe conſtantes, et in integratione pro talibus haberi debere. Q. E. I.

COROLL. I.

30. Quia linea C D, quam poſuimus $= c$, et quae diſtantiam axis a recta DF deſignat non in expreſſionem momenti ingreditur, momentum ſemper idem manebit, per quodcunque rectae Dc ad DF normalis punctum axis cC transeat, dummodo ſibi maneat parallelus. Vel quod eodem redit, nihil refert, per quodnam rectae D c punctum linea D F ducatur, dummodo fuerit ad Dc perpendicularis et in plano alae ſita.

COROLL.

COROLL. 2.

31. Data igitur alae figura EMFME in plano tabulae deſcripta vbicunque axis Cc hoc planum traiiciat, ſemper eiusmodi planum per axem tranſiens dabitur, quod ſimul erit ad planum alae normale, cuius notetur interſectio cD, ita vt planum CcD ſit ad planum alae normale, ex quo cognoſcetur angulus $CcD = \Phi$, quo axis ad planum alae inclinatur. Tum inuenta recta cD tota alae figura rectis MM, mm iſti cD parallelis in elementa MmmM reſoluatur, eritque quaeuis ordinata $MM = v$, eiusque diſtantia á recta cD, nempe $DT = t$; atque momentum pendebit ab aequatione, qua relatio inter t et v exprimitur.

COROLL. 3.

32. Cognita aequatione inter t et v, dummodo pro quauis diſtantia $DT = t$ a recta cD, ordinata MM fuerit $= v$, vbicunque etiam in recta ipſi cD parallela exiſtat, ſiue ſit in MM, vt figura exhibet, ſiue magis dextrorſum ſiniſtrorſumue promota, momentum vis venti ſemper erit idem. Ideoque vna aequatio inter t et v data ad innumerabiles alae figuras erit accommodata.

COROLL. 4.

33. Si elementum areae alae MmmM ponatur $= dS$, erit $dS = v\,dt$, et momentum elementare ex vi venti in areolam MmmM impingentis, erit $=$ $t\,dS(e \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{ſin.} \Phi - e \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \eta \operatorname{coſ.} \Phi - \frac{ut}{f} \operatorname{coſ.} \Phi)^2 \operatorname{coſ.} \Phi$

 quod

quod ad motum alae accelerandum confert, niſi eius valor fuerit negatiuus. Quare vt motus alae a vi venti promoueatur, primum neceſſe eſt vt t habeat valorem affirmatiuum, ſicque tota ala ad easdem partes rectae c D ſita eſſe debet. Si enim quaepiam alae pars ad alteram partem huius rectae c D extenderetur, a vi venti in eam impingentis oriretur momentum contrarium, quo motus alae retardaretur, ſicque machina in motu ſuo impediretur.

COROLL. 5.

34. Praeterea vero ne vis venti motui alae vsquam aduerſetur, neceſſe eſt, vt haec quantitas

$$e \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{ſin.} \Phi - e \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \eta \operatorname{coſ.} \Phi - \frac{ut}{f} \operatorname{coſ.} \Phi$$

vbique valorem obtineat affirmatiuum; ſeu vt membra eius negatiua ſemper ſint minora quam membrum primum affirmatiuum $e \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{ſin.} \Phi$. Vltimum autem membrum $\frac{ut}{f} \operatorname{coſ.} \Phi$ ſemper eſt negatiuum, fitque maximum, vbi ad alae partem F a recta c D maxime remotam peruenitur. Quod ſi ergo haec diſtantia D F ponatur $= f$, ita vt puncti F celeritas gyratoria ſit $= u$, oportet vt poſito $t = f$, ſit haec quantitas $e \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{ſin.} \Phi - e \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \eta \operatorname{coſ.} \Phi - u \operatorname{coſ.} \Phi$ affirmatiua, tum enim, ſi fuerit $t < f$, ea multo magis erit affirmatiua.

COROLL. 6.

35. Dum ala gyratur angulus $\eta =$ B C K continuo mutatur, ideoque ne ſuperior formula vnquam negatiuum obtineat valorem tantum efficiendum eſt, vt quando ſecundus terminus maximum ſortitur valorem negatiuum,

vum, quod fit ſi angulus η erit rectus, ſeu ſin. $\eta = 1$, tamen illa formula non fiat negatiua. Debebit ergo valor huius formulae

e coſ. θ ſin $\Phi - e$ ſin. θ coſ. $\Phi - u$ coſ. Φ ſeu huius e ſin. $(\Phi - \theta) - u$ coſ. Φ eſſe affirmatiuus.

COROLL. 7.

36. Quod ſi ergo tota ala EMFME ad eandem partem rectae c D fuerit poſita, ita vt abſciſſa t nusquam fiat negatiua, inſuperque fuerit e ſin. $(\Phi - \theta) - u$ coſ. Φ, ſeu celeritas alae in diſtantia DF $= f$, non ſit maior quam $\frac{e\,\text{ſin.}\,(\Phi - \theta)}{\text{coſ.}\,\Phi}$, tum ſemper et vbique vis venti ad alam promouendam impendetur. Hinc igitur patet, ſi directio venti cum directione axis, circa quem ala gyratur, non conueniat, ſed ab ea declinet angulo θ, hunc angulum minorem eſſe debere angulo Φ, quo axis ad ſuperficiem alae inclinatur.

SCHOLION.

37. Data ergo figura alae ſeu ſaltem relatione inter t et v qua innumerae alae figurae continentur, determinatio momenti vis venti ab his tribus formulis integralibus $\int v\,t\,dt$, $\int v\,t\,t\,dt$, et $\int v\,t^3\,dt$ pendet. Capiantur ergo valores horum integralium per totam alae ſuperficiem, ponaturque

$\int v\,t\,dt = A$; $\int v\,t\,t\,dt = B$ et $\int v\,t^3\,dt = C$

erunt A B C quantitates conſtantes a ſola figura alae pendentes. Atque momentum potentiale vis venti in

alam

alam totam ad eius motum accelerandum erit:

$A\,ee\,(\mathrm{coſ.}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\Phi - \mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\,\eta\,\mathrm{coſ}\,\Phi)^2\,\mathrm{coſ.}\Phi - \frac{2\,B\,eu}{f}\,(\mathrm{coſ.}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\Phi - \mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\,\eta\,\mathrm{coſ.}\,\Phi)\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2 + \frac{C\,uu}{ff}\,\mathrm{coſ.}\Phi^3$, hincque momentum actionis vis venti in hanc alam erit

$\frac{A\,eeu}{f}(\mathrm{coſ.}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\Phi - \mathrm{ſin}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\eta\,\mathrm{coſ.}\Phi)^2\,\mathrm{coſ}\,\Phi - \frac{2\,B\,euu}{ff}(\mathrm{coſ.}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\,\Phi - \mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{ſin.}\,\eta\,\mathrm{coſ.}\,\Phi)\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2 + \frac{C\,u^3}{f^3}\,\mathrm{coſ}\,\Phi^3$. Quare ſi directio venti fuerit directioni axis parallela, quemadmodum fere ſemper molae alatae vento opponi ſolent, erit momentum potentiale venti ad motum accelerandum tendens

$$A\,ee\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi - \frac{2\,B\,eu}{f}\,\mathrm{ſin.}\,\Phi\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2 + \frac{C\,uu}{ff}\,\mathrm{coſ.}\Phi^3$$

et momentum actionis hinc erit

$$\frac{A\,eeu}{f}\,\mathrm{ſin.}\Phi^2\,\mathrm{coſ.}\Phi - \frac{2\,B\,eu^2}{f^2}\,\mathrm{ſin.}\,\Phi\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2 + \frac{C\,u^3}{f^3}\,\mathrm{coſ}\,\Phi^3$$

Hoc caſu ſtatim colligitur, ſi ala adhuc ſit in quiete vel nunc primum moueri incipiat, momentum fore maximum ſi fuerit ſin. Φ^2 coſ. Φ maximum, quod euenit ſi per differentiationem fiat

$$2\,\mathrm{ſin.}\,\Phi\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2 = \mathrm{ſin.}\,\Phi^3 \text{ ſeu } \mathrm{tang.}\Phi = \sqrt{2}$$

vnde anguli Φ prodit valor $54^\circ, 45'$, qui angulus plerumque in molis alatis obſeruari ſolet. Verum hinc iam ſatis liquet hanc maximi praerogatiuam in iſtum angulum non competere, niſi molae ala adhuc ſit in quiete, atque pro quouis celeritatis gradu quo mouetur, peculiarem prodire valorem anguli Φ, quo momentum vis venti fiat maximum.

PRO-

PROBLEMA VII.

38. *Si ala fuerit plana, atque axis, circa quem mouetur, directioni venti directe opponatur, inuenire inclinationem, ſub qua ala ad axem conſtitui debet, atque celeritatem alae gyratoriam, qua momentum actionis venti fiat maximum.*

SOLVTIO.

Sit E M F M E figura alae data, in plano tabulae Fig. 6. exhibita, per cuius punctum quodpiam c axis C c transeat, cuius inclinatio C c D $= \Phi$ quaeritur. Detur tamen planum C c D, in quo axis conſtituitur, ad planum alae normale, ideoque interſectio c D, cui parallelae ſumantur ordinatae M M, $m\, m$ in ala, poſitisque D T $= t$, et M M $= v$, pro tota ala per integrationes quaerantur ſequentes valores

$$\int v\,t\,dt = A\,,\ \int v\,t\,t\,dt = B \text{ et } \int v\,t^3\,dt = C.$$

Deinde ſit maxima alae ab axe elongatio DF $= f$, et celeritas, qua punctum F circa axem gyratur $= u$, quae etiam ita definienda eſt, vt momentum actionis fiat maximum. Iam vero quia directio venti in directionem axis incidere aſſumitur, erit momentum actionis:

$$\frac{A\,e\,e\,u}{f}\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{2\,B\,e\,u^2}{ff}\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + \frac{C\,u^3}{f^3}.\,\text{coſ.}\,\Phi^3.$$

Ponamus primo celeritatem u iam eſſe datam, et quaeramus angulum Φ, quo hoc momentum fiat maximum, atque manifeſtum eſt, eodem caſu maximum fieri momentum potentiale:

$$A ee \,\text{ſin.}\,\Phi^2 \,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{2Beu}{f} \,\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff} \,\text{coſ.}\,\Phi^3,$$

quod ergo vt fiat maximum, neceſſe eſt, vt differentiatione inſtituta ſit

$$2Aee \,\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi^2 - Aee \,\text{ſin.}\,\Phi^3 - \frac{2Beu}{f} \,\text{coſ.}\,\Phi^3 + \frac{4Beu}{f} \,\text{ſin.}\,\Phi^2 \,\text{coſ.}\,\Phi$$
$$- \frac{3Cuu}{ff} \,\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi^2 = 0,$$

ſeu diuiſo per coſ. Φ^3 ob $\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = \text{tang.}\,\Phi$, erit

$$Aee \,\text{tang.}\,\Phi^3 - \frac{4Beu}{f} \,\text{tang.}\,\Phi^2 - 2Aee \,\text{tang.}\,\Phi + \frac{2Beu}{f} = 0$$
$$+ \frac{3Cuu}{ff} \,\text{tang.}\,\Phi.$$

Pendet ergo inuentio anguli Φ a reſolutione huius aequationis cubicae, de qua tamen animaduertendum eſt, valorem inde erutum non conuenire, niſi ſit $e \,\text{ſin.}\,\Phi > u \,\text{coſ.}\,\Phi$, ſeu $\text{tang.}\,\Phi > \frac{u}{e}$. Quare ſi aequatio cubica plures habeat radices, ex iis ea tantum locum habere poteſt, quae praebet $\text{tang.}\,\Phi > \frac{u}{e}$. At ob A, B, C, quantitates poſitiuas, trium aequationis radicum duae erunt affirmatiuae, ac tertia negatiua; quae hinc excluditur: atque ſi neutra affirmatiuarum fuerit maior quam $\frac{u}{e}$, indicio id erit, momentum continuo creſcere, creſcente angulo Φ, ideoque fore maximum, ſi capiatur $\text{tang.}\,\Phi = \frac{u}{e}$: quo caſu momentum actionis erit $= \left(\frac{A}{f} - \frac{2B}{ff} + \frac{C}{f^3}\right) u^3 \,\text{coſ.}\,\Phi^3$ $= \left(\frac{A}{f} - \frac{2B}{ff} + \frac{C}{f^3}\right) \frac{e^3 u^3}{(ee+uu)\sqrt{(ee+uu)}}$. Videndum ergo eſt, vtrum minor valor pro tang. Φ ex aequatione cubica inuentus maius producat momentum actionis.

At

At contemplemur nunc alteram conditionem, qua quaeritur celeritas u, vt momentum actionis fiat maximum, pro qua angulum Φ tanquam iam cognitum ſpectemus, atque reperietur.

$\frac{Aee}{f}$ ſin.Φ^2 coſ.Φ $-$ $\frac{4Beu}{ff}$ ſin.Φ coſ.Φ^2 $+$ $\frac{3Cuu}{f^3}$coſ.$\Phi^3 = 0$, ſiue Aeetang.$\Phi^2 - \frac{4Beu}{f}$ tang.Φ $+ \frac{3Cuu}{ff} = 0$,

atque haec aequatio cum praecedente aequatione cubica coniuncta determinabit vtrumque valorem quaeſitum Φ et u. Verum ſi haec aequatio per tang. Φ multiplicata ab illa auferatur, remanebit: $- 2Aee$ tang. $\Phi + \frac{2Beu}{f} = 0$, ſeu tang. $\Phi = \frac{Bu}{Aef}$. qui ergo valor ſcopo conueniet, dummodo ſit maior quam $\frac{u}{e}$, hoc eſt, ſi fuerit $B > Af$. At cum ſit $B = \int vttdt$, et f ſit maximus valor ipſius t, erit $B < f\int vtdt$, hoc eſt $B < fA$; ideoque valor tang. $\Phi = \frac{Bu}{Aef}$ locum habere nequit, neque ergo vtrique aequationi ſimul, naturae quaeſtionis conuenienter, ſatisfieri poteſt. Quod vt clarius perſpiciatur, ponamus tang. $\Phi = \frac{nu}{e}$, vbi requiritur, vt ſit $n > 1$, eritque coſ. $\Phi = \frac{e}{\sqrt{(ee+nnuu)}}$, et momentum actionis erit

$$\left(\frac{Ann}{f} - \frac{2Bn}{ff} + \frac{C}{f^3}\right)\frac{e^3u^2}{(ee+nnuu)^{\frac{3}{2}}}$$

vnde primum patet, creſcente u, hanc quantitatem continuo creſcere, neque maiorem fieri poſſe, quam ſi cele-

 ritas

ritas alae u ponatur infinita : ex quo ſequitur, hanc celeritatem u tam magnam ſtatui debere, quam circumſtantiae id permittant. Hinc autem ſi celeritas u fuerit determinata, et pro cognita aſſumatur, angulus Φ ex ſuperiori aequatione definietur, vt momentum actionis fiat maximum. Ad hoc ſi ponamus breuitatis gratia;

$$B = \beta A f, \text{ et } C = \gamma B f = \beta \gamma A f f,$$

vti nouimus eſſe β et γ numeros vnitate minores, aequatio illa cubica, ex qua angulus Φ definiri debet, hanc formam induet,

$$ee \,\text{tang.}\, \Phi^3 - 4\beta e u \,\text{tang.}\, \Phi^2 \left.\begin{matrix} -2ee \\ +3\beta\gamma uu \end{matrix}\right\} \text{tang.}\, \Phi + 2\beta e u = 0,$$

ac poſito $u = me$, erit

$$\text{tang.}\, \Phi^3 - 4\beta m \,\text{tang.}\, \Phi^2 \left.\begin{matrix} -2 \\ +3\beta\gamma m^2 \end{matrix}\right\} \text{tang.}\, \Phi + 2\beta m = 0,$$

vbi notandum eſt eſſe debere tang. $\Phi > m$.

Quodſi autem angulus Φ fuerit datus, celeritas u ita definiri poteſt, vt momentum actionis fiat maximum, quod fiet per hanc aequationem quadraticam,

$$\frac{3Cuu}{ff} - \frac{4Beu}{f} \,\text{tang.}\, \Phi + Aee \,\text{tang.}\, \Phi^2 = 0,$$

ſeu $3\beta\gamma mm - 4\beta m \,\text{tang.}\, \Phi + \text{tang.}\, \Phi^2 = 0$,

poſito vt ante $u = me$: vnde valor ipſius m eruitur

$$m = \frac{2\beta \,\text{tang.}\, \Phi \pm \text{tang.}\, \Phi \sqrt{(4\beta\beta - 3\beta\gamma)}}{3\beta\gamma}$$

ſeu $m = \frac{2\beta - \sqrt{(4\beta\beta - 3\beta\gamma)}}{3\beta\gamma}$ tang. Φ. at debet eſſe $m <$ tang. Φ. Reſtitutis pro m, β, γ valoribus aſſumtis, habebitur $\frac{u}{e} = \frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f \,\text{tang.}\, \Phi$,

qui

qui valor, ſi fuerit realis et minor quam tang. Φ, ſubſtitutus in expreſſione momenti actionis:

$$\frac{u}{f}\left(Aee\ \text{tang.}\Phi^2 - \frac{2Beu}{f}\ \text{tang.}\Phi + \frac{Cuu}{ff}\right)\text{cof.}\Phi^3$$

ipſi conciliabit maximum valorem, qui erit

$$\frac{2e^3\ \text{ſin.}\Phi^3}{27CC}\left[9ABC - 8B^3 + (4BB-3AC)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Sin autem valor inuentus ipſius $\frac{u}{e}$ fuerit vel imaginarius, vel maior quam tang. Φ. inde colligitur momentum actionis maius fieri non poſſe, quam ſi ſtatuatur $\frac{u}{e} =$ tang. Φ. quo caſu momentum actionis erit $= \frac{e^3\ \text{ſin.}\Phi^3}{f^3}(Aff - 2Bf + C)$. Vnde ex vtroque caſu iterum colligitur momentum actionis ratione anguli Φ eo fieri maius, quo maior capiatur angulus Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

39. Si ergo angulus Φ, quo axis ad planum alae eſt inclinatus, detur, ex eo celeritas alae u definiri poteſt, qua eius extremitas ab axe interuallo $= f$ diſtans gyrari debet, vt momentum actionis fiat maximum. Statui ſcilicet debet $\frac{u}{e} = \frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f$ tang. Φ, ſiquidem prodeat $\frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f < 1$. Sin autem ſit iſta quantitas vel vnitate maior vel adeo imaginaria, tum maxime conueniet ponere $\frac{u}{e} =$ tang. Φ. Semper igitur eſſe debet celeritas gyratoria alae tangenti anguli Φ proportionalis.

COROLL. 2.

40. Vt appareat, quomodo valor pro $\frac{u}{e}$ inuentus plerumque ſit comparatus, ponamus eſſe $v = at^{n-1}$,

eritque area alae totius $\int v dt = \frac{\alpha}{n} f^n$, quae ponatur $= \Delta$; tum erit

$$A = \int vtdt = \frac{\alpha}{n+1} f^{n+1} = \frac{n}{n+1} \Delta f$$

$$B = \int vttdt = \frac{\alpha}{n+2} f^{n+2} = \frac{n}{n+2} \Delta ff$$

$$C = \int vt^3 dt = \frac{\alpha}{n+3} f^{n+3} = \frac{n}{n+3} \Delta f^3,$$

Atque hinc prodibit momentum actionis

$$n \Delta u \left(\frac{ee}{n+1} \text{tang.}\, \Phi^2 - \frac{2eu}{n+2} \text{tang.}\, \Phi + \frac{uu}{n+3} \right) \text{cof.}\, \Phi^2,$$

quod maximum euadet, ſi capiatur

$$\frac{u}{e} = \frac{n+3}{3(n+2)} \left(2 - \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}} \right) \text{tang.}\, \Phi;$$

vnde ſemper fit $\frac{u}{e} < \text{tang.}\, \Phi$: hincque maximum momentum erit

$$\tfrac{2}{27} \Delta e^3 \text{ſin.}\, \Phi^3 . \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)^2} \left(nn + 4n + 12 + n(n+4) \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}} \right);$$

ſi ergo fuerit

$n = 1$ erit $\frac{u}{e} = \frac{8 - \sqrt{10}}{9} \text{tang.}\, \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{ſin.}\, \Phi^3 . 1{,}5521$

$n = 2$ erit $\frac{u}{e} = \frac{5 - \sqrt{5}}{6} \text{tang.}\, \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{ſin.}\, \Phi^3 . 1{,}809$

$n = 3$ erit $\frac{u}{e} = \frac{8 - \sqrt{14}}{10} \text{tang.}\, \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{ſin.}\, \Phi^3 . 1{,}895$

$n = \infty$ erit $\frac{u}{e} = \frac{1}{3} \text{tang.}\, \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{ſin.}\, \Phi^3 . 2{,}000$

COROLL. 3.

41. Quo maior igitur eſt exponens n, eo maius prodit momentum actionis, atque valor $\frac{u}{e}$ eo propius accedet ad $\frac{1}{3}$ tang. Φ: vnde colligimus, pro data area alae $= \Delta$ eo maius futurum eſſe momentum actionis, quo magis ala ab axe recedendo dilatetur, ſeu quo arctior fuerit

fuerit axem verſus. Ceterum apparet, quicunque valor tribuatur exponenti n, ſemper prodire $\frac{u}{e} < \text{tang.}\ \Phi$, vti conditio quaeſtionis poſtulat.

COROLL. 4.

42. Sin autem quaeratur, quisnam angulus Φ ſit maxime idoneus ad momentum actionis plurimum augendum, reſpondere oportet, quo magis hic angulus ad rectum accedat, eo maius prodire momentum actionis. Ideoque conueniet, axem tantum non perpendiculariter ad planum alae conſtituere, vt ſit fere $\Phi = 90^\circ$; tum autem ob tang. $\Phi = \infty$, alam maxima celeritate circa axem gyrari oportebit. Vnde patet, non angulum $54^\circ, 45'$ eſſe aptiſſimum, ſed potius angulum rectum hac praerogatiua gaudere.

SCHOLION.

43. Concluſio haec, qua angulum rectum aptiſſimum inuenimus ad momentum actionis maximum producendum, non ſolum valde paradoxa videtur, ſed etiam experientiae maxime contraria. Quanquam enim experientia teſtatur, angulum inclinationis axis ad alas, ſi maior ſtatuatur quam $54^\circ, 45'$, maiorem producere effectum, hicque angulus interdum ad 72° auctus optimo cum ſucceſſu reperitur, tamen dubium eſt nullum, quin effectus magnopere diminuatur, ſi iſte angulus adhuc maior conſtitueretur; atque adeo manifeſtum eſt, ſi ad 90° vsque augeretur, vim venti ad alam conuertendam plane euaneſcere, ita vt hoc caſu machina ne minimo quidem oneri eleuando par eſſet. Interim ſi perpendamus

mus tamen angulo hoc tantum non ad 90° aucto celeritatem gyratoriam quoque maximam eſſe debere, etſi hoc caſu vis ipſa mouens eiusque momentum potentiale fere in nihilum abit. Tamen ſemper machinam ad onus ſuperandum ita applicari poſſe nouimus, vt vis iſta minima onus eleuare valeat, ſimulque intelligitur, celeritatem oneris ad alae celeritatem rationem quam minimam habere debere; veruntamen quoniam celeritas alarum eſt quaſi infinita, celeritas oneris inde prodire poteſt ſatis magna, ac reuera maior erit, quam ſi angulus Φ minor eſſet aſſumtus. Interim tamen fateri conuenit, ſucceſſum in praxi longe alium deprehenſum iri, atque theoria hic innuit, cuius diſſenſus cauſa in ſola frictione eſt poſita; ita vt certum ſit, ſi machinam ab omni frictione liberare liceret, ſummum effectum iure expectari poſſe, ſi angulus inclinationis axis ad planum alarum propemodum rectus ſtatuatur. Verum frictio impedit hoc caſu, quo minus ab angulo Φ nimis magno effectus per theoriam definitus obtineri queat: ſi enim vis venti ab ala excepta tam fuerit parua, vt frictionem ſuperare nequeat, tum machina ne ad motum quidem excitari poterit, multoque minus vllum effectum producere valebit. Ex quo manifeſtum eſt, frictionis rationem in primis haberi debere, ſi eam alarum diſpoſitionem ac motum definire velimus, vnde maximus effectus proficiſcatur, id quod ſequente problemate diligentius examinabo.

PROBLEMA VIII.

44. *Data frictione machinae, quae a vi quacunque moueatur, inuenire eam momenti actionis partem, quae*

quae ad effectum, ad quem machina eſt deſtinata, producendum vnice impenditur.

SOLVTIO.

Sit M momentum potentiale vis, a qua machina mouetur, quae vis rotae ſeu vecti applicata concipiatur, cuius celeritas ſit $= u$ in diſtantia $= f$ ab axe motus, eritque $\frac{Mu}{f}$ momentum actionis. Sit porro momentum frictionis $=$ F, ſeu ad frictionem ſuperandam opus ſit tanta vi, cuius momentum eſt $=$ F, vbi nota, quando ſimpliciter de momento loquor, id de momento potentiali eſſe interpretandum, nulla habita ratione ad celeritatem, quacum vis agit. Denique ſit P momentum oneris vel obſtaculi, quod ſuperari debet, et cum motus machinae iam ad vniformitatem fuerit perductus, neceſſe eſt, vt ſit $M - F - P = 0$; nam quamdiu motus machinae acceleratur, acceleratio proportionalis eſt ipſi $M - F - P$: quare ſi nulla amplius acceleratio locum habeat, neceſſe eſt, vt ſit $M - F - P = 0$, ſeu $P = M - F$. Verum ſi momentum oneris P per celeritatem angularem $\frac{u}{f}$ multiplicetur, denotabit $\frac{u}{f}P$ momentum actionis oneris, ſeu onus per motum ſuum multiplicatum, quo ipſo effectus machinae determinatur. Erit ergo effectus machinae $\frac{u}{f}P = \frac{u}{f}(M - F)$, ideoque effectus machinae non producitur a vis mouentis momento actionis toto $\frac{u}{f}M$, ſed ab eius parte $\frac{u}{f}(M - F)$. Quare vt effectus edatur maximus, non ipſius $\frac{u}{f}M$ valor, ſed ipſius $\frac{u}{f}(M - F)$ maximus exiſtere debet. Q. E. I.

 COROLL.

COROLL. 1.

45. In caſu igitur problematis praecedentis, quo erat momentum potentiale venti in alam ibi definitam impingentis $= (A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi^2 - \frac{2Beu}{f}\,\text{tang.}\,\Phi + \frac{Cuu}{ff})\,\text{coſ.}\,\Phi^3$, ſi momentum frictionis machinae ponatur $= F$, quantitas effectus machinae erit

$$\frac{u}{f}\,(A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi^2 - \frac{2Beu}{f}\,\text{tang.}\,\Phi + \frac{Cuu}{ff})\,\text{coſ.}\,\Phi^3 - \frac{Fu}{f}:$$

vbi ad homogeneitatem conſeruandam notari conuenit, ſi ee, et uu denotent altitudines celeritatibus e, et u debitas, vim frictionis per pondus voluminis aeris exponi debere, ex qua momentum reſultans loco F accipi debet.

COROLL. 2.

46. Vt igitur haec machina in motum concitari poſſit, ante omnia requiritur, vt ſit $(A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi^2 - \frac{2Beu}{f}\,\text{tang.}\,\Phi + \frac{Cuu}{ff})\,\text{coſ.}\,\Phi^3 > F$, vnde iam caſus maximi effectus ante inuentus ſponte excluditur, quoniam illo caſu momentum potentiale vis ſollicitantis fiebat infinite paruum: ſimulque intelligitur, ad id vt machina effectum praeſtare poſſit, angulum Φ non nimis prope ad angulum rectum accedere poſſe, quia alioquin coſ. Φ nimis fieret paruus; neque haec diminutio per augmentationem celeritatis u compenſari poteſt, quia eſſe debet $\frac{u}{e} < \text{tang.}\,\Phi$.

COROLL. 3.

47. Quo igitur effectus machinae reddatur maximus, maximum efficere oportet valorem huius formulae:

$$\frac{u}{f}\,(A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi^2 - \frac{2Beu}{f}\,\text{tang.}\,\Phi + \frac{Cuu}{ff})\,\text{coſ.}\,\Phi^3 - \frac{Fu}{f}$$

Ponatur $u = efz\,\text{tang.}\,\Phi$, atque *maximum* eſſe debet $e^3\,\text{ſin.}\,\Phi^2(Az - 2Bzz + Cz^3) - Fez\,\text{tang.}\,\Phi$.

COROLL.

COROLL. 4.

48. Quaeratur primo valor ipſius z, angulo Φ tanquam cognito ſpectato, atque peruenietur ad hanc aequationem: $ee \sin.\Phi^2 \cos.\Phi(A - 4Bz + 3Czz) = F$, vnde fit $9CCzz = 12BCz - 3AC + \frac{3CF}{ee \sin.\Phi^2 \cos.\Phi}$; et $3Cz = 2B - \sqrt{(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee \sin.\Phi^2 \cos.\Phi})}$: ideoque $u = \frac{2Bef \tang.\Phi}{3C} - \frac{ef \tang.\Phi}{3C}\sqrt{(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee \sin.\Phi^2 \cos.\Phi})}$. Subſtituenti enim hunc valorem in expreſſione effectus facile patebit, ſigno radicali negationem tribui debere, quia affirmatio minimum produceret effectum.

COROLL. 5.

49. Si iam valor ipſius z pro cognito habeatur, et angulus Φ quaeratur ad effectum maximum producendum, peruenietur ad hanc aequationem:

$$3ee \sin.\Phi^2 \cos.\Phi(A - 2Bz + Czz) = \frac{F}{\cos.\Phi^2},$$

quae cum aequatione ante inuenta comparata eliminando F, dabit:

$\cos.\Phi^2 = \frac{A - 4Bz + 3Czz}{3(A - 2Bz + Czz)}$; et $\sin.\Phi^2 = \frac{2(A - Bz)}{3(A - 2Bz + Czz)}$, quibus valoribus ſubſtitutis tandem reperietur

$$F = \frac{2ee(A - Bz)(A - 4Bz + 3Czz)\sqrt{(A - 4Bz + 3Czz)}}{3(A - 2Bz + Czz)\sqrt{3(A - 2Bz + Czz)}},$$

ex qua valor ipſius z erui debet, quod quidem reſolutionem aequationis octaui ordinis poſtulat.

COROLL. 6.

50. Inuento autem hinc valore ipſius z, ex anterioribus formulis colligitur angulus Φ: ſicque tam alae ad

axem inclinatio, quam celeritas gyrationis obtinebitur, vnde maximus effectus proficiſcatur. Quod ſi autem illa aequatio octaui ordinis plures valores reales pro z exhibeat, vt ex iis recte eligatur, notandum eſt; primo eſſe debere $\frac{u}{e} < \text{tang.}\Phi$, ſeu $fz < 1$; praeterea vero eſſe debere $ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,(A - 2Bz + Czz) > F$, ideoque $F < \frac{2ee(A - Bz)\sqrt{(A - 4Bz + 3Czz)}}{3\sqrt{3}(A - 2Bz + Czz)}$:

vnde neceſſe eſt, ſubſtituto pro F valore ſupra inuento, vt ſit $\frac{A - 4Bz + 3Czz}{A - 2Bz + Czz} < 1$, ſeu $B > Cz$;

ergo debet eſſe tam $z < \frac{B}{C}$, quam $z < \frac{1}{f}$. Cum autem ſit $C < Bf$, ſufficit, vt ſit $z < \frac{1}{f}$, cum inde multo magis fiat $z < \frac{B}{C}$.

COROLL. 7.

51. Quod ſi angulus Φ tanquam cognitus aſſumatur, atque celeritas motus gyratorii u ita definiatur, vt effectus fiat maximus, erit, vti vidimus:

$$u = \frac{2Bef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C} - \frac{ef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C}\sqrt{\left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi}\right)};$$

vnde patet, ob frictionem F hanc celeritatem minorem eſſe, quam ſi frictio eſſet nulla. Frictio ergo duplicem ob cauſam effectum machinae diminuit: primum enim ipſum momentum actionis $\frac{u}{f}M$ minus euadit; deinde inſuper ab eo terminus $\frac{u}{f}F$ ſubtrahi debet, vt effectus $\frac{u}{f}(M-F)$ obtineatur.

SCHOLION. 1.

52. Si iſte valor ipſius u angulo Φ reſpondens in

in expreſſione effectus machinae $\frac{u}{f}(M - F)$ ſubſtituatur, reperitur iſte effectus:

$$\frac{2e^3 \, \text{ſin.}\Phi^3}{27\,CC}\Big[9ABC - 8B^3 - \frac{9BCF}{ee\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi} + \Big(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big],$$

vnde iam manifeſtum eſt, angulum Φ non nimis magnum accipi poſſe, vt iſte effectus fiat maximus; quia alioquin effectus fieret minor, atque adeo euaneſceret. Primum autem ne valor ipſius u fiat negatiuus, neceſſe eſt, vt ſit $A > \frac{F}{ee\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi}$, ſeu ſin. Φ^2 coſ. $\Phi > \frac{F}{Aee}$: Deinde ſi breuitatis gratia ponatur $\sqrt{\left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi}\right)} = Q$, vt ſit $u = \frac{ef\,\text{tang.}\Phi}{3C}(2B - Q)$, erit expreſſio, quantitatem effectus denotans:

$$\frac{2e^3\,\text{ſin.}\Phi^3}{27\,CC}(2B - Q)^2(B + Q),$$

qui primum eſt $= 0$, ſi ſin. $\Phi = 0$; deinde iterum euaneſcit, ſi $2B = Q$, ſeu ſin. Φ^2 coſ. $\Phi = \frac{F}{Aee}$: vnde pro effectu maximo obtinendo angulus Φ minor eſſe debet, quam is, qui ex aequatione ſin. Φ^2 coſ. $\Phi = \frac{F}{Aee}$ oritur. Verum hic notandum eſt, maximum valorem ipſius ſin. Φ^2 coſ. Φ eſſe $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, ideoque niſi ſit $\frac{F}{Aee} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ſeu niſi momentum frictionis F minus fuerit, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}}Aee$, machinam ne quidem moueri poſſe; vnde celeritas venti minima e cognoſcitur, quae primum machinae motum imprimere valet, quae debita altitudini $ee = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F}{A}$. Quare niſi venti celeritas fuerit maior, machina in quiete perſiſtit. At ſi celeritas venti ſatis fuerit magna, vt ſit $ee > \frac{3\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{F}{A}$, erit quoque $\frac{F}{Aee} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$: hincque duobus

bus caſibus euenire poterit, vt fiat ſin. Φ^2 coſ. $\Phi = \frac{F}{Aee}$, quorum altero eſt $\Phi < 54^\circ, 45'$, altero $\Phi > 54^\circ, 45'$: caſu enim $\Phi = 54^\circ, 45'$ fit ſin. Φ^2 coſ. $\Phi = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Poſt caſum ergo $\Phi = 0$, duo inſuper caſus dantur, quibus effectus machinae euaneſcit, qui ſint $\Phi = 54^\circ, 45 - \mu$, et $\Phi = 54^\circ, 45' + \nu$. et citra quos limites continetur conditio ſin. Φ^2 coſ. $\Phi > \frac{F}{Aee}$: ex quo intelligitur, machinam non commoueri poſſe, niſi angulus Φ intra limites $54^\circ, 45' - \mu$, et $54^\circ, 45' + \nu$ contineatur. Quo circa etiam intra hos limites quaeri debet is angulus Φ, qui maximum effectum producit: manifeſtum autem eſt, pro qualibet venti celeritate peculiarem angulum Φ prodire, et quidem pro minimo vento, qui machinae impellendae par eſt, inuentum iri $\Phi = 54^\circ, 45'$; ex quo ſequitur, vt machina etiam a vento maxime debili commoueri queat, hunc angulum eſſe aptiſſimum. Quoniam enim pro quouis venti celeritatis gradu angulum Φ immutare non licet, magis expedit, cum ita ſtatuere, vt machina etiam a minimo vento impulſa effectum edat, quam eius effectum pro fortiore vento ita augere, vt tum a vento leniori plane commoueri nequeat. Quod ſi autem ventum nimis debilem non curemus, machinaque ita inſtruenda ſit, vt a vento ſatis forti, qui expreſſionem $\frac{F}{Aee}$ iam notabiliter minorem praebeat, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, impulſa maximum producat effectum, tum angulum Φ vna cum celeritate *u* ex aequationibus ſupra inuentis determinari oportet.

SCHOLION. 2

53. Scilicet cum fuerit $\frac{F}{Aee} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ponatur eius valor

valor $\frac{F}{Aee} = \frac{vn}{3\sqrt{3}}$, ita vt ſit $m < 1$, et quaeratur valor ipſius z ex hac aequatione $m = \frac{(A - Bz)(A - 4Bz + 3Czz)^{\frac{3}{2}}}{A(A - 2Bz + Czz)^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{A - Bz}{A}\left(\frac{A - 4Bz + 3Czz}{A - 2Bz + Czz}\right)^{\frac{3}{2}}$, cuius aequationis reſolutio cum ſit difficillima, tribuantur ipſi z ſucceſſiue plures valores, ex quibus ſtatim apparebit, quinam valorem producat ipſi m proxime aequalem; quo cognito facile is valor ipſius z eruetur, qui aequationi huic exactius conueniat. Inuento autem valore hoc z, inclinatio axis ad alam Φ elicietur ex alterutra harum formularum:

$\text{ſin.}\,\Phi^2 = \frac{2(A - Bz)}{3(A - 2Bz + Czz)}$; vel $\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{A - 4Bz + 3Czz}{3(A - 2Bz + Czz)}$, eritque tum celeritas $u = efz\,\text{tang.}\,\Phi$. Ad hanc operationem oſtendendam ponamus pro alae figura $v = \alpha t^{n-1}$, ſitque area alae $= \Delta = \frac{\alpha}{n} f^n$, erit:

$A = \frac{n}{n+1}\Delta f$, $B = \frac{n}{n+2}\Delta ff$, et $C = \frac{n}{n+3}\Delta f^3$, ergo $\frac{(n+1)F}{n\Delta eef} = \frac{2m}{3\sqrt{3}}$. Ponatur autem $z = \frac{x}{f}$, vt ſit $u = ex\,\text{tang.}\,\Phi$, et $x < 1$;

erit $\text{ſin.}\,\Phi^2 = \frac{2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2}\right)}{3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3}\right)}$; et $\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3}\right)}$;

atque valorem ipſius x erui oportet ex hac aequatione

$$m = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ponamus exempli cauſa $n = 1$, vt figura alae ſit rectangularis, vti vulgo fieri ſolet, cuius area ſit $= \Delta$, erit $m = \frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$; et $m = \frac{3 - 2x}{3}\left(\frac{6 - 16x + 9xx}{6 - 8x + 3xx}\right)^{\frac{3}{2}}$; porroque

ſin. Φ^2

$\text{ſin.}\, \Phi^2 = \frac{12 - 8x}{18 - 24x + 9xx}$; et coſ. $\Phi^2 = \frac{6 - 16x + 9xx}{18 - 24x + 9xx}$.
Cum eſſe debeat $x < 1$, ponatur $x = \frac{y}{10}$, erit

$$m = \frac{15 - y}{15} \left(\frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy} \right)^{\frac{3}{2}}; \text{ et coſ.}\, \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy}.$$

Ponantur iam pro y ſucceſſiue numeri 0, 1, 2, 3 etc. et valores reſultantes in ſequenti tabula erunt:

y	$m = \frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$	coſ. Φ^2	ang. Φ	Celer. ang. $\frac{u}{e}$
$y = 0$	$m = 1,00000$	coſ. $\Phi^2 = \frac{1}{3}$	$\Phi = 54°, 45'$	$\frac{u}{e} = 0,0000$
$y = 1$	$m = 0,74242$	coſ. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{449}{523}$	$\Phi = 57, 40$	$\frac{u}{e} = 0,1580$
$y = 2$	$m = 0,50661$	coſ. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{316}{452}$	$\Phi = 61, 8$	$\frac{u}{e} = 0,3628$
$y = 3$	$m = 0,29944$	coſ. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{201}{387}$	$\Phi = 65, 25$	$\frac{u}{e} = 0,6558$
$y = 4$	$m = 0,13093$	coſ. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{104}{328}$	$\Phi = 71, 2$	$\frac{u}{e} = 1,1639$
$y = 5$	$m = 0,01827$	coſ. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{275}$	$\Phi = 79, 59$	$\frac{u}{e} = 2,8308$

Si vlterius progrediendo ponatur $y = 6$, valor ipſius m fit imaginarius, neque enim valor ipſius x ſuperare poteſt hunc limitem $\frac{8 - \sqrt{10}}{9}$, ſeu y hunc 5,3752; quo caſu fit $\Phi = 90°$, et $\frac{u}{e} = \infty$, atque $m = 0$, pro frictione euaneſcente. Patet ergo, quo minor fiat valor ipſius m, eo magis angulum Φ ſuperare limitem 54°, 45′, eoque maiorem fore motum gyratorium. Ita ſi frictio tanta eſſet, vt valor expreſſionis $\frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$ fieret $= \frac{1}{2}$, tum inclinatio axis ad alam maxime idonea foret 61°, 8′ et celeritas $u = 0,3628\, e$, ſeu propemodum $u = \frac{1}{3} e$. Intelligitur hinc etiam, quo maior fuerit alae ſuperficies Δ, ſimulque eius longitudo f quia hinc valor ipſius m eo minor prodit, eo maiorem eſſe debere angulum, quem axis cum alis conſtituit, eoque etiam velociorem fieri motum

motum gyratorium alarum. Quod ſi plures alae ſimul axi ſint affixae, ſingulaeque ad eum aequaliter inclinatae, facile perſpicitur ad valorem ipſius m obtinendum, expreſſionem $\frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$ inſuper per numerum alarum, diuidi debere, ſiquidem alae ſint inter ſe ſimiles. Ita ſi quatuor alae conſtituantur, quarum quaelibet ſit aequalis illi vni, quam ſumus contemplati, valor ipſius m erit $= \frac{3F\sqrt{3}}{4\Delta eef}$, et ex hoc valore ipſius m tam angulus maxime conueniens ϕ, quo ſingulae alae ad axem ſunt inclinandae, tam celeritas motus u in diſtantia ab axe $= f$, ex eadem tabella cognoſcetur.

PROBLEMA IX.

54. *Si machina inſtructa ſit quatuor alis planis et aequalibus, atque axis a directione venti declinet angulo dato inuenire momentum actionis a vi venti oriundum.*

SOLVTIO.

Sit cuiusque alae longitudo $DF = f$, et extremitatis F celeritas $= u$; figura autem alae exprimatur vt ſupra aequatione inter abſciſſam $DT = t$, et ordinatam $MM = v$, vnde ſit $\int vtdt = A$; $\int vttdt = B$; et $\int vt^3 dt = C$. Tum ſit inclinatio axis ad planum cuiusque alae $= \phi$, et angulus, quem directio venti cum axe conſtituit $= \theta$; celeritas autem venti ſit $= e$. In ſitu autem alarum quocunque ſit pro ala prima angulus $BCK = \eta$; erit hic angulus pro ala ſecunda $= \eta + 90°$, pro tertia $= \eta + 180°$, et pro quarta Fig. 6. Fig. 5.

 $= \eta$

$= \eta + 270°$. Momentum ergo impulſionis venti erit:

pro ala I. $= A e e (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi - \text{ſin.}\theta\, \text{ſin.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)^2\, \text{coſ.}\Phi - \frac{2 B e u}{f} (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi$
$- \text{ſin.}\theta\, \text{ſin.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)\, \text{coſ.}\Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \text{coſ.}\Phi^3$

pro ala II. $= A e e (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi - \text{ſin.}\theta\, \text{coſ.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)^2\, \text{coſ.}\Phi - \frac{2 B e u}{f} (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi$
$- \text{ſin.}\theta\, \text{coſ.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)\, \text{coſ.}\Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \text{coſ.}\Phi^3$

pro ala III. $= A e e (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi + \text{ſin.}\theta\, \text{ſin.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)^2\, \text{coſ.}\Phi - \frac{2 B e u}{f} (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi$
$+ \text{ſin.}\theta\, \text{ſin.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)\, \text{coſ.}\Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \text{coſ.}\Phi^3$

pro ala IV. $= A e e (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi + \text{ſin.}\theta\, \text{coſ.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)^2\, \text{coſ.}\Phi - \frac{2 B e u}{f} (\text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi$
$+ \text{ſin.}\theta\, \text{coſ.}\eta\, \text{coſ.}\Phi)\, \text{coſ.}\Phi^2 + \frac{C u u}{ff} \text{coſ.}\Phi^3$

Quibus in vnam ſummam collectis, erit momentum totale in omnes quatuor alas ſimul exertum

$$A e e (4\, \text{coſ.}\theta^2\, \text{ſin.}\Phi^2 + 2\, \text{ſin.}\theta^2\, \text{coſ.}\Phi^2)\, \text{coſ.}\Phi - \frac{8 B e u}{f} \text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi\, \text{coſ.}\Phi^2 + \frac{4 C u u}{ff} \text{coſ.}\Phi^3$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Verum ne vlla ala vnquam ab aere in parte poſtica percutiatur, vnde motus impediretur, neceſſe eſt, vt ſit $e\, \text{coſ.}\theta\, \text{ſin.}\Phi - e\, \text{ſin.}\theta\, \text{coſ.}\Phi > u\, \text{coſ.}\Phi$, ſeu $\frac{u}{e} < \text{coſ.}\,\theta \times (\text{tang.}\Phi - \text{tang}\,\theta)$; ideoque angulus Φ maior eſſe debet quam angulus θ. Caeterum notatu hic dignum eſt, momentum totum non amplius pendere ab angulo η, ſeu id eundem perpetuo valorem obtinere, in quocunque ſitu alae reſpectu directionis venti verſentur, quoniam termini angulum η inuoluentes ſe mutuo ſuſtulerunt. Q. E. I.

COROLL.

COROLL. 1.

55. Si angulus θ fuerit valde paruus, erit coſ. $\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta\theta$; et coſ. $\theta^2 = 1 - \theta\theta$; ſin $\theta^2 = \theta\theta$: vnde momentum vis venti erit $4\,A\,e\,e\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi - \frac{8\,B\,e\,u}{ſ}\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi^2 + \frac{4\,C\,u\,u}{ſ\,f}\,\text{coſ}\,\Phi^3$ $- 2\,A\,e\,e\,\theta\,\theta(2\,\text{ſin}\,\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)\,\text{coſ.}\Phi + \frac{4\,B\,e\,u}{ſ}\,\theta\,\theta\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2$. Ab obliquitate ergo venti reſpectu axis momentum vis venti augetur quantitate $2\,e\,\theta\,\theta\,\text{coſ.}\Phi[\frac{2\,B\,u}{ſ}\,\text{ſin}\,\Phi\,\text{coſ.}\Phi - A\,e(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)]$, vnde ſi fuerit $\frac{u}{e} > \frac{A\,f(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}{2\,B\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$, vis venti ab obliquitate augetur; ſin autem fuerit $\frac{u}{e} < \frac{A\,f(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}{2\,B\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$, vis venti ab obliquitate diminuitur.

COROLL. 2.

56. Si vis venti ab obliquitate θ augetur, quod euenit, ſi $\frac{u}{e} > \frac{A\,f(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}{2\,B\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$, manifeſtum eſt, hoc augmentum ad certum tantum terminum extendi, vltra quem ſi obliquitas θ augeatur, vis non ſolum iterum decreſcat, ſed etiam prorſus euaneſcat. Dabitur ergo hoc caſu eiusmodi obliquitas, vnde momentum vis venti maximum oriatur. Cum autem eſſe debeat $\frac{u}{e} < \text{tang}\,\Phi$, perſpicuum eſt, hunc caſum locum habere non poſſe, niſi ſit $\text{tang.}\Phi > \frac{A\,f(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ}\,\Phi^2)}{2\,B\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$, hoc eſt, niſi ſit $2\,B\,\text{ſin.}\Phi^2 > 2\,A\,f\,\text{ſin.}\,\Phi^2 - A\,f\,\text{coſ.}\Phi^2$, ſeu $\text{tang.}\,\Phi^2 < \frac{A\,f}{2(A\,f - B)}$. Conditiones ergo, ſub quibus ab obliquitate θ momentum vis venti augetur, ſunt: primo ſi $\text{tang.}\Phi^2 < \frac{A\,f}{2(A\,f - B)}$; deinde vt $\frac{u}{e}$ contineatur intra limites tang.Φ, et $\frac{A\,f(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}{2\,B\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$.

COROLL. 3.

57. Quod ſi hae conditiones locum habeant, obliquitas θ, quae maximum vis augmentum producit, determinabitur per hanc aequationem:

$$-8Aee\,\text{ſin.}\theta\,\text{coſ.}\theta\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi + 4Aee\,\text{ſin.}\theta\,\text{coſ.}\theta\,\text{coſ.}\Phi^3 + \frac{8Beu}{f}\,\text{ſin.}\theta\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi^2 = 0,$$

ſeu

$$-2Ae\,\text{coſ.}\theta\,\text{ſin.}\Phi^2 + Ae\,\text{coſ.}\theta\,\text{coſ.}\Phi^2 + \frac{2Bu}{f}\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi = 0,$$

vnde elicitur: $\text{coſ.}\theta = \frac{2Bu\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{Aef(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}$. Quo valore ſubſtituto, prodibit vis venti momentum maximum:

$$2Aee\,\text{coſ.}\Phi^3 - \frac{8BBuu\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi^3}{Aff(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)} + \frac{4Cuu}{ff}\,\text{coſ.}\Phi^3.$$

EXEMPLVM.

58. Sint ſingulae alae rectangulares, et area cuiusque $= \Delta$: tum vero $Cf = f$, et $Ce = g$, et latitudo Fig. 7. $mm = nn = b$, erit $\Delta = (f-g)b$; $A = \frac{1}{2}b(ff-gg)$; $B = \frac{1}{3}b(f^3-g^3)$; et $C = \frac{1}{4}b(f^4-g^4)$. Conditiones ergo, ſub quibus ab obliquitate venti reſpectu axis θ vis venti augetur, ſunt: Primo $\text{tang.}\Phi^2 < \frac{\frac{1}{2}fb(ff-gg)}{fb(ff-gg) - \frac{2}{3}b(f^3-g^3)}$, ſeu $\text{tang.}\Phi^2 < \frac{3f(f+g)}{2(f-g)(f+2g)}$, tum vero $\frac{u}{e}$ intra hos limites $\text{tang.}\Phi$, et $\frac{3f(f+g)(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}{4(ff+fg+gg)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$ contineri oportet. Deinde vero obliquitas inuenitur

$$\text{coſ.}\theta = \frac{4u(ff+fg+gg)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{3ef(f+g)(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}.$$

Ipſum autem momentum maximum, quod hinc oritur, eſt

Δ coſ.

$$\Delta\,\text{coſ.}\Phi^3\Big(ee(f+g)+\frac{uu}{9ff(2\,\text{ſin.}\Phi^2-\text{coſ.}\Phi^2)}\Big[\frac{2(f-g)^2(ff+4fg+gg)}{f+g}\,\text{ſin.}\Phi^2 - 9(f+g)(ff+gg)\,\text{coſ.}\Phi^2\Big]\Big)$$

quod momentum etiam ita exhiberi poteſt, vt ſit

$$\frac{2ee\,\text{coſ.}\Phi^3}{ff}\Big(Aff+\frac{2Cuu}{ee}-\frac{4BBuu\,\text{ſin.}\Phi^2}{Aee(2\,\text{ſin.}\Phi^2-\text{coſ.}\Phi^2)}\Big).$$

Pro quo iterum angulus Φ ita definiri poteſt, vt id fiat maximum, quod eueniet, ſi Φ definiatur ex hac aequatione:

$$-3\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi^2\Big(Aff+\frac{2Cuu}{ee}-\frac{4BBuu\,\text{ſin.}\Phi^2}{Aee(2\,\text{ſin.}\Phi^2-\text{coſ.}\Phi^2)}\Big)+\frac{8BBuu\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi^4}{Aee(2\,\text{ſin.}\Phi^2-\text{coſ.}\Phi^2)^2}=0$$

ſeu $3Aff+\frac{6Cuu}{ee}-\frac{12BBuu\,\text{ſin.}\Phi^2}{Aee(2\,\text{ſin.}\Phi^2-\text{coſ.}\Phi^2)}=\frac{8BBuu\,\text{coſ.}\Phi^2}{Aee(2\,\text{ſin.}\Phi^2-\text{coſ.}\Phi^2)^2}.$

Ad quam reſoluendam ponatur $2\,\text{ſin.}\Phi^2-\text{coſ.}\Phi^2=z$, erit $\text{ſin.}\Phi^2=\frac{1+z}{3}$; $\text{coſ}\,\Phi^2=\frac{2-z}{3}$, et aequatio induet hanc formam: $3Aff+\frac{6Cuu}{ee}=\frac{4BBuu(1+z)}{Aeez}+\frac{8BBuu(2-z)}{3Aeezz}$,

ſeu $9\frac{AAeeffzz}{uu}+18ACzz=12BBz(1+z)+8BB(2-z)$
$=4BB(4+z+3zz)$,

vnde reperitur:

$$\frac{4B}{z}=-\frac{B}{2}+\surd\Big(\frac{9AAeeff}{uu}+18AC-\frac{47}{4}BB\Big)$$

ſeu $\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\surd\Big(\frac{9AAeeff}{BBuu}+\frac{18AC}{BB}-\frac{47}{4}\Big)$,

quae ſolutio latiſſime patet, et ad omnes alarum figuras extenditur: pro caſu autem huius exempli erit

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\surd\Big(\frac{81eeff(ff-gg)^2}{4uu(f^3-g^3)^2}+\frac{81(ff-gg)(f^4-g^4)}{4(f^3-g^3)^2}-\frac{47}{4}\Big),\text{ vel}$$

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\surd\Big[\frac{81eeff(ff-gg)^2}{uu(f^3-g^3)^2}+\frac{(f-g)^2(34f^4+68f^3g+21ffgg+68fg^3+34g^4)}{(f^3-g^3)^2}\Big]$$

ſi alae ad axem vsque extendantur, vt ſit $g=0$, erit

$\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\surd\big(\frac{81ee}{uu}+34\big)$; et $z=\frac{8}{\surd(\frac{81ee}{uu}+34)-1}$

vnde $\text{ſin.}\Phi^2=\frac{\surd(\frac{81ee}{uu}+34)+7}{3\surd(\frac{81ee}{uu}+34)-3}$, et $\text{coſ.}\Phi^2=\frac{2\surd(\frac{81ee}{uu}+34)-10}{3\surd(\frac{81ee}{uu}+34)-3}$,

 et tang.

et $\text{tang.}\Phi^2 = \frac{\sqrt{(\frac{81ee}{uu} + 34)} + 7}{2\sqrt{(\frac{81ee}{uu} + 34)} - 10} < \frac{3}{2}$; Quare vt hic caſus locum habere poſſit, debet eſſe

$$\sqrt{(\tfrac{81ee}{uu} + 34)} + 7 < 3\sqrt{(\tfrac{81ee}{uu} + 34)} - 15, \text{ ſeu}$$

$$11 < \sqrt{(\tfrac{81ee}{uu} + 34)};$$

hincque $\quad 87 < \frac{81ee}{uu}$, vel $\frac{u}{e} < \sqrt{\frac{81}{87}}$.

Praeterea vero $\frac{u}{e}$ contineri debet intra hos limites: $\text{coſ.}\theta(\text{tang.}\Phi - \text{tang.}\theta)$, et $\frac{3(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}{4\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$.

Sit $\frac{u}{e} = \sqrt{\frac{81}{110}}$, erit $z = \frac{8}{11}$; $\text{ſin.}\Phi = \sqrt{\frac{19}{33}}$; $\text{coſ.}\Phi = \sqrt{\frac{14}{33}}$; $\text{tang.}\Phi = \sqrt{\frac{19}{14}}$. vnde ob $\text{coſ.}\theta = \frac{4u}{3e} \cdot \frac{\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2}$ erit $\text{coſ.}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{133}{55}} = \sqrt{\frac{133}{220}}$; $\text{ſin.}\theta = \sqrt{\frac{87}{220}}$; et $\text{tang.}\theta = \sqrt{\frac{87}{133}}$. Iam videamus, an ſit $\frac{u}{e} < \text{coſ.}\theta(\text{tang.}\Phi - \text{tang.}\theta)$; ſeu an ſit $\sqrt{\frac{81}{110}} < \sqrt{\frac{133}{220}}(\sqrt{\frac{19}{14}} - \sqrt{\frac{87}{133}})$, ſeu $\sqrt{\frac{162}{133}} < \sqrt{\frac{19}{14}} - \sqrt{\frac{87}{133}}$ quod autem non ſuccedit: neque vero etiam aliis valoribus pro $\frac{u}{e}$ aſſumendis his conditionibus ſatisfieri poteſt.

PROBLEMA X.

59. *Determinare figuram alarum aptiſſimam, vt cum ventus ſecundum directionem axis in eas incidit, maxima ab eo excipiatur vis, ſeu vt tum momentum actionis fiat maximum.*

SOLVTIO.

Sit C c axis, ſecundum cuius directionem ventus Fig. 8. impingat celeritate ſua $= e$ in alam C M H H M C, cuius figura non ſit plana, quae tamen a plano axi nor-

normali ſecetur recta C T F, quam inſtar diametri alae conſiderabo; ad quam omnes normales M M, *m m* ſint in ſuperficie alae poſitae, ita vt ſingula elementa M M *m m* ſint plana, ſed diuerſimode ad axem C *c* inclinata: Quanquam enim hoc modo nulla oritur ſuperficies continua, ſed potius infinita multitudo elementorum M M *m m* inter ſe non niſi in diametro C F cohaerentium, tamen etiam in extremitatibus *m*, *m* tam prope ad ſe inuicem accedent, vt ſuperficiem continuam mentiantur, atque etiam practice facillime confici poſſe videntur. Sit igitur longitudo alae C F $= f$, et celeritas gyratoria puncti F $= u$: tum vocetur abſciſſa quaecunque C T $= t$, cui reſpondens ordinata ſit M M $= v$, eritque elementum alae M *m m* M $= v\,dt$, quod per hypotheſin eſt planum, ad quod axis C *c* inclinatus ſit angulo $= \Phi$, quem ergo variabilem aſſumo, ac in quouis loco T ita conſtituo, vt inde maximum momentum reſultet. Hinc ex §. 29 ob $\theta = 0$ erit momentum vis venti in hoc alae elementum M *m m* M $= v\,dt$ ita expreſſum $= v\,t\,dt\,(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{ut}{f}\,\text{coſ.}\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\Phi$: quod ergo vt maximum fiat, angulus Φ conuenienter definiri debet, quod hac aequatione praeſtabitur:

$\text{ſin.}\Phi(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{ut}{f}\,\text{coſ.}\Phi) = 2\,\text{coſ.}\Phi(e\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{ut}{f}\,\text{ſin.}\Phi)$ ſeu $e(\text{ſin.}\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2) = \frac{3ut}{f}\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$, quae praebet

$\text{tang.}\Phi^2 = \frac{3ut}{ef}\,\text{tang.}\,\Phi + 2$, et $\text{tang.}\,\Phi = \frac{3ut}{2ef} + \sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}$; ergo $\text{ſec.}\ \Phi = \sqrt{[3 + \frac{9uutt}{2eeff} + \frac{3ut}{ef}\sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}]}$; hincque $\text{coſ.}\,\Phi =$

$$\frac{1}{\sqrt{[\frac{9uutt}{2eeff} + 3 + \frac{3ut}{ef}\sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}]}}.$$ Hinc

ergo

ergo pro quauis ab axe diſtantia C T $= t$ definitur inclinatio elementi M m m M ad axem, angulus ſcilicet Φ, ſub quo etiam ventus in hoc elementum impinget. Pendet autem determinatio huius anguli Φ praeter abſciſſam C T $= t$, etiam a celeritate puncti F $= u$, ſeu potius a ratione huius celeritatis ad celeritatem venti e. Dummodo ergo haec ratio fuerit conſtans, ſingulis alae elementis hinc aptiſſima inclinatio tribui poterit, vt momentum vis venti in totam alam fiat maximum. Erit autem pro diſtantia ab axe euaneſcente $t = 0$, angulus $\Phi = 54^\circ, 45'$, cum ſit tang. $\Phi = 2$. at pro extremitate $t = f$, erit tang. $\Phi = \frac{3u}{2e} + \sqrt{(\frac{9uu}{4ee} + 2)}$, vnde patet, hunc angulum eo magis ſuperare angulum illum $54^\circ, 45'$, quo maior fuerit ratio $\frac{u}{e}$. Verum ad momentum totum per integrationem inueniendum expedit abſciſſam t per angulum Φ exprimere, quam viciſſim: vnde fiet $t = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2 - 2\,\text{coſ}\,\Phi^2}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}$, et $dt = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{d\Phi(\text{ſin.}\,\Phi^2 + 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2)}{\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi^2}$, atque e ſin. $\Phi - \frac{ut}{f}$ coſ. Φ $= e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{e}{3} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2}{\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{2e}{3\,\text{ſin.}\,\Phi}$; ſicque erit elementum momenti: $\frac{4e^4ff}{81uu} \cdot \frac{v\,d\Phi(\text{ſin.}\,\Phi^4 - 4\,\text{coſ.}\,\Phi^4)}{\text{ſin.}\,\Phi^5\,\text{coſ.}\,\Phi^2}$, quod ita integrari debet, vt poſito $t = 0$, ſeu tang. $\Phi = 2$, euaneſcat; tum vero ponatur $t = f$, ſeu tang. $\Phi = \frac{3u}{2e} + \sqrt{(\frac{9uu}{4ee} + 2)}$; ſicque momentum pro tota ala prodibit, quod deinde per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis vis venti. Cum autem v ſit functio ipſius t, in ea pro t ſubſtitui debet valor $t = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}$. Ita ſi ſit $v = A + Bt + Ctt + Dt^3$ etc. erit:

$v =$

$v = A + \frac{Bef}{3u} \cdot \frac{(\text{ſin.}\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\Phi^2)}{\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi} + \frac{Ce^2f^2}{9uu} \cdot \frac{(\text{ſin.}\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\Phi^2)^2}{\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi^2}$ $+ \frac{De^3f^3}{27u^3} \cdot \frac{(\text{ſin.}\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\Phi^2)^3}{\text{ſin.}\Phi^3\,\text{coſ.}\Phi^3}$ etc. Hinc autem ob $\frac{d\Phi(\text{ſin.}\Phi^4 - 4\,\text{coſ.}\Phi^4)}{\text{ſin.}\Phi^5\,\text{coſ.}\Phi^2} = \frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\,\text{cot.}\Phi^2)$ et $\frac{\text{ſin.}\Phi^2 - 2\,\text{coſ}\,\Phi^2}{\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi} = \text{tang.}\Phi - 2\,\text{cot.}\Phi$ erit momentum totale:

$$+ \frac{4Ae^4ff}{3^4uu}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\,\text{cot.}\Phi^2)$$

$$+ \frac{4Be^5f^3}{3^5u^3}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\,\text{cot.}\Phi^2)(\text{tang.}\Phi - 2\,\text{cot.}\Phi)$$

$$+ \frac{4Ce^6f^4}{3^6u^4}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\,\text{cot.}\Phi^2)(\text{tang.}\Phi - 2\,\text{cot.}\Phi)^2$$

$$+ \frac{4De^7f^5}{3^7u^5}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}(\text{tang.}\Phi^2 - 4\,\text{cot.}\Phi^2)(\text{tang.}\Phi - 2\,\text{cot.}\Phi)^3$$

etc.

Verum ad has integrationes expediendas notandum eſt, eſſe

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{tang.}\Phi^n = \frac{\text{tang.}\Phi^{n-1}}{(n-1)\,\text{ſin.}\Phi^3} - \frac{(n-4)}{n-1}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{tang.}\Phi^{n-2}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{cot.}\Phi^n = -\frac{\text{cot.}\Phi^{n-1}}{(n+2)\,\text{ſin.}\Phi^3} - \frac{(n-1)}{n+2}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{cot.}\Phi^{n-2}$$

quarum formularum ope formulae magis compoſitae continuo ad ſimpliores reducuntur. At pro ſimpliciſſimis eſt

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3} = -\frac{\text{coſ.}\Phi}{2\,\text{ſin.}\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{tang.}\Phi = -\frac{1}{\text{ſin.}\Phi} + \int\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{cot.}\Phi = -\frac{1}{3\,\text{ſin.}\Phi^3}$$

Hinc magis compoſitae prodibunt:

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{tang.}\Phi^2 = \frac{\text{tang.}\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3} - \frac{\text{coſ.}\Phi}{\text{ſin.}\Phi^2} + \int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi} = \frac{1}{\text{coſ.}\Phi} + \int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{cot.}\Phi^2 = -\frac{\text{coſ.}\Phi}{4\,\text{ſin.}\Phi^4} + \frac{\text{coſ.}\Phi}{8\,\text{ſin.}\Phi^2} - \frac{1}{8}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{tang.}\Phi^3 = \frac{\text{ſin.}\Phi}{2\,\text{coſ.}\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{cot.}\Phi^3 = -\frac{\text{coſ.}\Phi^2}{5\,\text{ſin.}\Phi^5} + \frac{2}{15\,\text{ſin.}\Phi^3}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\cdot\text{tang.}\Phi^4 = \frac{1}{3\,\text{coſ.}\Phi^3}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi^3}\text{cot.}\Phi^4 = -\frac{\text{coſ.}\Phi^3}{6\,\text{ſin.}\Phi^6} + \frac{\text{coſ.}\Phi}{8\,\text{ſin.}\Phi^4} - \frac{\text{coſ.}\Phi}{16\,\text{ſin.}\Phi^2} + \frac{1}{16}\int\frac{d\Phi}{\text{ſin.}\Phi}$$

Integrale ergo erit:

$$+\frac{4Ae^4ff}{3^4uu}\left(\frac{1}{coſ.\Phi}(1+\tfrac{1}{2}\cot.\Phi^2+\cot.\Phi^4)+\tfrac{3}{2}\int\frac{d\Phi}{ſin.\Phi}\right)$$
$$+\frac{4Be^5f^3}{3^5u^3}\left(\frac{tang.\Phi}{coſ.\Phi}(\tfrac{1}{3}+\tfrac{22}{5}\cot.\Phi^2+\tfrac{4}{5}\cot.\Phi^4-\tfrac{8}{5}\cot.\Phi^6)-\tfrac{3}{2}\int\frac{d\Phi}{coſ.\Phi}\right.$$
$$+\frac{4Ce^6f^4}{3^6u^4}\left(\frac{tang.\Phi^2}{coſ.\Phi}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{11}{3}\cot.\Phi^2-3\cot.\Phi^4-\tfrac{10}{3}\cot.\Phi^6+\tfrac{8}{3}\cot.\Phi^8)\right.$$
$$\left.-7\int\frac{d\Phi}{ſin.\Phi}\right)$$

vbi huius modi conſtans adiici debet, vt poſito $tang.\Phi = \sqrt{2}$, ſeu $\cot.\Phi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ et $coſ.\Phi = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, integrale euaneſcat. Notandum vero eſt eſſe $\int\frac{d\Phi}{ſin.\Phi} = l\,tang.\tfrac{1}{2}\Phi$ et $\int\frac{d\Phi}{coſ.\Phi} = -l\,tang.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi) = l\,tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$. Q. E. I.

COROLL. 1.

60. Ex quantitate momenti hoc modo inuenta inſuper definiri poſſet ipſa celeritas u, vt momentum actionis fiat maximum, ſed quia hoc modo in calculos intricatiſſimos delaberemur, conſultius videtur, rationem quandam inter celeritates u et e aſſumere, quae experientiae maxime cenſeatur conueniens. Videtur autem ratio $u : e = 1 : 3$ commodiſſima, ita vt celeritas in alarum extremitate ſit minor celeritate venti; quippe quo caſu expreſſiones inuentae ſimpliciſſimae euadunt.

COROLL. 2.

61. Sit igitur $u = \frac{1}{3}e$, et in quauis ab axe diſtantia $= t$ pro inclinatione elementi alae ad axem Φ, erit $tang.\Phi = \frac{t+\sqrt{(tt+8ff)}}{2f}$; vnde in alae extremitate erit inclinatio Φ tanta, vt ſit $tang.\Phi = 2$. Cum

igitur

igitur prope axem ſit tang. $\Phi = \sqrt{2}$, ſeu inclinatio $54^\circ, 45'$, circa extremitatem alarum erit inclinatio $63^\circ, 26'$.

COROLL. 3.

62. Sumta pro alae latitudine v, quae diſtantiae ab axe t conuenit, hac aequatione $v = A + Bt + Ctt$, momentum potentiale vis venti in totam alam calculo ſecundum formulas inuentas euoluto ſequenti modo expreſſum reperietur:

$$0,3233 \cdot \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,2074 \cdot \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,1520 \cdot \tfrac{4}{9} Ceef^4,$$

quae quantitas per $\frac{u}{f}$, ſeu $\frac{e}{3f}$ multiplicata dabit momentum actionis ex tota ala oriundum.

COROLL. 4.

63. Sin autem haec eadem ala eſſet plana, et vbique ad axem eandem inclinationem Φ teneret, atque etiam ponatur $u = \frac{1}{3} e$, tum ex formulis ſupra datis colligetur momentum potentiale vis venti in hanc alam

$$+ A eeff \left(\tfrac{1}{2} \text{tang.} \Phi^2 - \tfrac{2}{9} \text{tang.} \Phi + \tfrac{1}{36} \right) \text{coſ.} \Phi^3$$
$$+ B eef^3 \left(\tfrac{1}{3} \text{tang.} \Phi^2 - \tfrac{1}{6} \text{tang.} \Phi + \tfrac{1}{45} \right) \text{coſ.} \Phi^2$$
$$+ C eef^4 \left(\tfrac{1}{4} \text{tang.} \Phi^2 - \tfrac{2}{15} \text{tang.} \Phi + \tfrac{1}{54} \right) \text{coſ.} \Phi^3$$

COROLL. 5.

64. Quare ſi pro hac ala plana ſtatuatur $\Phi = 54^\circ, 45'$, ſeu tang. $\Phi = \sqrt{2}$, erit momentum eius:

$$0,30846 \cdot \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,19624 \cdot \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,14287 \cdot \tfrac{4}{9} C eef^4;$$

ſin autem inclinatio vbique ſtatuatur $\Phi = 63^\circ, 26'$, ſeu tang. $\Phi = 2$, erit momentum eius:

$$0,31862 \cdot \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,20572 \cdot \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,15130 \; \tfrac{4}{9} Ceef^4.$$

Vtroque ergo caſu momentum eſt minus, quam ſi alae inclinatio variabilis tribuatur.

COROLL. 6.

65. Poſteriori tamen caſu, quo $\Phi = 63°, 26'$ momentum multo propius accedit ad momentum alae, in qua inclinatio Φ ad extremitates continuo augetur; et defectus vix eſt ſenſibilis. Vnde niſi alae inclinatio variabilis tribui queat, expediet eius inclinationem ad axem vbique $63°, 26'$ conſtitui, quam $54°, 45'$, quia hoc modo ad momentum maximum proxime acceditur. Intelligendum autem hoc eſt, ſi ſtatuatur $u = \frac{1}{3}e$; nam ſi celeritas u maior caperetur, tum angulus inclinationis Φ quoque maior euaderet.

PROBLEMA XI.

66. *Alis planis rotam alatam ita inſtruere, vt a vento non ſolum vis maxima excipiatur, ſed etiam effectus machinae, habita frictionis ratione, maximus reddatur.*

SOLVTIO.

Tab. II. Fig. 1. Concipiatur axis plano tabulae perpendiculariter inſiſtere in puncto C, circa quem diſponantur plures alae triangulares, verticibus ſuis in puncto C concurrentes, et quae in planum tabulae orthogonaliter proiectae polygonum regulare repraeſentent, ita vt nihil vacui inter eas relinquatur. Sint nimirum ſingula triangula iſoſcelia G C G proiectiones alarum, cuiusmodi in figura duodecim exhibentur. Sic enim obtinetur, vt quaecunque fuerit alarum inclinatio, ventus in omnes ſimul impingere posſit, neque vlla ala impulſionem venti in aliam impediat.

Quan-

Quando ergo ventus ſecundum directionem axis incidit, omnis aeris copia, quae intra capacitatem polygoni advehitur, in alas impingit, ita vt maior venti copia excipi nequeat, quin alae longiores reddantur. Sit ergo H C H vna ala quaecunque, ad axem ſub dato angulo $= \Phi$ inclinato, quae triangulum iſoſceles G C G ſecet recta C F, ita vt ſemiſſium H C F, H C F alter ſupra planum tabulae cadat, alter infra. Sit iam longitudo huiusmodi alae C F $= f$, baſis H H $= h$, et baſis proiectionis G G $= g$, erit ob ang. F H G $= \Phi$, $g = h\,\text{ſin.}\Phi$, et $h = \frac{g}{\text{ſin.}\Phi}$; Datur enim G G $= g$ ex altitudine C F $= f$ et numero laterum polygoni, vnde h per g exprimi conuenit. Venti celeritas ponatur, vt ante $= e$, et celeritas rotae huius alatae in puncto F $= u$: numerus porro alarum ſit $= n$, erit $\frac{1}{2}g$ tangens arcus $\frac{360}{2n}$ radio exiſtente $= f$, ſeu $\frac{g}{2f} = \text{tang.}\,\frac{1}{n}180^\circ$: ideoque $g = 2f\,\text{tang.}\,\frac{1}{n}180^\circ$. Iam cum ala H C H ſit triangularis, poſita eius abſciſſa quaecunque C T $= t$ et ordinata M M $= v$, erit $v = \frac{h}{f}t$: vnde colligitur pro tota ala:

$A = \int vtdt = \frac{1}{3}ffh$; $B = \int vttdt = \frac{1}{4}f^3h$; $C = \int vt^3dt = \frac{1}{5}f^4h$.

Ex quibus conficitur momentum vis venti vnam alam impingentis $= ffh(\frac{1}{3}ee\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi - \frac{1}{2}eu\,\text{ſin.}\Phi.\text{coſ.}\Phi^2 + \frac{1}{5}uu\,\text{coſ.}\Phi^3)$; vbi notandum eſt, eſſe debere $\frac{u}{e} < \text{tang.}\Phi$. Ponatur ergo $u = ex\,\text{tang.}\Phi$, ita vt ſit $x < 1$, eritque momentum

$eeffh(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi$, ſeu ob $h = \frac{g}{\text{ſin.}\Phi}$

$eeffg(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$.

Hinc momentum vis venti omnes n alas percutientis erit

$neeffg(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$.

Sit nunc momentum frictionis $= \mathrm{F}$; ita vt onus mouendum ſit a momento $neeffg(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}xx)\text{ſin.}\Phi\text{coſ.}\Phi-\mathrm{F}$, quod multiplicatum per $\frac{u}{f} = \frac{ex}{f}\,\text{tang}\,\Phi$ dabit momentum actionis ſeu effectum machinae, qui erit

$$ne^3fgx(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{5}xx)\text{ſin.}\Phi^2 - \tfrac{ex}{f}\,\mathrm{F}\,\text{tang}\,\Phi.$$

Ponatur $\mathrm{F} = \mu\, neeffg$, quia hoc modo vis frictionis commodiſſime ad vim mouentem comparatur, eritque effectus machinae: $ne^3fgx[(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}xx\ \text{ſin}\,\Phi^2-\mu\,\text{tang.}\Phi]$. Quod vt fiat maximum tam x quam angulus Φ definiri poterunt, quod fiet his aequationibus:

$$(\tfrac{1}{3}-x+\tfrac{3}{5}xx)\text{ſin}\,\Phi^2=\mu\,\text{tang.}\Phi,\ \text{et}\ 2(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{5}xx)\text{ſin.}\Phi\text{coſ.}\Phi=\frac{\mu}{\text{coſ.}\Phi^2},$$

vnde elicitur: $x = \frac{15\,\text{ſin.}\Phi^2-\sqrt{15(4-\text{ſin.}\Phi^4)}}{6(1+2\,\text{ſin.}\Phi^2)} = \frac{10(2\,\text{ſin.}\Phi^2-1)}{15\,\text{ſin.}\Phi^2+\sqrt{15(4-\text{ſin}\,\Phi^4)}}$ tum vero angulus Φ per ſequentem aequationem determinatur. $1 = \frac{3\mu}{2\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi^3}[8+\text{ſin.}\Phi^2-\sqrt{15(4-\text{ſin.}\Phi^4)}]$ Vnde ſi angulus Φ fuerit inuentus, erit momentum actionis ſeu totus machinae effectus:

$$\frac{\mu\, ne^3fgx\,\text{ſin.}\Phi(2\,\text{ſin.}\Phi^2-1)}{2\,\text{coſ.}\Phi^3} = \tfrac{1}{3}ne^3fgx.\frac{\text{ſin.}\Phi^3(2\,\text{ſin.}\Phi^2-1)}{8+\text{ſin.}\Phi^2-\sqrt{15(4-\text{ſin.}\Phi^4)}},$$

at celeritas motus rotae in F erit $u = ex\,\text{tang.}\Phi = \frac{10(2\,\text{ſin.}\Phi^2-1)e\,\text{tang.}\Phi}{15\,\text{ſin.}\Phi^2+\sqrt{15(4-\text{ſin.}\Phi^4)}}$. Q. E. I.

COROLL. 1.

67. Patet ergo, angulum Φ ſemper eſſe debere ſemi recto maiorem, ſiquidem machina moueri debeat. Nam ſi $\Phi = 45°$, vel $\text{ſin.}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $x = 0$, $u = 0$, et ipſe machinae effectus $= 0$: qui caſus locum obtinet, ſi $\mu = \frac{1}{6\sqrt{2}}$, hoc eſt, ſi fuerit momentum frictionis $\mathrm{F} = \frac{neeffg}{6\sqrt{2}}$. Niſi ergo fuerit frictio minor, machina commoueri non poterit, ſeu vt motus ſubſequatur, neceſſe eſt, vt ſit $\mu < \frac{1}{6\sqrt{2}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

68. Quia difficile eſt, ex data frictione ſeu valore ipſius μ, angulum Φ inuenire, maxime conducit, pro Φ ſucceſſiue plures valores intra limites $45°$ et $90°$ aſſumere et inde valores ipſius μ prouenientes notare, vt ex huius modi tabula viciſſim pro dato μ valor conveniens anguli Φ colligi poſſit. Qui calculus, quo ob irrationalitatem minus impediatur: ponatur $\text{ſin.}\Phi^2 = \frac{10pp - 6qq}{5pp + 3qq}$, erit $\text{coſ.}\Phi^2 = \frac{9qq - 5pp}{5pp + 3qq}$, et $x = \frac{5(p-q)}{5p-3q}$, et $\frac{u}{e} = x\,\text{tang.}\Phi$; porro $\frac{1}{\mu} = \frac{3(5p-3q)^2}{10pp-6qq} \cdot \frac{1}{\text{coſ.}\Phi^3}$, atque effectus machinae erit $= \frac{1}{2} n e^3 fg \cdot \frac{xx(p+q)}{(5p-3q)} \cdot \text{ſin.}\Phi^3 = \frac{1}{2} n e^3 fg \cdot \frac{1}{5} x^3 \cdot \frac{p+q}{p-q}\,\text{ſin.}\Phi^3$, vbi notandum eſt, $\frac{pp}{qq}$ intra limites 1 et $\frac{9}{5}$ contineri debere.

COROLL. 3.

69. Cum area totius polygoni, in quod rota alata proiicitur, ſit $= \frac{1}{2} nfg$, exhibebit $\frac{1}{2} neefg$ vim venti in aream huius polygoni, ſi celeritate ſua $= e$ in eam directe impingeret, quam ergo vim, cognita venti celeritate, facile definire licet: Sit igitur iſta vis $\frac{1}{2} n e e fg = V$, eritque momentum frictionis $F = 2\mu . Vf$. Atque per eandem vim V effectus machinae ſeu momentum actionis ita definietur, vt ſit $= \frac{\mu x\,\text{ſin.}\Phi(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - 1)}{\text{coſ.}\Phi^3} . Ve$: quo exprimitur onus per celeritatem ſuam multiplicatum. Cum autem ſit $u = ex\,\text{tang.}\Phi$; erit hoc momentum actionis $= \frac{\mu(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - 1)}{\text{coſ.}\Phi^2} . Vu$. Vnde ſi reſiſtentia oneris ſit $= Q$, erit oneris celeritas $= \frac{\mu(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - 1)}{\text{coſ.}\Phi^2} \cdot \frac{Vu}{Q}$, ex quo modus machinam ad onus applicandi concluditur.

TABVLA

TABVLA

pro quauis frictione exhibens angulum inclinationis alarum ad axem rotae, celeritatem rotae et effectum totum ipſius machinae

Momentum Frictionis.	Angul Inclin:	Celeritas rotae in extremit:	Effectus Machinae,	qui etiam hoc modo expr:
0, 235702 V*f*	45°	0, 000000 *e*	0, 000000 V *e*	0, 00000 V *u*,
0, 175837 V*f*	50	0, 127686 *e*	0, 004718 V *e*	0, 036950 V*u*
0, 122871 V*f*	55	0, 281334 *e*	0, 017968 V *e*	0, 063869 V*u*
0, 079653 V*f*	60	0, 469882 *e*	0, 037427 V *e*	0, 079653 V*u*
0, 047001 V*f*	65	0, 711154 *e*	0, 060147 V *e*	0, 084576 V*u*
0, 024370 V*f*	70	1, 042160 *e*	0, 083159 V *e*	0, 079795 V*u*
0, 010362 V*f*	75	1, 550395 *e*	0, 103842 V *e*	0, 066978 V*u*
0, 003084 V*f*	80	2, 499421 *e*	0, 120105 V *e*	0, 048053 V*u*
0, 000386 V*f*	85	5, 208606 *e*	0, 130454 V *e*	0, 025046 V*u*
0, 000000 V*f*	90	∞	0, 134001 V *e*	0, 000000 V*u*

COROLL. 4.

70. Ex hac ergo tabula perſpicitur, ſi momentum frictionis fuerit = 0, 235702 V *f*, vel etiam maius, tum vim venti non parem eſſe machinae ad motum excitandae, etiamſi nulla oneris reſiſtentia ſit ſuperanda. Effectus ergo machinae hoc caſu erit nullus; neque ventus machinam mouere valebit, niſi ſit momentum frictionis F < 0, 235702 V *f*, vel niſi ventus iam tanta moueatur celeritate, vt ſit 0, 235702. ½ *neeffg* > F.

COROLL. 5.

71. Quo autem minor momentum frictionis fuerit pars quantitatis V *f*, eo maior capi debet angulus inclina-

inclinationis Φ, eoque celerior tribuendus erit motus rotae; atque ipſe effectus machinae eo fiet maior: qui tamen limitem o, 134001 Ve nunquam ſuperare poteſt. Vbi notandum eſt, ſi momentum frictionis fuerit $\frac{1}{30}$ Vf, effectum tantum eſſe ſemiſſem, ſin autem momentum frictionis ſit $\frac{1}{15}$ Vf, effectum tantum fore circiter quadrantem illius ſummi effectus.

SCHOLION.

72. Quando momentum frictionis eſt pars notabilis quantitatis Vf, minor tamen quam eius pars quarta, patet, quantum interſit, ſi frictio adhuc vltra diminuatur: ſic ſi momentum frictionis ſit circiter pars ſexta ipſius Vf, effectus machinae erit propemodum $= \frac{1}{300}$ Ve: at ſi frictio eo vſque diminuatur, vt eius momentum ſit $\frac{1}{8}$ Vf, quae eſt leuis diminutio, effectus erit $\frac{1}{57}$ Ve, ideoque fere quadruplo maior, quam caſu praecedente. Data autem frictione, ita vt vltra diminui nequeat, patet, impedimentum inde oriundum eo fore minus, quo maior fuerit area polygoni G F G F etc; et cum etiam aucto radio f diminuatur, manifeſtum eſt, coefficientem quantitatis Vf in prima columna in ratione triplicata radii f diminui, ſicque hoc pacto multo maiorem coefficientem termini Ve in quarta columna obtineri, ideoque effectum machinae iam non mediocriter augeri. Praeterea vero ob auctum V hic effectus in ratione duplicata radii f augebitur. Ex quo maxime expediet, vt ala huiusmodi rotata tanta conficiatur, quantam reliquae circumſtantiae id permittunt. Hoc autem modo

inclinatio alarum ad axem fiet angulus ad rectum multo propius accedens, et celeritas alarum tanto fiet maior. Cum autem quantitas V in ratione duplicata celeritatis venti creſcat, quouis caſu certa venti celeritas potiſſimum eſt ſpectanda, ad quam machina accommodetur, vt hoc flante vento effectum maximum producat. Tum ſi ventus magis intendatur, effectus in triplicata ratione celeritatis venti augebitur, quo contenti eſſe poterimus, etiamſi machina ad hunc ventum non ſit inſtructa. Contra autem flante vento debiliori, effectus in maiori quam triplicata ratione eius celeritatis diminuetur, ex quo, ne effectu machinae ſaepe penitus fruſtremur, conueniet machinam ad minimum fere venti gradum, quo frui oporteat, accommodari.

EXEMPLVM.

73. Ponamus ad machinam quamcunque mouendam alam huiusmodi rotatam adhiberi, cuius radius C F ſit 20 pedum; et frictionem huius machinae tantam eſſe, vt ad eam ſuperandam vi opus ſit 10 librarum in diſtantia 20 pedum ab axe applicanda: et quaeritur maxime idonea diſpoſitio huius rotae alatae.

Erit ergo $f = 20$ ped: et momentum frictionis $F = 20 . 10 = 200$ libr. Sit alarum numerus $n = 12$, erit $g = 40$ tang. $15^{\circ} = 10,717968$ ped: vnde $V = 6 . 20 . 10,717968\, ee$; ſit ee altitudo celeritati venti debita in pedibus expreſſa, atque haec vis V aequabitur ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= 1286,15616\, ee$ ped. cub. ſeu ponderi voluminis aquae $= 1\frac{3}{5}\, ee$ ped. cub:

cub: hoc eſt, ponderi $112\frac{1}{2}ee$ librarum, tribuendo 70 ℔ vni pedi cubico aquae. Machina ergo moueri non poterit, niſi ſit momentum frictionis $200 < 0,235702.20.112\frac{1}{2}ee$, hoc eſt, niſi ſit altitudo celeritati venti debita $ee > \frac{3}{8}$ ped: qua celeritate ſingulis minutis ſecundis percurruntur $4\frac{3}{4}$: ped. Niſi igitur venti celeritas maior ſit, quam $4\frac{3}{4}$ pedum, machina ne quidem ad motum excitari poterit. Diſponamus ergo machinam, ita vt maximum producat effectum, ſi ventus conficiat 10 pedes ſingulis minutis ſecundis, ita vt altitudo celeritati venti debita ſit $ee = 1\frac{3}{5}$ ped: eritque vis $V = 180$ ℔, et $Vf = 3600$: vnde erit momentum frictionis $200 = \frac{1}{18}.Vf = 0,05555\,Vf$. Quo numero ad primam columnam tranſlato, patebit, angulum, quo alae ad axem rotae inclinari debent, eſſe oportere circiter, 64°. Porro reperitur $u = \frac{2}{3}e$, ita vt extremitas alarum hoc vento flante eſſe debeat $6\frac{2}{3}$ ped. in minuto ſecundo, vnde rota alata reuolutionem quamlibet abſoluere debet tempore 19 ſecundorum circiter. Effectus autem machinae colligetur $= 0,054\,Ve = 9\frac{3}{4}$ ℔. 10 ped. Quare ſi oneris reſiſtentia valeat Q libras, eius celeritas erit $= \frac{97\frac{1}{2}}{Q}$ pedum vno minuto ſecundo. Si ergo onus perpendiculariter attolli debeat ope huius machinae, hocque onus ſit 1000 librarum, id ſingulis horis eleuabitur per ſpatium 351 pedum. Vbi notandum eſt, vnum hominem idem onus ſingulis horis per ſpatium $= 180$ pedum attollere poſſe, ſi quidem vis hominis, qua minuto ſecundo per ſpatium 2 pedum progreditur, ſtatuatur

25 libr. ex quo intelligitur a duobus hominibus plus praeſtari poſſe quam ab hac machina, ſi vento 10 pedes minuto ſecundo peragrante impellatur. Verum ſi ventus duplo ſit velocior, machina effectum circiter octuplo maiorem edet, ideoque tantum efficiet, quantum 16 homines: Sed hic tenendum eſt, homines ad hunc effectum producendum nulla frictione impediri; Si enim eidem machinae applicentur, vbi frictionem ſuperare debent, multo minus efficere poſſent. Vnus enim homo eidem machinae innitens pondus 1000 ℔ vnius horae ſpatio tantum ad altitudinem 108 pedum eleuabit, ideoque ventus 10 pedum reuera tantum praeſtat, quantum 3 $\frac{1}{2}$ homines; ventus autem duplo celerior plus quam 28 homines efficiet.

ELEMENTA

ELEMENTA
DOCTRINAE SOLIDORVM.
AVCT. L. EVLERO.

§. 1.

Quemadmodum Geometria in contemplatione figurarum planarum verſatur, et quae de lineis et angulis in ea traduntur, ad eius prolegomena referenda ſunt; ita Stereometria in contemplatione ſolidorum occupatur, et quae ibi de inclinatione planorum angulisque ſolidis explicantur, eius quoque tanquam prolegomena ſunt ſpectanda.

§. 2. Solidum eſt extenſum trium dimenſionum vndique terminatum, perinde atque ſuperficies definitur per extenſum duarum tantum dimenſionum. Duae autem ſolidorum conſtituendae ſunt claſſes, prout eorum ambitus figuris ſiue planis, ſiue conuexis concauisue includitur.

§. 3. Hic eam tantum claſſem ſolidorum, quae vndique figuris planis includuntur, contemplari conſtitui; perinde atque Geometria a figuris rectilineis exorditur; et quemadmodum figurarum rectilinearum in genere plures inſignes proprietates ſunt annotatae; ita ſolidorum huius claſſis non nullas proprietates generales eruere conabor.

§. 4. Quanquam autem Stereometria iam ſatis diligenter elaborata videtur, in eaque praeter theoriam incl-

clinationis planorum et angulorum ſolidorum, formatio plurium ſolidorum ac potiſſimum corporum regularium doceri ſolet; tamen vbique firma huius de ſolidis doctrinae fundamenta deſiderantur, ex quibus huiusmodi ſolidorum natura in genere intelligi poſſit.

§. 5. Solidorum igitur contemplatio ad ambitum eorum dirigi debet: cognito enim ambitu, quo ſolidum vndique includitur, ipſum ſolidum cognoſcitur ſimili modo, quo cuiusque figurae planae indoles ex eius perimetro definiri ſolet.

§. 6. Ad ambitum autem cuiusque ſolidi figuris planis incluſi pertinent 1mo ipſae figurae planae eius ambitum conſtituentes, quae hedrae vocantur; 2do binarum hedrarum ſecundum latera concurſus, quibus termini lineares ſolidi oriuntur: hos terminos, quoniam apud ſcriptores Stereometriae nullum nomen proprium reperio, acies vocabo; 3^tio puncta, in quibus tres pluresue hedrae concurrunt, quae puncta anguli ſolidi appellantur.

§. 7. Triplicis igitur generis termini in quouis ſolido ſunt conſiderandi; ſcilicet 1.) puncta; 2.) lineae, 3.) ſuperficies; vel nominibus ad hoc inſtitutum propriis vtendo. 1.) Anguli ſolidi; 2.) acies; et 3) hedrae. Hisque triplicis generis terminis totum ſolidum determinatur. Figura autem plana duplicis tantum generis terminos habet, quibus determinatur; 1. ſcilicet puncta, ſeu anguli, 2. lineae ſeu latera.

§. 8. Inſtar exempli propoſitum ſit corpus cuneiforme A B C D E F, cuius termini primi generis, ſeu anguli ſolidi ſunt ſex: A, B, C, D, E, F. Termini ſecundi generis lineares, ſeu acies ſunt numero nouem: A B, B C, C D, D A, A E, D E, B F, C F, E F. Termini denique tertii generis, ſeu hedrae ſunt quinque, nimirum: A B C D, A B F E, A D E, C D E F, B C F. Tab. II. Fig. 2.

§. 9. Omnis ergo ſolidorum diuerſitas cum ex numero angulorum ſolidorum, tum ex numero acierum, tum vero ex numero hedrarum naſcitur. Vſitatae autem ſolidorum denominationes ex numero hedrarum peti ſolent, vnde nota ſunt nomina tetraedri, hexaedri, octaedri, dodecaedri et icoſaedri, etſi ea corporibus tantum regularibus tribui ſolent. In genere enim nomine polyedri indicatur corpus quodcunque ſiue regulare, ſiue irregulare, quod certo hedrarum numero includitur.

§. 10. Simili modo ſi diuerſa ſolidorum genera ex numero angulorum ſolidorum definire velimus, eorum nomina erunt tetragonum, pentagonum, hexagonum, heptagonum etc. Atque corpus cuneiforme ante conſideratum hoc modo erit hexagonum appellandum, quod ſecundum hedrarum numerum eſt pentaedrum.

§. 11. Quoniam vero ſolida, quae pari hedrarum numero includuntur, ratione numeri angulorum ſolidorum inter ſe differre poſſunt, ad ea inter ſe diligentius diſtinguenda, conueniet cuiusque denominationem tam a numero hedrarum, quam a numero angulorum ſolidorum petere

petere. Ita ſolidum cuneiforme ante conſideratum vocabitur *pentaedrum hexagonum*; Pyramis triangularis erit *tetraedrum tetragonum*; Priſma triangulare *pentaedrum hexagonum*; Parallelepipedum vero *hexaedrum octogonum* et ita porro.

§. 12. Etſi ergo ad genus figurae planae rectilineae deſignandum ſufficit laterum numerum, quibus includitur, commemoraſſe, quoniam angulorum numerus ſemper eſt aequalis numero laterum; tamen in ſolidis numerus angulorum ſolidorum admodum diſcrepare poteſt a numero hedrarum, vnde vtrumque numerum nominare opus eſt. Sic pyramis quadrangularis aeque includitur quinque hedris, ac priſma triangulare, ſed illa quinque tantum habet angulos ſolidos, dum hoc habet ſex.

§. 13. Ad ſolidorum vero genera conſtituenda ſuperfluum foret praeter hedrarum et angulorum ſolidorum numeros inſuper numerum acierum adiicere, quoniam vti deinceps monſtrabo, acierum numerus ſemper ex numero hedrarum et angulorum ſolidorum determinatur, ita vt, ſi datus fuerit tam numerus hedrarum, quam numerus angulorum ſolidorum, cuiuſque ſolidi inde ſimul numerus acierum ſit cognitus.

§. 14. Vlteriores vero ſolidorum differentiae petendae ſunt cum ex indole hedrarum, ſeu numero laterum, quibus quaeque hedra includitur; tum vero ex indole angulorum ſolidorum, prout quisque vel ex tribus, pluribusue angulis planis fuerit formatus. Angulus enim ſolidus ex paucioribus, quam tribus angulis planis conſtare nequit;

nequit; plures autem quotcunque ad angulum ſolidum conſtituendum concurrere poſſunt, dummodo eorum omnium ſumma fuerit quatuor rectis minor.

§. 15. Datis omnibus hedris, quibus ſolidum quodpiam includitur, ſtatim cognoſcetur numerus omnium laterum cunctas hedras includentium, cui numero aequalis eſt numerus omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris reperiuntur, quia in qualibet hedra numerus angulorum aequalis eſt numero laterum.

§. 16. Deinde etiam ſumma omnium angulorum planorum facile exhiberi poteſt, propterea quod in quaque hedra ſumma omnium eius angulorum ex eiusdem numero laterum definitur. Quotcunque enim laterum fuerit hedra quaepiam, ſumma omnium eius angulorum aequatur, vti conſtat, bis tot angulis rectis, quot ſunt latera, demtis quatuor.

§. 17. Ad ſolidum ergo definiendum, praeter numeros angulorum ſolidorum, acierum ac hedrarum, quae res proprie ad ambitum ſolidi pertinent, commode quoque adhiberi poſſunt, cum numerus omnium laterum, ſeu, qui ei eſt aequalis, numerus omnium angulorum planorum, tum vero etiam ſumma omnium horum angulorum planorum.

§. 18. Ex collatione harum quinque rerum, quas in quouis ſolido conſiderare licet, plures inſignes proprietates ſolidorum generales obtineri poſſunt, quae ſimiles erunt earum proprietatum, quae de figuris planis recti-

lineis in genere proferri ſolent. Maior autem iſtarum rerum, quas in ſolidis ſpectamus, numerus plures etiam proprietates generales ſuppeditabit, quam in figuris planis locum inueniunt.

§. 19. Quas proprietates, cum nemo eorum, qui Stereometriam tractauerunt, fere attigerit, operam dabo, vt ſi non omnes, tamen praecipuas in medium afferam, atque demonſtrationibus confirmem. Quod eo maiorem vtilitatem habiturum videtur, cum ſine harum proprietatum cognitione doctrina ſolidorum neutiquam cum ſucceſſu tractari queat.

§. 20. Eo magis igitur merito mirum videbitur, quod cum prima Geometriae planae elementa iam a tam longo temporis interuallo omni cura ſint elaborata, ac perſpicue expoſita, prima quaſi Stereometriae elementa tantis adhuc tenebris ſint inuoluta, nemoque fuerit inuentus, qui ea in lucem protrahere ſit conatus.

PROPOSITIO I.

§. 21. *In quouis ſolido numerus omnium acierum eſt ſemiſſis numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum eius conſtituentibus reperiuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quaelibet acies in ambitu ſolidi formatur a duobus lateribus duarum hedrarum, et cum inter omnia latera cunctarum hedrarum bina coniuncta ſingulas acies conſtituant,

ſtuant, manifeſtum eſt numerum acierum omnium eſſe ſemiſſem numeri omnium laterum. At numerus omnium laterum aequalis eſt numero omnium angulorum planorum, quia quaeuis hedra tot habet angulos quot latera. Ergo numerus acierum quoque ſemiſſis eſt numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum ſolidi conſtituentibus reperiuntur. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 22. Cum numerus acierum fractus eſſe nequeat, perſpicuum eſt, numerum omnium laterum vel omnium angulorum planorum ſemper parem eſſe debere; huiusque numeri ſemiſſis dabit numerum acierum, quae in ambitu ſolidi deprehenduntur.

COROLL. 2.

§. 23. Si igitur omnes hedrae ambitum ſolidi cuiuspiam conſtituentes fuerint triangula, earum numerus neceſſario erit par; ſi enim numerus harum hedrarum eſſet impar, tum etiam numerus angulorum planorum eſſet impar; quod euenire non poteſt. Idem tenendum eſt de hedris omnibus, quae ſunt polygona imparium laterum; ſcilicet ſi ſingulae hedrae fuerint vel triangula, vel pentagona, vel heptagona, vel etc. earum numerus ſemper debet eſſe par.

COROLL. 3.

§. 24. Si inter hedras ambitum ſolidi cuiuspiam conſtituentes numerus earum, quae ſunt vel tetragonae,

vel hexagonae, vel octogonae, vel polygonae quaecunque paris laterum numeri, fuerit $= m$, numerus vero earum, quae ſunt vel trigonae, vel pentagonae, vel heptagonae, vel polygonae quaecunque imparis laterum numeri $= n$, ita vt numerus omnium hedrarum ſit $= m + n$; tum numerus n debet eſſe par. Quod vero ad numerum m attinet, perinde eſt ſiue ſit par ſiue impar.

COROLL. 4.

§. 25. Si ergo ambitus totius ſolidi conſtet ex a triangulis, b quadrangulis, c pentagonis, d hexagonis, e heptagonis etc. erit numerus omnium hedrarum $= a + b + c + d + e +$ etc. Numerus vero omnium angulorum planorum, ſeu laterum erit $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc. Numerus autem omnium acierum in ambitu ſolidi $= \frac{3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}}{2}$ vnde numerus $a + c + e +$ etc. debet eſſe par.

PROPOSITIO II.

§. 26. *Numerus omnium angulorum planorum vel aequalis eſt vel maior numero omnium hedrarum ter ſumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor eſſe poteſt, quam triplum numeri hedrarum ambitum ſolidi cuiusquam conſtituentium*

DEMONSTRATIO.

Omnes hedrae ſunt vel triangula vel figuras plurium laterum; ſi omnes hedrae ſunt triangula, numerus laterum

terum ſeu angulorum planorum erit triplo maior, quam numerus hedrarum; ſin autem vel omnes vel aliquae hedrae plures tribus habeant angulos, tum etiam numerus angulorum planorum maior erit quam triplum numeri hedrarum. Semper ergo numerus angulorum planorum vel aequalis eſt vel maior numero hedrarum ter ſumto, ipſoque minor nunquam eſſe poteſt. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 27. Si ergo omnes hedrae fuerint triangulares, numerus angulorum planorum aequalis erit triplo numeri hedrarum; ſin autem non omnes hedrae ſint triangulares, ſed figurae plurium laterum, tum numerus angulorum planorum maior erit, quam triplum numeri hedrarum.

COROLL. 2.

§. 28. In ſolido igitur quocunque, ſi numerus hedrarum ponatur $= H$, et numerus acierum $= A$, quia numerus angulorum planorum eſt, $= 2A$, erit vel $2A = 3H$ vel $2A > 3H$. Impoſſibile ergo eſt, vt ſit $2A < 3H$.

COROLL. 3.

§. 29. Retentis his denominationibus nullum datur ſolidum, in quo ſit $A < \frac{3}{2}H$ vel $H > \frac{2}{3}A$. Quanquam autem hinc relatio inter numerum hedrarum et numerum acierum non determinatur, tamen plurimae relationes excluduntur, quae nunquam locum habere poſſunt.

PROPOSITIO. III.

§. 30. *Numerus omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiusque ſolidi exiſtunt vel aequalis eſt vel maior numero angulorum ſolidorum ter ſumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor eſſe poteſt quam triplum numeri angulorum ſolidorum.*

DEMONSTRATIO.

Quilibet angulus ſolidus vel a tribus angulis planis formatur vel a pluribus, pauciores enim quam tres anguli plani angulum ſolidum conſtituere nequeunt. Hinc ſi omnes anguli ſolidi a tribus planis formantur, numerus angulorum planorum triplo maior eſſe debet quam numerus angulorum ſolidorum; ſin autem ad quosdam angulos ſolidos conſtituendos plures anguli plani coniunguntur, numerus angulorum planorum quoque maior erit quam numerus angulorum ſolidorum, minor autem nunquam eſſe poteſt. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 31. Si numerus angulorum ſolidorum ponatur $= S$, numerus vero acierum $= A$ pro ſolido quocunque, quia numerus omnium angulorum planorum eſt $= 2A$, ſemper erit vel $2A = 3S$ vel $2A > 3S$.

COROLL. 2.

§. 32. Fieri ergo nequit, vt vnquam ſit $2A < 3S$, ſeu $A < \frac{3}{2}S$, ſeu $S > \frac{2}{3}A$. Quare ſi praeterea numerus hedra-

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior eſſe poteſt quam $\frac{2}{3}$ A.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni ſolido hedris planis incluſo aggregatum ex numero angulorum ſolidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet ſi ponatur vt hactenus:
numerus angulorum ſolidorum $= S$
numerus acierum - - - - $= A$
numerus hedrarum - - - $= H$
demonſtrandum eſt, eſſe $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonſtrationem firmam adhuc eruere non potuiſſe; interim tamen eius veritas pro omnibus ſolidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoſcetur, ita vt ſequens inductio vicem demonſtrationis gerere queat.

1. Conſideremus ergo primo pyramidem quamcunque ſuper baſi A B C D E F G quotcunque laterum conſtitutam et in apicem H deſinentem. Sit numerus laterum baſis $= m$, totidemque triangula a baſi ad apicem vsque aſſurgent. Includitur ergo haec pyramis $m + 1$ hedris, quarum m ſunt triangula, vna vero polygonum m angulorum ſeu laterum. Erit itaque numerus hedra- Fig. 3.

rum

rum H $=m+1$, atque numerus angulorum ſolidorum pariter eſt $S=m+1$. Deinde numerus omnium angulorum planorum eſt $=3m+m=4m$, vnde numerus acierum erit $A=2m$. Cum igitur ſit $H+S=2m+2$ erit vtique hoc caſu $H+S=A+2$.

Fig. 2. 2. Sit ſolidum cuneiforme a baſi quocunque laterum A B C D in aciem E F deſinens. Sit baſis polygonum m laterum, erit numerus angulorum ſolidorum binario maior ſeu $S=m+2$. Deinde praeter ipſam baſin tot aderunt hedrae, quot latera habet baſis, vnde numerus omnium hedrarum erit $H=m+1$, ex his hedris vna nempe baſis eſt polygonum m laterum, reliquae erunt triangula duabus exceptis, quae eſſe debent quadrilatera, ſuoque concurſu aciem E F conſtituunt; praeter baſin ergo m laterum, habentur $m-2$ triangula et 2 quadrilatera, ex quo numerus omnium laterum ſeu angulorum planorum erit $=m+3(m-2)+2.4=4m+2$, hincque prodit numerus acierum $A=2m+1$. Cum ergo ſit $H+S=2m+3$ erit $H+S=A+2$.

Fig. 4. 3. Sit ſolidum arcae ſeu ciſtae ſimile, intra duas baſes A B C D et E F G H contentum, vtraque autem baſis eundem habeat laterum numerum $=m$, eritque numerus angulorum ſolidorum $S=2m$. Deinde praeter has duas baſes reliquae hedrae erunt quadrilaterae, earumque numerus $=m$, vnde numerus omnium hedrarum erit $H=m+2$. Angulorum autem planorum numerus ob duas hedras m laterum et m hedras quadrilateras erit $=2m+4m=6m$, hincque acierum numerus conclu-

concluditur $A = 3m$. Quare, cum ſit $H + S = 3m + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

4. Habeat denuo ſolidum duas baſes A B C D E, Fig. 5. et F G H, quae autem non eodem gaudeant laterum numero. Sit ergo pro altera baſi A B C D E numerus laterum maior $= m + n$, pro altera vero baſi F G H numerus laterum $= m$, eritque numerus angulorum ſolidorum $= m + n + m$, ſeu $S = 2m + n$. Tum praeter duas baſes tot erunt hedrae, quot latera habet altera baſis, quae maiori laterum numero gaudet, ſcilicet $m + n$, vnde omnium hedrarum numerus eſt $H = m + n + 2$; quarum cum altera baſis habeat latera $m + n$, altera m, inter reliquas vero hedras, quarum numerus eſt $m + n$, tot eſſe debeant quadrilaterae, quot baſis F G H habet latera, nempe m, ceterae vero, quarum numerus eſt n, ſint triangulares, omnium angulorum planorum numerus eſt $= m + n + m + 4m + 3n = 6m + 4n$, erit numerus acierum $A = 3m + 2n$. Cum igitur ſit $H + S = 3m + 2n + 2$, erit iterum $H + S = A + 2$.

5. Sit corpus denuo in duas baſes A B C D et Fig. 6. L M N terminatum, circa medium autem habeat angulos ſolidos E, F, G, H, I, K. Sit numerus laterum baſis A B C D $= m$, baſis L M N $= n$, numerus autem angulorum ſolidorum circa medium ſit $= p$, qui ſit maior, quam m et quam n. Erit ergo numerus omnivm angulorum ſolidorum $S = m + n + p$. Tum ab angulis ſolidis mediis ad baſin A B C D dirigentur hedrae numero $= p$, quarum m erunt quadrilaterae, reliquae

 $p - m$

$p - m$ triangulares; ſimili modo ad alteram baſin LMN dirigentur hedrae quoque numero $= p$, quarum n erunt quadrilaterae, reliquae vero $p - n$ triangulares, ſic cum duabus baſibus numerus omnium hedrarum erit $= 2 + p + p$ ſeu $H = 2p + 2$. Quarum cum vna habeat m latera, alia n latera, et quadrilaterarum numerus ſit $= m + n$, trigonalium $= 2p - m - n$, erit omnium angulorum planorum numerus $= m + n + 4(m + n) + 3(2p - m - n)$ $= 6p + 2m + 2n$, ideoque numerus acierum prodit $A = 3p + m + n$. Quare cum ſit $H + S = 3p + m + n + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

6. Poſitis iisdem atque in caſu praecedente, ſit $m > p$ et $p > n$, erit vt ante numerus angulorum ſolidorum $S = m + n + p$. A baſi autem ABCD iam m hedrae ad angulos ſolidos medios dirigentur, quarum erunt p quadrangulares, et $m - p$ triangulares. Ab angulis autem mediis ad alteram baſin L M N dirigentur p hedrae, quarum erunt n quadrilaterae, et $p - n$ trigonales. Hinc ergo omnium hedrarum numerus erit $= 2 + m + p$ ſeu $H = m + p + 2$, quarum hedrarum vna eſt m laterum, alia n laterum, $p + n$ quadrilaterae, et $m - p + p - n$ ſeu $m - n$ trilaterae. Hanc ob rem omnium angulorum planorum numerus erit $= m + n + 4(p + n) + 3(m - n) = 4p + 4m + 2n$, hincque acierum numerus $A = 2p + 2m + n$. Vnde cum ſit $H + S = 2p + 2m + n$, erit $H + S = A + 2$.

7. Si angulorum ſolidorum mediorum numerus p minor ſit vtroque numero m et n, erit quidem vt ante angu-

angulorum ſolidorum numerus $S = m + n + p$. Sed iam a baſi A B C D ad angulos medios dirigentur hedrae m, ab altera vero baſi hedrae n, et vtrinque erunt p quadrangulares, ex illa vero parte $m - p$, ex hac vero $n - p$ triangulares. Vnde numerus omnium hedrarum erit $= 2 + m + n$ ſeu $H = m + n + 2$: angulorum autem planorum numerus erit $= m + n + 4 . 2 p + 3 (m + n - 2 p) = 2 p + 4 m + 4 n$. Quare acierum numerus prodit $A = p + 2 m + 2 n$; et cum ſit $H + S = 2 m + 2 n + p + 2$, erit $H + S = A + 2$.

8. Etſi haec ſufficere poſſent ad veritatem propoſitionis euincendam, tamen eam praeterea ex corporibus regularibus confirmare lubet. Pro tetraëdro quidem erit numerus hedrarum $H = 4$, quae cum ſint triangulares, erit omnium angulorum planorum numerus $= 12$, ideoque acierum numerus $A = 6$, et quia ſinguli anguli ſolidi ex tribus planis formantur, erit eorum numerus $S = \frac{12}{3} = 4$: hinc $H + S = 8 = A + 2$. Pro hexaëdro eſt $H = 6$, et ob ſingulas hedras quadrilateras angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque acierum numerus $A = 12$: ac dum terni anguli plani vnum ſolidum conſtituunt, erit ſolidorum numerus $S = \frac{24}{3} = 8$, ſicque $H + S = 14 = A + 2$. Pro octaëdro eſt $H = 8$, cuius hedrae cum ſint trilaterae, erit omnium angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque numerus acierum $A = 12$, ac dum quaterni anguli plani vnum ſolidum formant, erit angulorum ſolidorum numerus $S = \frac{24}{4} = 6$, ſicque $H + S = 14 = A + 2$.
Pro dodecaëdro eſt $H = 12$, cuius hedrae cum ſint pentagonae, erit numerus angulorum planorum $= 5 . 12$

 $= 60$

$= 60$, ideoque numerus acierum $A = 30$. Deinde quia terni anguli plani ad ſolidum concurrunt, erit numerus angulorum ſolidorum $S = 20$, ergo $H + S = 32 = A + 2$. Pro icoſaedro eſt $H = 20$, cuius hedrae cum ſint trigonales, erit angulorum planorum numerus $= 60$, numerusque acierum $A = 30$. Tum vero quia ſinguli anguli ſolidi conſtant quinis planis, erit eorum numerus $S = 12$, ideoque $H + S = 32 = A + 2$.

Cum igitur veritas propoſitionis in his omnibus caſibus ſibi conſtet, dubium eſt nullum, quin ea in omnibus omnino ſolidis locum habeat, ſicque propoſitio ſufficienter videtur demonſtrata.

COROLL. 1.

§. 34. Si ergo in quopiam ſolido detur numerus angulorum ſolidorum S cum numero hedrarum H, inde ſtatim cognoſcetur numerus acierum A, cum ſit $A = H + S - 2$.

COROLL. 2.

§. 35. Datis autem in ſolido quocunque numero angulorum ſolidorum S cum numero acierum A, inde facile colligitur numerus hedrarum H, cum ſit $H = A - S + 2$.

COROLL. 3.

§. 36. Datis autem in ſolido quocunque numero hedrarum H vna cum numero acierum A, inde facile reperietur numerus angulorum ſolidorum S, quia eſt $S = A - H + 2$.

PROPO-

PROPOSITIO V.

§. 37. *Nullum exiſtere poteſt ſolidum, in quo numerus acierum ſenario auctus maior eſſet, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum ſolidorum.*

DEMONSTRATIO

Sit numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum ſolidorum $= S$, atque ſupra vidimus, fieri non poſſe, vt ſit vel $3H > 2A$, vel $3S > 2A$, erunt ergo hae formulae $3H > 2A$, et $3S > 2A$ impoſſibiles. Nunc autem vidimus, eſſe $H + S = A + 2$, ſeu $H = A - S + 2$, et $S = A - H + 2$, qui valores in illis formulis impoſſibilibus ſubſtituti dabunt ſequentes formulas impoſſibiles:

$$3A - 3S + 6 > 2A, \text{ et } 3A - 3H + 6 > 2A,$$

quae abeunt in has

$$A + 6 > 3S, \text{ et } A + 6 > 3H.$$

Vnde manifeſtum eſt, fieri non poſſe, vt numerus acierum ſenario auctus maior ſit, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum ſolidorum Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 38. In omni ergo ſolido vel eſt $A + 6 = 3H$, vel $A + 6 < 3H$, ſimilique modo eſt vel $A + 6 = 3S$, vel $A + 6 < 3S$. Siue ſi α, β, γ, δ, aſſu-

 mantur

mantur ad numeros poſitiuos, cyphra non excepta, deſignandos, erit:

$$A + \beta + \alpha = 3H, \text{ et } A + \beta + \varepsilon = 3S.$$

COROLL. 2.

§. 39. Tum vero quia ſemper eſt vel $A = \frac{3}{2}S$, vel $A > \frac{3}{2}S$; item vel $A = \frac{3}{2}H$, vel $A > \frac{3}{2}H$, erit ſimili modo

$$A = \tfrac{3}{2}H + \gamma, \text{ et } A = \tfrac{3}{2}S + \delta$$

vbi γ, et δ, vt ante α, et ε non poſſunt eſſe numeri negatiui.

COROLL. 3.

§. 40. His poſterioribus valoribus in praecedentibus aequationibus ſubſtitutis prodibunt hae aequationes:

$$\tfrac{3}{2}H + \beta + \alpha + \gamma = 3H, \text{ et } \tfrac{3}{2}S + \beta + \varepsilon + \delta = 3S$$

ſeu $4 + \frac{2}{3}(\alpha + \gamma) = H$, et $4 + \frac{2}{3}(\varepsilon + \delta) = S$
vnde patet, tam numerum hedrarum, quam numerum angulorum ſolidorum quaternario minorem eſſe non poſſe.

COROLL. 4.

§. 41. Cum ſit $H + S = A + 2$, erit hos poſtremos valores adhibendo, $8 + \frac{2}{3}(\alpha + \varepsilon + \gamma + \delta) = A + 2$, vnde colligitur, numerum acierum A ſenario nunquam minorem eſſe poſſe. Eſt igitur pyramis triangularis omnium ſolidorum ſimpliciſſimum, quia tam numerus hedrarum, quam angulorum ſolidorum eſt $= 4$, et numerus acierum $= 6$.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

§. 42. *Nullum exiſtere poteſt ſolidum, in quo vel numerus hedrarum quaternario auctus, maior ſit duplo numero angulorum ſolidorum, vel in quo numerus angulorum ſolidorum quaternario auctus maior, ſit duplo numero hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus hedrarum $= H$, numerus angulorum ſolidorum $= S$, et numerus acierum $= A$, et quoniam ſupra oſtendimus fieri non poſſe, vt ſit vel $3H > 2A$ vel $3S > 2A$, hae duae formulae erunt impoſſibiles:

$$3H > 2A, \text{ et } 3S > 2A.$$

Cum iam ſit $A = H + S - 2$, hoc valore pro A ſubſtituto ſequentes formulae erunt impoſſibiles:

$$3H > 2H + 2S - 4, \text{ et } 3S > 2H + 2S - 4$$

quae abeunt in has

$$H + 4 > 2S, \text{ et } S + 4 > 2H.$$

Vnde neque numerus hedrarum quaternario auctus maior eſſe poteſt duplo numero angulorum ſolidorum, neque numerus angulorum ſolidorum quaternario auctus maior duplo numero hedrarum. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 43. In omni ergo ſolido vel eſt $H + 4 = 2S$, vel $H + 4 < 2S$, deinde ſimili modo eſt vel $S + 4 = 2H$, vel $S + 4 < 2H$. Si igitur α et β denotent numeros poſitiuos cyphra non excepta, in omni ſolido hae

hae aequationes locum habebunt $H + 4 + \alpha = 2S$, et $S + 4 + \mathfrak{E} = 2H$.

COROLL. 2.

§. 44. Cum ſit $S = 2H - 4 - \mathfrak{E}$, et $S = \frac{1}{2}H + 2 + \frac{1}{2}\alpha$, numerus angulorum ſolidorum S neque maior eſſe poteſt, quam $2H - 4$, neque minor quam $\frac{1}{2}H + 2$. Ergo numerus angulorum ſolidorum S extra hos limites $2H - 4$, et $\frac{1}{2}H + 2$ cadere nequit.

COROLL. 3.

§. 45. Simili modo cum ſit $H = 2S - 4 - \alpha$, et $H = \frac{1}{2}S + 2 + \frac{1}{2}\mathfrak{E}$, numerus hedrarum H neque maior eſſe poteſt, quam $2S - 4$, neque minor, quam $\frac{1}{2}S + 2$; vnde numerus hedrarum H extra hos limites $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere nequit.

COROLL. 4.

§. 46. Deinde ex ſuperiori propoſitione intelligitur, numerum acierum A neque extra hos limites $\frac{3}{2}H$, et $3H - 6$, neque extra hos limites $\frac{3}{2}S$, et $3S - 6$ cadere poſſe; ſimili modo indidem patet, numerum hedrarum H non extra hos limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$, nec numerum angulorum ſolidorum S extra hos eosdem limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$ cadere poſſe.

COROLL. 5.

§. 47. Dato ergo numero hedrarum, tam pro numero angulorum ſolidorum, quam pro numero acierum, limi-

limites aſſignari poſſunt, quos transgredi nequeant, quosque ſubiecta tabella exhibet :

	Limites, quos transgredi nequit			
Numerus hedrarum	numerus angulorum ſolidorum		numerus acierum	
4	4	4	6	6
5	6	$4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	9
6	8	5	9	12
7	10	$5\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	15
8	12	6	12	18
9	14	$6\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	21
10	16	7	15	24
11	18	$7\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	27
12	20	8	18	30
13	22	$8\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$	33
14	24	9	21	36
15	26	$9\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	39
16	28	10	24	42
17	30	$10\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$	45
18	32	11	27	48
19	34	$11\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$	51
20	36	12	30	54
21	38	$12\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$	57
22	40	13	33	60
23	42	$13\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$	63
24	44	14	36	66
25	46	$14\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$	69

 COROLL.

C O R O L L. 6.

§. 48. Sin autem numerus angulorum ſolidorum S eſt datus, pro numero acierum iidem prodeunt limites, quos tabula exhibet, pro numero vero hedrarum ii repe-riuntur limites, qui in tabula pro numero angulorum ſolidorum ſunt exhibiti.

C O R O L L. 7.

§. 49. Verum ſi numerus acierum A ſit datus, quoniam neque numerus hedrarum, neque numerus angulorum ſolidorum hos limites $\frac{2}{3}$ A, et $\frac{1}{3}$ A + 2 excedere poteſt, ſequens tabula limitum conſtruetur:

Numerus acierum	Limites pro numeri H et S	Numerus acierum	Limites pro numeris H et *S*
6	4 --- 4	20	13 $\frac{1}{3}$ --- 8 $\frac{2}{3}$
7	4 $\frac{2}{3}$ --- 4 $\frac{1}{3}$	21	14 --- 9
8	5 $\frac{1}{3}$ --- 4 $\frac{2}{3}$	22	14 $\frac{2}{3}$ --- 9 $\frac{1}{3}$
9	6 --- 5	23	15 $\frac{1}{3}$ --- 9 $\frac{2}{3}$
10	6 $\frac{2}{3}$ --- 5 $\frac{1}{3}$	24	16 --- 10
11	7 $\frac{1}{3}$ --- 5 $\frac{2}{3}$	25	16 $\frac{2}{3}$ --- 10 $\frac{1}{3}$
12	8 --- 6	26	17 $\frac{1}{3}$ --- 10 $\frac{2}{3}$
13	8 $\frac{2}{3}$ --- 6 $\frac{1}{3}$	27	18 --- 11
14	9 $\frac{1}{3}$ --- 6 $\frac{2}{3}$	28	18 $\frac{2}{3}$ --- 11 $\frac{1}{3}$
15	10 --- 7	29	19 $\frac{1}{3}$ --- 11 $\frac{2}{3}$
16	10 $\frac{2}{3}$ --- 7 $\frac{1}{3}$	30	20 --- 12
17	11 $\frac{1}{3}$ --- 7 $\frac{2}{3}$	31	20 $\frac{2}{3}$ --- 12 $\frac{1}{3}$
18	12 --- 8	32	21 $\frac{1}{3}$ --- 12 $\frac{2}{3}$
19	12 $\frac{2}{3}$ --- 8 $\frac{1}{3}$	33	22 --- 13

Num-

Numerus acierum	Limites pro numeris H et S	Numerus acierum	Limites pro numeris H et S
34	$22\frac{2}{3}$ --- $13\frac{1}{3}$	48	32 --- 18
35	$23\frac{1}{3}$ --- $13\frac{2}{3}$	49	$32\frac{2}{3}$ --- $18\frac{1}{3}$
36	24 --- 14	50	$33\frac{1}{3}$ --- $18\frac{2}{3}$
37	$24\frac{2}{3}$ --- $14\frac{1}{3}$	51	34 --- 19
38	$25\frac{1}{3}$ --- $14\frac{2}{3}$	52	$34\frac{2}{3}$ --- $19\frac{1}{3}$
39	26 --- 15	53	$35\frac{1}{3}$ --- $19\frac{2}{3}$
40	$26\frac{2}{3}$ --- $15\frac{1}{3}$	54	36 --- 20
41	$27\frac{1}{3}$ --- $15\frac{2}{3}$	55	$36\frac{2}{3}$ --- $20\frac{1}{3}$
42	28 --- 16	56	$37\frac{1}{3}$ --- $20\frac{2}{3}$
43	$28\frac{2}{3}$ --- $16\frac{1}{3}$	57	38 --- 21
44	$29\frac{1}{3}$ --- $16\frac{2}{3}$	58	$38\frac{2}{3}$ --- $21\frac{1}{3}$
45	30 --- 17	59	$39\frac{1}{3}$ --- $21\frac{2}{3}$
46	$30\frac{2}{3}$ --- $17\frac{1}{3}$	60	40 --- 23
47	$31\frac{1}{3}$ --- $17\frac{2}{3}$		

COROLL. 8.

§. 50. Ad hanc tabulam inſuper notari conuenit, quantum numerorum H et S alter limitem minorem ſuperet, tantundem alterum a limite maiore deficere debere. Ita ſi numerus acierum A eſt $= 30$, et numerus hedrarum $H = 12 + n$, erit numerus angulorum ſolidorum $S = 20 - n$, at $20 - n$ non debet eſſe minus quam 12, vnde n octonarium ſuperare nequit.

PROPOSITIO VII.

§. 51. *Nullum exiſtere poteſt ſolidum, cuius omnes hedrae ſint hexagonae, vel plurium laterum; neque vllum exiſtere poteſt ſolidum, cuius omnes anguli ſolidi ex ſex, pluribusue angulis planis ſint formati.*

 DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sit vt hactenus numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum ſolidorum $= S$. Quod ſi iam omnes hedrae eſſent hexagonae, vel plurium laterum, numerus omnium angulorum planorum eſſet vel $= 6H$, vel $> 6H$; hinc numerus acierum A foret vel $= 3H$, vel $> 3H$. At ſupra vidimus, ſemper eſſe $A = 3H - 6$, vel $A < 3H - 6$; nullo modo ergo fieri poteſt, vt eſſet vel $A = 3H$, vel $A > 3H$; vnde impoſſibile eſt, vt omnes hedrae ſint vel hexagonae, vel plurium laterum. Q. E. Vnum.

Simili modo ſi omnes anguli ſolidi ex ſex pluribusve angulis planis conſtarent, foret omnium angulorum planorum numerus vel $= 6S$ vel $> 6S$, hincque numerus acierum A eſſet vel $= 3S$, vel $> 3S$. At ſupra demonſtrauimus, fieri non poſſe, vt ſit $A + 6 > 3S$, multo minus ergo eſſe poterit $A = 3S$, vel adeo $A > 3S$. Vnde impoſſibile eſt, vt omnes anguli ſolidi ex ſex pluribusue angulis planis conſtent. Q. E. Alterum.

PROPOSITIO VIII.

§. 52. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiuscunque ſolidi reperiuntur, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot vnitates occurrunt in exceſſu numeri acierum ſuper numerum hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus acierum $= A$, numerusque hedrarum $= H$

= H, atque demonſtrandum eſt, ſummam omnium angulorum planorum aequalem eſſe 4 A − 4 H rectis. Ad hoc demonſtrandum conſtet ſolidi ambitus

ex *a* hedris trigonis
ex *b* hedris tetragonis
ex *c* hedris pentagonis
ex *d* hedris hexagonis
ex *e* hedris heptagonis
etc.

erit ergo numerus hedrarum $H = a + b + c + d + e +$ etc.
et numerus acierum $A = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc.)
quia numerus angulorum planorum eſt $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc.

Iam cum ſumma angulorum vnius trianguli ſit = 2 rectis
- - - - - - - - - - - vnius quadrilateri = 4 rectis
- - - - - - - - - - - vnius pentagoni = 6 rectis
- - - - - - - - - - - vnius hexagoni = 8 rectis
- - - - - - - - - - - vnius heptagoni = 10 rectis
etc.

erit ſumma omnium angulorum planorum =
$2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ etc. angulis rectis,
at eſt $4A = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e +$ etc.
et $4H = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e +$ etc.

ergo $4A - 4H = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ etc.
Conſequenter ſumma omnium angulorum planorum aequalis eſt 4 A − 4 H angulis rectis. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 53. Cum ſit vel $2A = 3H$, vel $2A > 3H$, ſi ponamus $2A = 3H + \alpha$, erit ſumma angulorum planorum $= 2H + 2\alpha$, ideoque minor eſſe nequit, quam $2H$ anguli recti.

COROLL. 2.

§. 54. Deinde cum ſit $A = 3H - 6 - \alpha$, erit $4A - 4H = 8H - 24 - 4\alpha$. Hinc ſumma omnium angulorum planorum maior eſſe nequit, quam $8H - 24$ anguli recti. Numerus ideoque angulorum rectorum, quibus ſumma omnium angulorum planorum eſt aequalis, extra hos limites $2H$, et $8H - 24$ cadere nequit.

PROPOSITIO IX.

§. 55. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu ſolidi cuiuscunque occurrunt, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot adſunt anguli ſolidi, demtis octo.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus angulorum ſolidorum $= S$, ac demonſtrari debet, ſummam omnium angulorum planorum aequalem eſſe $4S - 8$ angulis rectis. Ponatur ad hoc numerus hedrarum $= H$, et numerus acierum $= A$, et quia in praecedente propoſitione demonſtrauimus, ſummam omnium angulorum planorum eſſe $= 4A - 4H$ angulis rectis, ob $H + S = A + 2$, erit $A - H = S - 2$, ideoque $4A - 4H = 4S - 8$. Vnde perſpicuum eſt, ſummam

ſummam omnium angulorum planorum eſſe $= 4S - 8$ rectis, ſeu aequari quater tot rectis, quot ſunt anguli ſolidi demtis octo. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 56. Inſignis ac palmaria haec eſt proprietas ſolidorum, quod ſumma omnium angulorum planorum vnice per numerum angulorum ſolidorum definitur, ſimili modo, quo in quauis figura plana ſumma angulorum ex eorum numero colligitur.

COROLL. 2.

§. 57. Merito igitur deſideratur demonſtratio huius propoſitionis ex ſolo numero angulorum ſolidorum petita, ita vt eam neque numerus hedrarum, neque numerus acierum ingrediatur. Hinc igitur, atque ex propoſitione quarta, cuius ne demonſtrationem quidem apodicticam exhibere potui, eo magis elucet, quam parum etiam nunc elementa Stereometriae ſint exculta.

COROLL. 3.

§. 58. Quoniam ſumma omnium angulorum planorum vnice a numero angulorum ſolidorum pendet, iſte numerus eiusmodi characterem ſolidorum conſtituit, a quo genera ſolidorum deriuanda eſſe videantur. Hinc ergo genera ſolidorum erunt ſecundum numerum angulorum ſolidorum ſequentia: 1. Tetragonum. 2. Pentagonum 3. Hexagonum, 4. Heptagonum etc. quae deinceps per numerum hedrarum magis determinabuntur.

PROBLE-

PROBLEMA I.

§. 59. *Genera notabiliora, ad quae omnia ſolida figuris planis incluſa, ſunt referenda, enumerare, nominibusque idoneis denotare.*

SOLVTIO.

Sit numerus angulorum ſolidorum $= S$, atque ſupra vidimus, numerum hedrarum extra hos limites: $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere non poſſe. Hinc ex tabella (§. 47.) exhibita pro quouis numero angulorum ſolidorum ſequentia ſolidorum genera conſtituentur:

Num. ang. ſol.	numerus hedrarum	numerus acierum	Nomina generum
4	4	6	Tetragonum tetraedrum
5	5	8	Pentagonum pentaedrum.
	6	9	Pentagonum hexaedrum.
6	5	9	Hexagonum pentaedrum.
	6	10	Hexagonum hexaedrum.
	7	11	Hexagonum heptaedrum.
	8	12	Hexagonum octaedrum.
7	6	11	Heptagonum hexaedrum.
	7	12	Heptagonum heptaedrum.
	8	13	Heptagonum octaedrum.
	9	14	Heptagonum enneaedrum.
	10	15	Heptagonum Decaedrum.

Num.

Num. ang. ſolidor.	numerus hedrarum	numerus acierum	nomina generum
8	6	12	Octogonum hexaedrum.
	7	13	Octogonum heptaedrum.
	8	14	Octogonum octaedrum.
	9	15	Octogonum enneaedrum.
	10	16	Octogonum decaedrum.
	11	17	Octogonum hendecaedrum.
	12	18	Octogonum dodecaedrum.
9	7	14	Enneagonum heptaedrum.
	8	15	Enneagonum Octaedrum.
	9	16	Enneagonum enneaedrum.
	10	17	Enneagonum decaedrum.
	11	18	Enneagonum hendecaedrum.
	12	19	Enneagonum dodecaedram.
	13	20	Enneagonum 13edrum.
	14	21	Enneagonum 14edrum.
10	7	15	Decagonum heptaedrum.
	8	16	Decagonum octaedrum.
	9	17	Decagonum enneaedrum.
	10	18	Decagonum decaedrum.
	11	19	Decagonum hendecaedrum.
	12	20	Decagonum dodecaedrum.
	13	21	Decagonum 13edrum.
	14	22	Decagonum 14edrum.
	15	23	Decagonum 15edrum.
	16	24	Decagonum 16edrum.
			etc.

ſuperfluum foret hunc generum ſolidorum catalogum vlte-

 rius

rius continuare, quoniam ex his progreſſio ſequentium generum ſponte perſpicitur. Q. E. I.

COROLL. 1.

§. 60. Notari hic conuenit, nullum dari ſolidum, quod ſeptem habeat acies, cum tamen primum genus tantum ſex habeat acies; ſecundum genus habet octo, ſequentia plures, atque in numeris acierum poſt ſenarium omnes numeri occurrunt, ſolo ſeptenario excepto.

COROLL. 2.

§. 61. Ex primo genere patet, omne ſolidum tetragonon ſimul eſſe tetraedrum, et viciſſim, quod genus, vti eſt ſimpliciſſimum, ita vnicam ſpeciem continet, quae eſt pyramis triangularis quatuor triangulis incluſa.

COROLL. 3.

§. 62. Secundum genus habens 16 angulos planos, et 5 ſolidos, horum quatuor ex tribus planis, vnus ex 4 planis erit formatus, ſimiliterque quinque eius hedrarum quatuor erunt triangula, vna vero quadrilaterum, ex quo hoc genus vnicam ſpeciem, ſcilicet pyramidem ſuper baſi quadrilatera extructam, continet.

COROLL. 4.

§. 63. Tertium genus habens 18 angulos planos, 5 ſolidos, et 6 hedras includetur ſex triangulis, quod vnico modo fieri poteſt, eritque hoc ſolidum pyramis trian-

triangularis geminata, ſeu erit ex duabus pyramidibus ſecundum baſes aequales iunctis compoſitum.

COROLL. 5.

§. 64. Quartum genus pariter vnicam ſpeciem continet tribus quadrilateris, et duobus triangulis incluſam, quae priſma triangulare vocatur. Sequentia genera plerumque plures ſpecies comprehendunt, ſed iis enumerandis immorari non licet, propterea quod adhuc aliae proprietates ſolidorum huc ſpectantes nondum ſatis ſunt euolutae.

SCHOLION.

§. 65. Haec ſunt ergo quaſi prima elementa Stereometriae, quae ſolidorum in genere ſpectatorum affectiones, ac proprietates continent, vnde deinceps ſingularum ſpecierum proprietates ſint deducendae. Propoſitiones ſcilicet hic traditae ſimiles ſunt earum, quae in Geometria plana de proprietatibus generalibus figurarum demonſtrari ſolent, et quae ad has duas reducuntur, vt in omni figura rectilinea primum angulorum numerus aequalis ſit numero laterum, tum vero vt ſumma omnium angulorum aequetur bis tot angulis rectis, quot ſunt latera, demtis quatuor. In ſolidis autem numerus huiusmodi propoſitionum fundamentalium multo eſt maior, quod quidem ob maiorem rerum, quibus determinantur multitudinem, non eſt mirandum. Hoc autem merito maxime mirum videtur, quod cum non ſolum elementa Geometriae planae ad ſummum perſpicuitatis faſtigium ſint promota, ſed etiam Stereometria iam ab antiquiſſimis Geometris ſit exculta,

tamen prima eius quaſi fundamenta adhuc inter deſiderata ſint referenda. Quanquam enim nunc equidem iſta fundamenta in lucem protraxiſſe arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria ſunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonſtrationibus adhuc deſtitui, quae ideo potiſſimum hic proponenda duxi, vt alios, quibus hoc ſtudium curae cordique eſt, excitem ad iſtas demonſtrationes inueſtigandas; quibus inuentis nullum plane eſt dubium, quin Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehatur.

DEMONSTRATIO
NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM, QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA SVNT PRAEDITA.

Auct. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inueſtigari ſolet, certas quasdam habent proprietates generales ac notiſſimas, veluti quod numerus angulorum aequalis ſit numero laterum, et quod ſumma angulorum aequalis ſit bis tot angulis rectis, quot ſunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus ſimiles proprietates ſolidorum hedris planis incluſorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aeque merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, ſeu Geometria proprie ſic dicta, ita ſimilia Stereometriae principia ſtabilire in mentem venit, ex qui-

bus

bus formatio ſolidorum conſequatur, eorumque praecipue proprietates demonſtrari queant. In quo negotio maxime mirum viſum eſt, quod cum Stereometria iam a tot ſeculis aeque ac Geometria ſit exculta, eius tamen prima quaſi elementa adhuc eſſent incognita, neque quisquam in tam longo temporis interuallo ſit inuentus, qui ea inueſtigare, atque in ordinem redigere ſit conatus. Hoc autem labore ſuſcepto, cum plures inſignes proprietates, quae omnibus corporibus hedris planis contentis ſunt communes, detexiſſem, et quae omnino ſimiles videbantur earum, quae inter elementa figurarum planarum rectilinearum referri ſolent, non ſine ſumma admiratione deprehendi, praecipuas earum tantopere eſſe reconditas, vt tum temporis omne ſtudium in earum demonſtratione eruenda fruſtra impendiſſem. Neque etiam ab amicis in his rebus alias verſatiſſimis, quibuscum illas proprietates communicaueram quicquam luminis mihi eſt accenſum, vnde has demonſtrationes deſideratas haurire potuisſem. Contemplatione enim plurium corporum generum eo ſum deductus, vt proprietates, quas in illis deprehenderam, ad omnia plane corpora patere intellexiſſem, etiamſi id mihi rigida demonſtratione oſtendere non licuiſſet; ſicque iſtas proprietates in eam veritatum claſſem referendas cenſebam, quas nobis quidem agnoſcere, non vero demonſtrare eſſet conceſſum.

Solidorum autem proprietates generales, quae demonſtratione adhuc indigent, ab vna pendent, ita vt ſi hanc demonſtrare liceret, cuncta, quae exhibui, Stereometriae elementa aeque eſſent firmata, atque elementa Geometriae. Proprietas vero iſta nondum demonſtrata, quae

plures alias in ſe complectitur, hac continetur propoſitione:

In omni ſolido hedris planis incluſo numerus angulorum ſolidorum vna cum numero hedrarum binario ſuperat numerum acierum.

Hinc aliam deriuaui non minus inſignem proprietatem omnibus huius generis ſolidis communem, quae ita ſe habet:

In omni ſolido hedris planis incluſo ſumma omnium angulorum planorum, quibus anguli ſolidi conſtituuntur, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot ſunt anguli ſolidi demtis octo.

Haecque propoſitio ita cum praecedente cohaeret, vt ſi altera demonſtrari poſſet, ſimul alterius demonſtratio haberetur; vnde defectus elementorum Stereometriae, quae in medium protuli, ſupplebitur, ſi harum duarum propoſitionum alterutrius demonſtratio reperietur.

Cum autem hoc argumentum denuo perpendiſſem, deſideratas harum propoſitionum demonſtrationes tandem ſum adeptus, ad quas ſimili fere modo perueni, quo in Geometria propoſitio analoga de ſumma angulorum figurae cuiusuis rectilineae demonſtrari ſolet. Quemadmodum enim in Geometria figura quaecunque rectilinea reſecandis continuo angulis tandem ad triangulum reducitur, ita propoſito quocunque ſolido hedris planis incluſo, obſeruaui, inde continuo angulos ſolidos reſecari poſſe, vt tandem pyramis triangularis remaneat, quae cum ſit figura inter ſolida ſimpliciſſima, ex cognitis eius proprietatibus hoc modo perſpexi, viciſſim ad proprietates omnium ſolidorum aſcendi poſſe. In pyramide enim trigonali numerus angulorum ſolidorum eſt $= 4$, numerus

rus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, cuius duplum 12 dat numerum angulorum planorum, quorum ſumma aequalis eſt 8 angulis rectis.

Sumto quidem puncto quocunque intra ſolidum, ſi inde ad ſingulos angulos ſolidos lineae rectae ductae concipiantur, ſolidum hoc modo in totidem pyramides dividetur, quot ſunt hedrae, quippe quae ſingulae baſes pyramidum conſtituent, dum earum vertices in illo puncto vniuntur. Atque hae pyramides, niſi ſint triangulares, porro facile in triangulares diſſecabuntur. Verum hic modus ſolidum quodcunque in pyramides triangulares reſoluendi ad praeſens inſtitutum parum confert; alterum ergo modum, quo quoduis ſolidum reſecandis ſucceſſiue eius angulis ſolidis tandem ad pyramidem triangularem redigitur, hic exponam, vnde deinceps demonſtratio memoratarum propoſitionum facile concinnabitur.

Similis autem haec operatio eſt eius, qua quaelibet figura rectilinea, dum eius anguli ſucceſſiue reſecantur, tandem in triangulum redigi ſolet. Si enim habeatur figura plana quotcunque laterum ABCDEFGA, ſi ab ea per rectam CE triangulum CDE reſecetur, remanebit figura ABCEFGA, cuius numerus angulorum vnitate erit minor. Si iam denuo recta CF triangulum CFE reſecetur, figura remanebit ABCFGA; vnde ſi porro triangulum BCF, tumque triangulum BGF abſcindatur, relinquetur tandem triangulum ABG. Tab. III. Fig. 1.

Ex hac reſolutione facile ambae palmariae figurarum planarum proprietates demonſtrantur: Sit enim figurae ABCDEFG numerus laterum $= L$, et numerus angulorum $= A$; ac ſi ducenda recta CE inde

angulus

angulus D reſecetur, figurae reſiduae numerus angulorum erit $= A - 1$; numerus autem laterum, quia duo latera C D, et D E ſunt ſublata, eorum autem loco nouum latus C E acceſſit, erit $= L - 1$. Hinc patet, ſi denuo vnus angulus reſecetur, numerum angulorum fore $= A - 2$, numerumque laterum $= L - 2$; atque ſi iam hoc modo n anguli fuerint reſecti, figurae reſiduae numerus angulorum erit $= A - n$, et numerus laterum $= L - n$. Sit iam haec figura reſidua triangulum, erit $A - n = 3$, et $L - n = 3$; vnde ſequitur fore $L = A$, ſeu in quauis figura rectilinea numerum laterum aequalem eſſe numero angulorum.

Deinde ſit R numerus angulorum rectorum, quibus omnes anguli figurae propoſitae A B C D E F G ſimul ſumti ſunt aequales, atque reſecto angulo D, ſeu triangulo C D E, ab angulis figurae auferantur tres anguli trianguli C D E, qui cum aequales ſint duobus rectis, ſumma angulorum figurae reſiduae A B C E F G aequabitur $R - 2$ angulis rectis, numero angulorum exiſtente iam $= A - 1$. Si denuo angulus reſecetur, vt numerus angulorum ſit $= A - 2$, eorum ſumma erit $= R - 4$ rectis; atque ſi iam n angulos abſciderimus vt figurae reſiduae numerus angulorum ſit $= A - n$, eorum ſumma aequabitur $R - 2n$ angulis rectis. Sit nunc iſta figura reſidua triangulum, ſeu $A - n = 3$, quia ſumma angulorum eſt $= 2$ rectis, erit $R - 2n = 2$; inde vero eſt $2A - 2n = 6$, a qua, ſi iſta aequatio auferatur, erit $2A - R = 4$, ſeu $R = 2A - 4 = 2L - 4$: ſicque conſtat, in quouis polygono ſummam omnivm angulorum aequalem eſſe bis tot angulis rectis, quot ſunt latera demtis quatuor. Simili

Simili igitur modo, quo ex tali figurarum recti-linearum ſectione duas praecipuas huiusmodi figurarum proprietates elicui, pro ſolidis inueſtigationem inſtituam, dum omnia ſolida hedris planis incluſa ſucceſſiua angulorum ſolidorum reſectione tandem ad pyramides triangulares ſum reducturus; quorſum cum peruenero, numerus angulorum ſolidorum, numerus hedrarum, numerus acierum, et ſumma angulorum planorum omnium erunt cognita. Quae quo fiant planiora, totam rem ſequentibus propoſitionibus complectar.

PROPOSITIO I. PROBLEMA

1. *Propoſito ſolido quocunque hedris planis incluſo inde datum angulum ſolidum ita reſecare, vt in ſolido reſiduo numerus angulorum ſolidorum vnitate ſit minor.*

SOLVTIO.

Sit O angulus ſolidus obtruncandus, in quo coeant acies AO, BO, CO, DO, EO, FO, ita, vt is formatus ſit ab angulis planis AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA, atque puncta A, B, C, D, E, F repraeſentent angulos ſolidos vicinos corporis, qui cum angulo O cohaerent rectis AO, BO, CO, DO, EO, FO. Cum iam eiusmodi pars a ſolido abſcindi debeat, vt angulus ſolidus O inde penitus auferatur, reliqui vero omnes relinquantur, neque tamen nouus angulus ſolidus efformetur, prima ſectio inſtituatur per angulum quempiam vicinum B, ſecundum planum ABC, donec pertingat ad angulos A et C, tum ex O fiat ſectio AOC; quo pacto a ſo- Fig. 2.

 lido

lido reſecabitur pyramis triangularis OABC. Tum cultro ad AC applicato ſectio dirigatur ad angulum F per planum AFC, et ex O alia ſectio FOC fiat, vt ſeparetur pyramis triangularis OACF. Porro ſecetur ſolidum ſecundum planum CDF, et ex O alia ſectio ad DF vsque inſtituatur, vt hoc modo reſcindatur pyramis triangularis OCDF. Denique ſectio ſecundum DEF facta reſecabit pyramidem triangularem ODEF; ſicque angulus ſolidus O omnino erit obtruncatus, et quia reliqui anguli ſolidi manent, nullusque nouus per ſectiones factas eſt formatus, numerus angulorum ſolidorum in corpore reſiduo vnitate erit diminutus. Q. E. F.

COROLL. 1.

2. Si ſolidum ipſum fuerit pyramis triangularis, per huiusmodi ſectionem tota remouebitur, vt nihil relinquatur. Verum quia hanc ſectionem ideo inſtituimus, vt tandem ad pyramidem triangularem corpus reducamus, ſi iam fuerit huiusmodi pyramis, ſectione plane non erit opus.

COROLL. 2.

3. Si angulus ſolidus O, a corpore reſecandus, a tribus tantum angulis planis formetur; ſeu ſi tres tantum acies in eo concurrant, tum vnica ſectione a corpore abſcindetur, hocque modo vnica pyramis triangularis auferetur.

COROLL. 3.

4. Si angulus ſolidus O a quatuor angulis planis formetur,

formetur, totidemque acies in eo concurrant, tum ad eum obtruncandum duae pyramides triangulares reſecari debent. Hoc autem duplici modo fieri poterit; nam duae pyramides reſecandae erunt vel OABC et OACD, vel OABD et OBCD. Ac niſi puncta A, B, C, D fuerint in eodem plano, inde ſolidum reſiduum diuerſam accipiet figuram. Fig. 3.

COROLL. 4.

5. Si angulus ſolidus a quinque angulis planis formetur, rectaeque in eo coeuntes ad quinque alios angulos ſolidos porrigantur, tum angulus O reſecabitur tribus pyramidibus triangularibus abſcindendis, hocque quinque diuerſis modis fieri poterit, qui diuerſa quoque reſidua relinquant, niſi quinque anguli ſolidi vicini fuerint in eodem plano ſiti.

COROLL. 5.

6. Cum igitur iſta vnius anguli ſolidi reſectio in quolibet corporis propoſiti angulo ſuſcipi queat, eaque niſi tres tantum anguli plani ad angulum ſolidum formandum concurrant, pluribus modis inſtitui poſſit, patet, quodlibet corpus ſolidum, niſi iam ſit pyramis triangularis, pluribus modis vno angulo ſolido mutilari poſſe.

COROLL. 6.

7. Quotcunque ergo corpus propoſitum habuerit angulos ſolidos, dum hoc modo eorum numerus continuo vnitate diminuitur, tandem cum quatuor tantum an-

guli ſolidi ſuperfuerint, id in pyramidem triangularem erit redactum, et quoniam ſingulae partes abſciſſae ſunt pyramides triangulares, hoc modo totum corpus in pyramides triangulares diſſecabitur.

SCHOLION.

8. Si in ſolido propoſito numerus angulorum ſolidorum ſit = S, poſtquam modo indicato vnus eorum fuerit reſectus, in corpore reſiduo numerus angulorum ſolidorum erit = S - 1. In qua diminutione cum vis propoſitionis contineatur, ea pluribus caſibus exceptione indigere videtur; ſi enim corpus propoſitum fuerit pyramis triangularis, reſecto vno angulo ſimul tota pyramis aufertur, ita, vt nihil relinquatur. Sectione enim facta ſecundum planum A B C, quod baſin pyramidis O A B C conſtituit, ſimul tota pyramis reſcinditur. Verum hoc caſu res ita concipi poteſt, ac ſi baſis A B C relinquatur, quae etſi eſt figura plana nulla craſſitie praedita, tamen inſtar ſolidi tribus tantum angulis conſtantis ſpectari poteſt, quod duas hedras, treſque acies habere cenſendum eſt; referet ſcilicet priſma triangulare altitudinis euaneſcentis, in quo hedrae laterales in nihilum abeant, et baſis ſuperior cum ſuis angulis in baſin inferiorem incidat. Hoc autem modo ambae ſupra memoratae ſolidorum proprietates in ſaluo manent; quia enim numerus angulorum ſolidorum hoc caſu fit S = 3, numerus hedrarum H = 2, et numerus acierum A = 3, patet, eſſe S + H = A + 2. Tum vero ſumma angulorum planorum in vtraque hedra contentorum aequatur

Fig. 4.

tur 4 angulis rectis, qui numerus eſt $= 4S - 8$. Idem euenit in omnibus pyramidibus, ſi angulus verticalis O inde reſecatur, vbi tota pyramis ſimul tollitur, tunc autem ſola baſis relinqui concipienda eſt, quae ſi ſit polygonum *n* laterum, ſpectari poterit inſtar ſolidi, in quo numerus angulorum ſolidorum ſit $S = n$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = n$, ita vt denuo ſit $S + H = A + 2$. Deinde cum vtraque hedra ſit polygonum *n* laterum, omnes anguli in ambabus contenti aequabuntur $4n - 8 = 4S - 8$ angulis rectis, vti alterum Theorema poſtulat. Etſi autem hi caſus veritati non aduerſantur, tamen in praeſenti negotio non opus eſt ad eos attendere; cum enim propoſitum ſit omnia ſolida ad pyramides triangulares reuocare, ſi ſolidum iam fuerit iſtiusmodi pyramis, reſectione cuiuspiam anguli penitus erit ſuperſedendum; ſin autem ſit pyramis baſin habens plurium laterum, tum non angulum verticalem, ſed quempiam angulorum ad baſin ſitorum inde abſcindi conueniet, qui tribus tantum angulis planis formantur; hoc modo ſemper poſt reſectionem pyramis relinquetur, cuius angulorum ſolidorum numerus vno erit minor, quam ante. Atque generatim quodcunque proponatur ſolidum, ſemper conueniet reſectionem incipi ab angulo ſolido, qui quam pauciſſimis angulis planis ſit formatus, vt ſemper quaedam ſolidi portio ſit remanſura, donec ad pyramidem triangularem perueniatur. Interim tamen vis ſequentium demonſtrationum ab hac limitatione non pendet, quippe quam tantum eum in finem adieci, vt incommodum apparens non verum euitetur.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

9. *Si a corpore propoſito angulus quiſpiam ſolidus modo ante expoſito reſecetur, ſicque numerus angulorum ſolidorum vnitate diminuatur, determinare in corpore relicto tam numerum hedrarum, quam numerum acierum, itemque ſummam omnium angulorum planorum.*

SOLVTIO.

Pro ſolido propoſito ſit numerus angulorum ſolidorum $= S$, numerus hedrarum $= H$, numerus acierum $= A$, et omnium angulorum planorum ſumma aequetur Fig. 2. R angulis rectis. Sit iam O angulus ſolidus reſecandus, ita vt eo reſecto in ſolido reliquo numerus angulorum ſolidorum futurus ſit $= S - 1$; atque vt reliquas ſolidi remanentis affectiones cognoſcamus, contemplemur primo ſummam angulorum planorum, quam in ſolido integro ponimus $= R$ angulis rectis. Primo autem reſectione anguli O ex computo angulorum planorum egrediuntur omnes anguli in triangulis A O B, B O C, C O D, D O E, E O F, et F O A contenti, quoniam haec triangula a ſuperficie corporis abſcinduntur. Sit n numerus horum triangulorum, ſeu angulorum vicinorum A, B, C, D, etc; atque ſumma angulorum ablatorum erit $= 2n$ angulis rectis. At abſciſſis his triangulis eorum loco ſuperficies corporis iam terminabitur triangulis A B C, A C F, C F D, et D F E, quorum numerus illo eſt binario minor, ideoque $= n - 2$. Cum nunc horum triangulorum anguli ſuperaccedant, eorumque ſumma ſit $= 2n - 4$ angulis rectis, manifeſtum eſt, per reſectionem anguli

anguli ſolidi O ſummam angulorum planorum R primo imminui $2n$ angulis rectis, tum vero iterum augeri $2n-4$ angulis rectis, ex quo diminutio erit 4 ang. rect. Hinc in ſolido reſiduo ſumma omnium angulorum planorum aequabitur $R-4$ rectis, ſicque quouis angulo ſolido reſecto ſumma omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis.

Si omnes hedrae in O concurrentes fuerint triangula, abſciſſione anguli O cunctae iſtae hedrae reſecantur, quarum numerus ſi dicatur n; hinc numerus hedrarum H diminuetur numero n; at loco harum hedrarum nouae ex ſectione ortae hedrae triangulares in ſuperficie corporis apparebunt, ſcilicet ABC, ACF, CFD, DFE, quarum numerus eſt $=n-2$; hinc numerus hedrarum, qui ante erat H, nunc erit $H-n+(n-2)=H-2$. Verum ſi eueniat, vt horum triangulorum duo pluraue in eodem plano ſint ſita, veluti ſi triangula ABC, et ACF ſint in eodem plano conſtituta, ea iam non duas, ſed vnicam hedram quadrilateram exhibere cenſentur, ita vt numerus hedrarum futurus ſit $=H-3$; ac ſi huiusmodi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, numerus hedrarum erit $=H-2-\mu$. At ſi hedrarum in O concurrentium non omnes fuerint triangulares, ſed vna veluti AOFQP pluribus lateribus conſtet, manifeſtum eſt, reſectione trianguli AOF non totam hedram auferri, ſed partem reliquam AFQP etiam nunc in cenſum hedrarum ingredi; ita numerus Hedrarum erit $=H-2-\mu+1$; atque ſi inter hedras in O coeuntes reperiantur ν hedrae non triangulares, numerus hedrarum reliquarum erit $=H-2-\mu+\nu$.

Pro

Pro numero acierum, quae poſt reſectionem anguli O ſupererunt, inueſtigando, ponamus primo vt ante, omnes hedras in O conuenientes eſſe triangula; ac primo quidem ex acierum numero recedent acies O A, O B, O C, O D, etc. quarum numerus eſt $= n$, earum vero loco de nouo accedent acies A C, C F, F D, quarum numerus eſt $= n - 3$, ſicque acierum numerus erit $= A - n + (n - 3) = A - 3$, ſi quidem nouae hedrae A B C, A C F, etc. fuerint inuicem inclinatae: At ſi duae earum A B C, et A C F in eodem plano ſint ſitae, vt vnicam hedram conſtituere cenſeantur, euaneſcet acies A C, eritque acierum numerus $A - 3 - 1$: ac ſi huiusmodi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, vt ante poſuimus, numerus acierum erit $= A - 3 - \mu$. Deinde ſi quaepiam hedrarum angulum O formantium non ſit trigonalis, videlicet hedra AOFQP, tum abſciſſione trianguli AOF noua acies exiſtit AF, quae ante non aderat, vnde numerus acierum hoc caſu vnitate augebitur. Ac ſi, vt ante poſuimus, inter hedras in O coeuntes ν hedrae non triangulares reperiantur, numerus acierum in corpore propoſito poſt reſectionem anguli O erit $= A - 3 - \mu + \nu$, cum ante fuiſſet $= A$. Q. E. I.

COROLL. 1.

10. Quod ſi ergo ſolidum hedris planis incluſum vno angulo ſolido mutiletur, vt angulorum ſolidorum numerus nunc ſit $= S - 1$, cum ante eſſet $= S$, ſumma omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis, ſeu cum ante fuiſſet $= R$ angulis rectis, nunc erit $= R - 4$ angulis rectis.

COROLL.

COROLL. 2.

11 Cum numerus hedrarum, qui ante erat $= H$, nunc poſt detruncationem anguli O ſit $= H - 2 - \mu + \nu$, patet, fieri poſſe, vt numerus hedrarum maior euadat, id quod eueniet, ſi ſit $\nu > 2 + \mu$, vbi μ et ν eos obtinent valores, qui in ſolutione ſunt aſſignati.

COROLL. 3.

12. Idem patet euenire poſſe in numero acierum, qui cum ante mutilationem anguli O eſſet $= A$, nunc repertus eſt $= A - 3 - \mu + \nu$; qui numerus illo maior eſt, ſi $\nu > 3 + \mu$; hoc ergo caſu multo magis numerus hedrarum augetur.

COROLL. 4.

13. Cum in expreſſionibus $H - 2 - \mu + \nu$, et $A - 3 - \mu + \nu$ litterae μ et ν idem ſignificent, patet, decrementum numeri acierum A vnitate maius eſſe, quam decrementum numeri hedrarum. Ita ſi numerus hedrarum poſt obtruncationem vnius anguli ſolidi fiat $= H - \alpha$, numerus acierum fiet $= A - \alpha - 1$.

COROLL. 5.

14. Hinc ergo differentia inter numerum hedrarum, et numerum acierum, quae initio erat $= A - H$, nunc poſt remotionem vnius anguli ſolidi erit $= A - H - 1$. Haec ſcilicet differentia ſemper vnitate fit minor, vtcunque corpus ratione litterarum μ et ν fuerit comparatum.

SCHOLION.

15. Ex his iam facillime Theorematum ſupra memoratorum demonſtrationes concinnare licebit, quae nulla re inferiores ſint demonſtrationibus in Geometria

vſitatis, niſi quod hic ob ſolidorum indolem plus imaginationi ſit tribuendum, ſiquidem ſolida ſuper plano depingantur: at ſi huiusmodi figurae corporeae formarentur, omnia aeque clara eſſent futura. Ceterum quae in ſolutione iſtius problematis aſſumſi, per ſe ſunt manifeſta; ſi enim habeatur polygonum A B C D E F, n lateribus terminatum, leuiter attendenti mox patebit, ſi ea figura diagonalibus ducendis in triangula diſſecetur, numerum horum triangulorum fore $= n - 2$, numerumque diagonalium hoc modo ductarum $= n - 3$: quadrilaterum enim vna diagonali in dua triangula, pentagonum duabus diagonalibus in tria triangula, et hexagonum tribus diagonalibus in quatuor triangula diſpertitur, et ita porro.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

16. *In omni ſolido hedris planis incluſo ſumma omnium angulorum planorum, qui in eius hedris exiſtunt, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot ſunt anguli ſolidi, demtis octo; ſeu ſi numerus angulorum ſolidorum ſit* $= S$, *ſumma omnium angulorum planorum aequatur* $4S - 8$ *angulis rectis.*

DEMONSTRATIO.

In ſolido quocunque ſit numerus angulorum ſolidorum $= S$, ſumma autem omnium angulorum planorum aequetur R angulis rectis, ita vt demonſtrari oporteat, eſſe $R = 4S - 8$. Iam modo ante indicato abſcindatur a ſolido vnus angulus ſolidus, vt numerus angulorum ſolidorum, quos habebit, ſit $= S - 1$, et ſumma angulorum

lorum planorum erit $= R - 4$ angulis rectis. Si denuo angulus ſolidus reſecetur, vt reliquorum numerus ſit $S - 2$, angulorum planorum ſumma erit $= R - 8$, atque ita pergendo patebit, pro quouis angulorum ſolidorum numero ſummam omnium angulorum planorum fore, vt tabella ſequens indicat.

Numerus angulorum ſolidorum	Summa omnium angulorum planorum
S	R angulis rectis
$S - 1$	$R - 4$
$S - 2$	$R - 8$
$S - 3$	$R - 12$
:	:
:	:
$S - n$	$R - 4n$

Cum igitur hac continua mutilatione peruenerimus ad $S - n$ angulos ſolidos, ſumma angulorum planorum erit $= R - 4n$ angulis rectis. At hoc modo tandem peruenietur ad 4 angulos ſolidos, quo caſu corpus abibit in pyramidem triangularem, in qua conſtat, ſummam omnium angulorum planorum eſſe aequalem 8 angulis rectis: hoc eſt, ſi ſit $S - n = 4$, erit $R - 4n = 8$, ſeu $R = 4n + 8$. At inde eſt $n = S - 4$, quo valore hic ſubſtituto fiet $R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8$, ita vt in quouis ſolido ſumma angulorum planorum aequetur quater tot angulis rectis, quot ſunt anguli ſolidi demtis octo. Q. E. D.

SCHOLION.

17. Quanquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, vt cum hoc fuerit demonſtratum, ſimul illius veritas ſit euicta, tamen ex problemate praemiſſo etiam alterius Theorematis demonſtratio confici poteſt ſequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

18. *In omni ſolido hedris planis incluſo numerus hedrarum vna cum numero angulorum ſolidorum, binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Sit in ſolido quocunque propoſito:
numerus angulorum ſolidorum $= S$
numerus hedrarum - - - $= H$
numerus acierum - - - $= A$
atque ante vidimus, ſi reſectione vnius anguli ſolidi numerus S vnitate minuatur, vt ſit $S - 1$, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram eſſe $= A - H - 1$. Continuata ergo hac mutilatione,

ſi numerus angulorum ſolidorum ſit,	Eceſſus numeri acierum ſuper numerum hedrarum erit
S	$A - H$
$S - 1$	$A - H - 1$
$S - 2$	$A - H - 2$
$S - 3$	$A - H - 3$
:	:
:	:
$S - n$	$A - H - n$

Quando

Quando ergo hoc modo ad pyramidem triangularem deuenietur, in qua numerus angulorum ſolidorum eſt $= 4$, numerus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, ita vt exceſſus numeri acierum ſupra numerum hedrarum futurus ſit $= 2$; euidens eſt, ſi fiat $S - n = 4$, fore $A - H - n = 2$. Inde ergo eſt $n = S - 4$, hinc vero $n = A - H - 2$; ſicque habetur $S - 4 = A - H - 2$, ſeu $H + S = A + 2$; vnde conſtat, in omni ſolido hedris planis incluſo numerum hedrarum H vna cum numero angulorum ſolidorum S binario ſuperare numerum acierum A. Q. E. D.

SCHOLION.

19. Demonſtratis ergo his Theorematibus, elementa Stereometriae, quae ante aliquod tempus explicaui, firmiſſimis demonſtrationibus ſunt munita, ita vt elementis Geometriae nihil plane concedant. Verum prima tantum Stereometriae elementa ſic in medium attuliſſe fateor, quibus haec ſcientia vlterius excolenda ſuperſtrui debeat: quippe quae plurimas praeclaras corporum affectiones in ſe complectitur, quas adhuc omnino ignoramus. Cum autem cuiusque ſolidi propoſiti ſoliditas quaeri ſoleat, coronidis loco modum tradam, ſoliditatem cuiusuis pyramidis triangularis inueniendi; cum enim puncto quocunque intra ſolidum hedris planis incluſum aſſumto, ſolidum in tot pyramides reſoluatur, quot habet hedras, dum quaelibet hedra baſin pyramidis conſtituit, quaeuis autem pyramis, cuius baſis non eſt triangularis, facile in pyramides triangulares reſoluatur; ſufficit, pyramidis triangularis ſoliditatem inueniſſe. Quae cum obtineatur, ſi baſis per tertiam

partem altitudinis multiplicetur, oſtendam, quem ad modum, ſi latera pyramidis fuerint data, ex iis ſoliditas definiri queat; perinde ac area trianguli ex datis tribus lateribus determinari ſolet.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

20. *Datis ſex lateribus ſeu aciebus pyramidis triangularis, eius ſoliditatem inuenire.*

SOLVTIO.

Fig. 5. Sit A B C D pyramidis triangularis, cuius baſis triangulum A B C, et vertex D; ac ponantur eius latera: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$. Iam in hedris ADB, et ADC ex D ad baſes oppoſitas demittantur perpendicula D P, et D Q, et in baſi A B C ex punctis P, et Q educantur ad latera A B, et A C normales P O, et Q O ſe mutuo ſecantes in O, erit recta D O perpendicularis ex vertice D in baſin A B C, vnde ſoliditas pyramidis erit $= \frac{1}{3} DO \times$ aream A B C; at ducta A O, erit $DO = \sqrt{(AD^2 - AO^2)} = \sqrt{(AD^2 - AP^2 - PO^2)}$. Iam ex elementis Geometriae conſtat, eſſe, $AP = \frac{aa + dd - ee}{2a}$. et $AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}$ Hinc producta Q O in S, ſi angulus B A C vocetur $= \alpha$, erit $QS = AQ \,\text{tang.}\, \alpha$, et $AS = \frac{AQ}{\text{coſ.}\, \alpha}$, hinc $PS = \frac{AQ}{\text{coſ.}\, \alpha} - AP$. At cum ſit $QS : AQ : AS = PS : PO : OS$, erit $PO = \frac{AQ \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\text{tang.}\, \alpha} = \frac{AQ}{\text{ſin.}\, \alpha} - \frac{AP}{\text{tang.}\, \alpha}$, ſeu $PO = \frac{AQ - AP \,\text{coſ.}\, \alpha}{\text{ſin.}\, \alpha}$; tum vero $OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\text{ſin.}\, \alpha} = \frac{AQ}{\text{ſin.}\alpha \,\text{coſ.}\alpha} - \frac{AP}{\text{ſin.}\, \alpha}$, ideoque $QO = QS - OS = AQ \,\text{tang.}\, \alpha$

$- AQ$

$-\frac{AQ}{\text{ſin.}\alpha\,\text{coſ.}\alpha}+\frac{AP}{\text{ſin.}\alpha}=\frac{AP-AQ\,\text{coſ.}\alpha}{\text{ſin.}\alpha}$. Hinc erit $AO^2=AP^2+PO^2=\frac{AP^2+AQ^2-2AP.AQ\,\text{coſ.}\alpha}{\text{ſin.}\alpha^2}$; ideoque $DO^2=\frac{AD^2\,\text{ſin.}\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ\,\text{coſ.}\alpha}{\text{ſin.}\alpha^2}$. Verum area trianguli A B C eſt $=\frac{1}{2}ab.\,\text{ſin.}\alpha$, ex quo erit ſoliditas pyramidis $=\frac{1}{6}ab\sqrt{(AD^2\,\text{ſin.}\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ.\text{coſ.}\alpha)}=\frac{1}{6}\sqrt{[aabbdd\,\text{ſin}\,\alpha^2-\frac{1}{4}bb(aa+dd-ee)^2-\frac{1}{4}aa(bb+dd-ff)^2+\frac{1}{2}ab(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\,\text{coſ.}\alpha]}$. Deinde ex triangulo A B C eſt $\text{coſ.}\alpha=\frac{aa+bb-cc}{2ab}$, ideoque $\text{ſin.}\alpha^2=1-\frac{1}{4aabb}(aa+bb-cc)^2$, quibus valoribus ſubſtitutis prodibit ſoliditas pyramidis:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left(\begin{array}{l}4aabbdd-dd(aa+bb-cc)^2-bb(aa+dd-ee)^2-aa(bb+dd-ff)^2\\ \quad+(aa+bb-cc)(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\end{array}\right)}$$

quae terminis euolutis in ſequentem abit formam:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left(\begin{array}{l}aaccdd+aabbee+aabbff+aaddff+bbccdd+bbddee\\ aaccff+aaeeff+bbccee+bbeeff+ccddee+ccddff\\ \quad-aabbcc-aaddee-bbddff-cceeff\\ -a^4ff-aaf^4-b^4ee-bbe^4-c^4dd-ccd^4\end{array}\right)}$$

quae adhuc commodius ita exhiberi poſſe videtur:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{l}+aaff(bb+cc+dd+ee)-aaff(aa+ff)-aabbcc\\ +bbee(aa+cc+dd+ff)-bbee(bb+ee)-aaddee\\ +ccdd(aa+bb+ee+ff)-ccdd(cc+dd)-bbddff\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -cceeff\end{array}\right)}$$

Sicque ex datis ſex lateribus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* pyramidis triangularis eius ſoliditas definitur. Q. E. I.

SCHOLION I.

21. Quo ratio, qua in hac expreſſione latera *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* inter ſe combinantur, clarius perſpiciatur, notandum eſt, ex iis quatuor formari triangula, ſcilicet

△ A B C conſtat lateribus *a*, *b*, *c*
△ A B D - - - - *a*, *d*, *e*
△ A C D - - - - *b*, *d*, *f*

△ B C D

Δ BCD - - - - c, e, f

vnde patet, latus a cum ſingulis reliquorum ad triangula conſtituenda concurrere, praeter quam cum latere f, quamob rem haec latera a et f disiuncta appellabo, quia inter ſe non iunguntur; ſimili modo latera b et e erunt disiuncta, itemque latera c et d.

Occurrunt ergo poſt ſignum radicale primo termini ex lateribus disiunctis formati $aaff$, $bbee$, $ccdd$, qui ſunt multiplicati per ſummam quadratorum reliquorum, deinde iidem termini negatiue ſumti multiplicantur per ſummam ſuorum quadratorum, hincque denique ſubtrahuntur producta ex quadratis ternorum laterum cuiusque trianguli.

SCHOLION 2.

22. Formula quoque pro ſoliditate pyramidis inueniri poteſt aliquanto ſimplicior, ſi tria tantum latera in vno angulo ſolido coeuntia dantur, vna cum angulis planis, quos ibi conſtituunt.

Sint enim tria latera in angulo ſolido A coeuntia

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = d$$

deinde anguli plani:

$$BAC = p;\; BAD = q;\; CAD = r.$$

Atque ex his ſoliditas pyramidis erit

$$\tfrac{1}{6}\, abd \sqrt{(1 - \text{coſ.}\, p^2 - \text{coſ.}\, q^2 - \text{coſ.}\, r^2 + 2\, \text{coſ.}\, p \,.\, \text{coſ.}\, q \,.\, \text{coſ.}\, r)}$$

quae reducitur ad formam ſequentem:

$$\tfrac{1}{3}\, a\, b\, d \sqrt{\text{ſin.}\, \tfrac{p+q+r}{2}\, \text{ſin.}\, \tfrac{p+q-r}{2}\, \text{ſin.}\, \tfrac{p+r-q}{2}\, \text{ſin.}\, \tfrac{q+r-p}{2}};$$

vnde patet, vt area prodeat realis, trium angulorum planorum p, q, et r, in angulo quouis ſolido coeuntium binos ſimul ſumtos tertio maiores eſſe debere.

DE MO-

DE MOTV
CORPORVM COELESTIVM
A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE PERTVRBATO.

AVCT. L. EVLERO.

1.

Motus corporum coeleſtium cenſetur regularis, nulliſque inaequalitatibus perturbatus, ſi ea ita reuoluuntur in ellipſi aliaue ſectione conica, vt circa alterutrum ſocum areas temporibus proportionales deſcribant. Notum autem eſt, huiusmodi motum regularem oriri, ſi corpora ad iſtum ſocum continuo ſollicitentur viribus, quae ſint quadratis diſtantiarum reciproce proportionales. Ex quo intelligitur, ſi vires ſollicitantes ab hac lege recedant, motum proditurum eſſe irregularem, ita vt vel orbita non amplius ſit ellipſis, vel areae circa ſocum deſcriptae rationem temporum non amplius ſequantur. In motu ergo planetarum primariorum perturbatio oriri debet, ſi praeter vim quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem, qua ad ſolem vrgentur, aliis quoque viribus quibuscunque ſollicitantur; in planetis autem ſecundariis ſeu ſatellitibus motus perturbatio aeſtimanda eſt ex viribus, quibus praeter eam vim quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem, qua ad ſuos planetas principales pelli concipiuntur, inſuper ſollicitantur.

2. Si planeta motu regulari fertur, ſeu per ellipſis perimetrum ita progreditur, vt circa alterutrum eius focum areas temporibus proportionales conficiat, eius motus ſequenti modo ad certas leges reuocatur. Primo ſcilicet tam poſitio, quam longitudo axis trauſuerſi ellipſis definiri debet; tum vero ſpecies eius, quae ſiue axe coniugato, ſiue parametro, ſiue excentricitate determinatur; tertio ad quodvis tempus propoſitum anomaliam planetae mediam aſſignare oportet, quae inuenitur, ſi a longitudine media longitudo aphelii ſeu ſummae abſidis ſubtrahatur. Sicque, ſi tam tempus periodicum fuerit cognitum, quam momentum, quo planeta ſemel in abſide ſumma fuerit verſatus, inde ad quoduis tempus propoſitum anomalia media colligi poterit. Ex anomalia autem media porro et ſpecie ellipſis per problema *Keplerianum* definitur anomalia vera, atque diſtantia planetae a foco; vnde ſi ad anomaliam veram longitudo abſidis ſummae addatur, orietur tandem longitudo vera; quae eadem quoque obtinetur, ſi exceſſus anomaliae verae ſupra anomaliam mediam ad longitudinem mediam addatur, ſiue defectus ab ea ſubtrahatur; qui exceſſus, vel defectus ab Aſtronomis Proſtaphaereſis appellari ſolet.

3. In motu regulari tam poſitio lineae abſidum ſeu axis transuerſi, quam eius quantitas vna cum excentricitate perpetuo manent eadem, ita vt, ſi hae res ſemel fuerint cognitae, eae nulli deinceps immutationi ſint obnoxiae. Harum ergo rerum conſtantia primarium conſtituit diſcrimen inter motum regularem, et irregularem; ita vt, ſi vel poſitio axis tranſuerſi, vel eius quantitas, vel

vel excentricitas mutabilis exiſteret, motus non amplius eſſet regularis, ſed irregularis. Atque hinc motus quicunque irregularis ita ſaltem ad ſpeciem motus regularis reuocari poterit, vt iſtae res tanquam variabiles conſiderentur. Vtcunque enim motus fuerit perturbatus, quaeuis eius portio minima ad motum regularem referri poteſt, dummodo ſitus, quantitas, et ſpecies ellipſis definiatur, ad quam ſpatii elementum a corpore deſcriptum pertineat.

4. Effectus ergo virium motum alias regularem perturbantium in hoc conſiſtet, vt vel poſitionem lineae abſidum immutet, vel axem ellipſis tranſuerſum, vel eius excentricitatem. Atque ſi conſtet, quantam mutationem vires quaecunque perturbantes his tribus rebus pro quouis tempore induxerint, locus planetae inde aeque facile definietur, atque in motu regulari. Quocirca iſte modus effectum virium perturbantium determinandi aptiſſimus atque ad vſum Aſtronomiae accommodatiſſimus videtur. Eo autem Aſtronomi iam reipſa vtuntur, dum in planetis principalibus loca apheliorum mobilia ſtatuunt, et in luna non ſolum apogaeo, ſed etiam excentricitati mutationem continuam tribuere ſolent. Quo igitur facilius effectum virium quarumcunque perturbantium hoc modo per calculum definire liceat, motum primo regularem, qui oritur a viribus reciproce quadrato diſtantiae proportionalibus ad calculum reuocabo, quo facto problemata ad motus perturbationem ſpectantia commodius tractari poterunt.

PROBLEMA. 1.

5. *Determinare motum corporis, quod ad punctum* TAB. III.

 fixum Fig. 6.

fixum C perpetuo ſollicitatur viribus diſtantiae eius ab hoc puncto quadratis reciproce proportionalibus.

SOLVTIO.

In plano orbitae, quam corpus circa punctum fixum C de ſcribit, ducatur recta C a ad punctum coeli fixum, a quo elongatio ſeu longitudo corporis quouis tempore computetur. Elapſo tempore t peruenerit corpus in M, ac ponatur eius a puncto C diſtantia $CM = x$, et longitudo ſeu angulus $ACM = \Phi$. Vis autem acceleratrix, qua corpus hic ad C vrgetur, ſit $= \frac{C}{xx}$; vbi C denotat quantitatem conſtantem, qua intenſitas abſoluta huius vis determinatur. His poſitis ex legibus motus colligitur, motum huius corporis ſequentibus binis aequationibus differentio-differentialibus exprimi, ſumto elemento temporis dt conſtante:

I. $2dxd\Phi + xdd\Phi = 0$; II. $ddx - xd\Phi^2 + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{C}{xx} = 0$.

Minus autem conuenit in his aequationibus elemento temporis dt vti; atque ad homogeneitatem ſeruandam praeſtabit loco temporis abſoluti motum ſolis medium introducere, quippe qui aptiſſimam temporis menſuram ſuppeditat. Sit igitur diſtantia ſolis media a terra $= a$; eius longitudo media tempori t reſpondens $= \zeta$; et pro diſtantia x vis ſolis in terram $= \frac{A}{xx}$, quae ſi pro $\frac{C}{xx}$ ſcribatur, ponaturque $x = a$, et $\Phi = \zeta$, vt formulae traditae motum ſolis medium referant, ob $dx = 0$, et $dd\Phi = 0$, erit $-ad\zeta^2 + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{A}{aa} = 0$, ideoque $\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a^3}{A}d\zeta^2$; qui valor ſi ſubſtituatur, aequatio ſecunda abit in:

ddx

$$d d x - x d \Phi^2 + \frac{C a^3}{A x x} d \zeta^2 = 0.$$

At prima aequatio integrata, ob $d\zeta$ iam conſtans, praebet $x x d \Phi = E d \zeta$, vnde fit $d \Phi = \frac{E d \zeta}{x x}$, et $x d \Phi^2 = \frac{E E d \zeta^2}{x^3}$; ſubſtituatur hic valor in illa aequatione, vt habeatur:

$$d d x - \frac{E E d \zeta^2}{x^3} + \frac{C a^3 d \zeta^2}{A x x} = 0,$$

quae multiplicata per $2 d x$, et integrata dabit

$$d x^2 + \frac{E E d \zeta^2}{x x} - \frac{2 C a^3 d \zeta^2}{A x} + F d \zeta^2 = 0,$$

ex qua elicitur:

$$d \zeta = \frac{x d x}{\sqrt{\left(- E E + \frac{2 C a^3 x}{A} - F x x\right)}};$$

$$\text{et } d \Phi = \frac{E d x}{x \sqrt{\left(- E E + \frac{2 C a^3 x}{A} - F x x\right)}};$$

vbi E, et F ſunt quantitates conſtantes ex natura orbitae definiendae. Ponatur $x = \frac{b}{z}$, vt ſit $d x = \frac{- b d z}{z z}$, et $\frac{d x}{x} = \frac{- d z}{z}$, eritque:

$$d \zeta = \frac{- b b d z}{z z \sqrt{\left(- E E z z + \frac{2 C a^3 b z}{A} - F b b\right)}}, \text{ et}$$

$$d \Phi = \frac{- E d z}{\sqrt{\left(- E E z z + \frac{2 C a^3 b}{A} z - F b b\right)}},$$

quae poſtrema aequatio a quadratura circuli aperte pendet, ad eamque integrandam notandum eſt, z maximum et minimum valorem obtinere poſſe, quorum vtroque formula irrationalis in nihilum abeat. Sit igitur ad conſtantes E et F definiendas, $1 + k$ valor ipſius z maximus, et $1 - k$ valor minimus, vt 1 ſit eius valor medius; atque

$(1+k-z)(z-1+k) = -(1-kk) + 2z - zz$
debebit eſſe factor quantitatis poſt ſignum radicale conſtitutae, altero factore exiſtente E E, vnde oritur

$$\frac{C a^3 b}{A} = EE, \text{ et } Fbb = EE(1-kk),$$

fietque $\sqrt{(-EEzz + \frac{2 C a^3 bz}{A} - Fbb)} = E\sqrt{(1+k-z)} \times (z-1+k) = E\sqrt{[kk-(z-1)^2]}$; Ergo, ob $E = \sqrt{\frac{C a^3 b}{A}}$, erit

$$d\zeta = \frac{-bbdz}{zz\sqrt{\frac{C a^3 b}{A}[kk-(z-1)^2]}} = \frac{-dz\sqrt{\frac{A b^3}{C a^3}}}{zz\sqrt{[kk-(z-1)^2]}};$$

$$d\Phi = \frac{-dz}{\sqrt{[kk-(z-1)^2]}}.$$

Quia $z = 1 + k$ eſt maximus, et $z = 1 - k$ minimus valor, quilibet medius ita exprimetur commode $z = 1 + k \operatorname{coſ.} s$, eritque $\sqrt{[kk-(z-1)^2]} = k \operatorname{ſin.} s$, et $dz = -kds \operatorname{ſin.} s$: vnde fit

$$d\zeta = \frac{ds\sqrt{\frac{A b^3}{C a^3}}}{(1+k\operatorname{coſ.} s)^2}, \text{ et } d\Phi = ds,$$

atque $x = \frac{b}{1+k \operatorname{coſ.} s}$; hincque $\Phi = D + s$.
Quia angulus $ACM = \Phi$, capitur angulus ACP = quantitati conſtanti D, eritque angulus $PCM = s$; qui qualis ſit reſpectu orbitae ex diſtantia $x = \frac{b}{1+k \operatorname{coſ.} s}$ colligi poterit. Nam ſi ſit $s = 0$, quo caſu CM abit in CP, erit $CP = \frac{b}{1+k}$; erit ergo P id orbitae punctum, vbi corpus minime a puncto C diſtat, ideoque eſt abſis ima, ſeu perihelium, ſi C ſit ſol. Cum igitur diſtantia minima ſit $= \frac{b}{1+k}$, et prodeat, ſi $s = 0$; diſtantia maxima prodibit ponendo $s = 180°$, fitque $= \frac{b}{1-k}$; ſicque diſtantiae minimae e diametro erit oppoſita: vnde

vnde ſumma harum ambarum diſtantiarum maximae et minimae, $= \frac{2b}{1-kk}$ dabit axem tranſuerſum orbitae, et cum, poſito $s = 90^\circ$, diſtantia fiat ſemilateri recto aequalis, erit ſemilatus rectum $= b$; hincque axis coniugatus $= \frac{2b}{\sqrt{(1-kk)}}$. Porro axis tranſuerſus cum ſit $= \frac{2b}{1-kk}$, et diſtantia focorum, (quae eſt exceſſus diſtantiae maximae ſupra minimam) $= \frac{2bk}{1-kk}$, haec per axem tranſuerſum diuiſa dabit excentricitatem $= k$. Tum vero manifeſtum eſt, angulum P C M $= s$ referre anomaliam veram ab abſide ima computatam, cuius longitudo ſeu angulus A C P ſi ponatur $= \omega$; erit longitudo corporis A C M $= \Phi = \omega + s$. Vnde haec naſcitur problematis ſolutio.

Corpus mouebitur in ſectione conica, cuius ſi fuerit 1°. ſemi-latus rectum $= b$; 2°. excentricitas $= k$; 3°. locus abſidis imae ſeu angulus A C P $= \omega$; ad quodvis tempus locus corporis in orbita ita aſſignabitur. Pro tempore propoſito, cui reſpondeat longitudo ſolis $= \zeta$, quaeratur corporis anomalia vera $= s$, ex hac aequatione: $d\zeta = \frac{ds}{(1+k\,coſ.\,s)^2} \sqrt{\frac{A\,b^3}{C\,a^3}}$, qua inuenta erit longitudo corporis ſeu angulus A C M $= \Phi = \omega + s$, et diſtantia eius C M $= x = \frac{b}{1+k\,coſ.\,s}$. Q. E. I.

COROLL. 1.

6. Cum ergo ſit $d\zeta \sqrt{\frac{C\,a^3}{A\,b^3}} = \frac{ds}{(1+k\,coſ.\,s)^2}$, totum negotium redit ad integrationem formulae huius differentialis, quae euoluitur in hanc formam:

$d\zeta\sqrt{}$

$d\zeta \sqrt{\frac{C\,a^3}{A\,b^3}} = ds(1 - 2k\,\text{coſ.}\,s + 3k^2\,\text{coſ.}\,s^2 - 4k^3\,\text{coſ.}\,s^3 + 5k^4\,\text{coſ.}\,s^4 - \text{etc.})$, qui termini, niſi excentricitas k ſit valde magna, tantopere conuergunt, vt ſufficiat aliquot ab initio aſſumſiſſe. Verum ad integrationem abſoluendam conueniet, poteſtates coſinus anguli s in coſinus angulorum multiplorum conuertere, ſecundum has formulas:

$$\text{coſ.}\,s = \text{coſ.}\,s$$
$$\text{coſ.}\,s^3 = \tfrac{3}{4}\,\text{coſ.}\,s + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\,s$$
$$\text{coſ.}\,s^5 = \tfrac{3.5}{4.6}\,\text{coſ.}\,s + \tfrac{5}{16}\,\text{coſ.}\,3\,s + \tfrac{1}{16}\,\text{coſ.}\,5\,s$$
$$\text{coſ.}\,s^7 = \tfrac{3.5.7}{4.6.8}\,\text{coſ.}\,s + \tfrac{21}{64}\,\text{coſ.}\,3\,s + \tfrac{7}{64}\,\text{coſ.}\,5\,s \text{ etc.}$$
$$\text{coſ.}\,s^9 = \tfrac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\,\text{coſ.}\,s + \tfrac{21}{64}\,\text{coſ.}\,3\,s + \tfrac{9}{64}\,\text{coſ.}\,5\,s \text{ etc.}$$

etc.

$$\text{coſ.}\,s^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\,s$$
$$\text{coſ.}\,s^4 = \tfrac{1.3}{2.4} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\,s + \tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4\,s$$
$$\text{coſ.}\,s^6 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6} + \tfrac{15}{32}\,\text{coſ.}\,2\,s + \tfrac{3}{16}\,\text{coſ.}\,4\,s + \tfrac{1}{32}\,\text{coſ.}\,6\,s$$
$$\text{coſ.}\,s^8 = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \tfrac{7}{16}\,\text{coſ.}\,2\,s + \tfrac{7}{32}\,\text{coſ.}\,4\,s + \tfrac{1}{16}\,\text{coſ.}\,6\,s \text{ etc.}$$
$$\text{coſ.}\,s^{10} = \tfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} + \tfrac{105}{256}\,\text{coſ.}\,2\,s + \tfrac{15}{64}\,\text{coſ.}\,4\,s + \tfrac{45}{512}\,\text{coſ.}\,6\,s \text{ etc.}$$

etc.

Erit ergo:

$$\begin{aligned} d\zeta \tfrac{C\,a^3}{A\,b^3} = {} & ds(1 + \tfrac{3}{2}kk + \tfrac{3.5}{2.4}k^4 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}k^6 + \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8}k^8 + \text{etc.}) \\ & - 2\,ds\,\text{coſ.}\,s(k + \tfrac{3}{2}k^3 + \tfrac{3.5}{2.4}k^5 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}k^7 + \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8}k^9 + \text{etc.}) \\ & + ds\,\text{coſ.}\,2\,s(\tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{5}{2}k^4 + \tfrac{105}{32}k^6 + \tfrac{63}{16}k^8 + \text{etc.}) \\ & - ds\,\text{coſ.}\,3\,s(k^3 + \tfrac{15}{8}k^5 + \tfrac{21}{8}k^7 + \tfrac{105}{32}k^9 + \text{etc.}) \\ & + ds\,\text{coſ.}\,4\,s(\tfrac{5}{8}k^4 + \tfrac{21}{16}k^6 + \tfrac{63}{32}k^8 + \text{etc.}) \\ & - ds\,\text{coſ.}\,5\,s(\tfrac{3}{8}k^5 + \tfrac{7}{8}k^7 + \tfrac{45}{32}k^9 + \text{etc.}) \\ & + ds\,\text{coſ.}\,6\,s(\tfrac{7}{32}k^6 + \tfrac{9}{16}k^8 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

et

et integrando habebitur $\zeta \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} =$

$$= \text{conſt.} + s\left(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{3.5}{2.4}k^4 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}k^6 + \text{etc.}\right)$$
$$- 2k\,\text{ſin.}\,s\left(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{3.5}{2.4}k^4 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}k^6 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{3}{4}k^2\,\text{ſin.}\,2s\left(1 + \tfrac{5}{3}k^2 + \tfrac{35}{16}k^4 + \tfrac{21}{8}k^6 + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{3}k^3\,\text{ſin.}\,3s\left(1 + \tfrac{15}{8}k^2 + \tfrac{21}{8}k^4 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{5}{32}k^4\,\text{ſin.}\,4s\left(1 + \tfrac{21}{10}k^2 + \tfrac{63}{20}k^4 + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}k^5\,\text{ſin.}\,5s\left(1 + \tfrac{7}{3}k^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{7}{192}k^6\,\text{ſin.}\,6s\left(1 + \tfrac{18}{7}k^2 + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

COROLL. 2.

7. Patet hic coefficientem ipſius s eſſe $= \frac{1}{(1-kk)\sqrt{(1-kk)}}$. Quare ſi aequatio noſtra per $(1-kk)^{\frac{3}{2}}$ multiplicetur, orietur $\zeta \sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} =$

$$= \text{Conſt.} + s - 2k\,\text{ſin.}\,s + \tfrac{3}{4}k^2\left(1 + \tfrac{1}{6}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{1}{32}k^6\right)\text{ſin.}\,2s$$
$$- \tfrac{1}{3}k^3\,\text{ſin.}\,3s\left(1 + \tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4\right) + \tfrac{5}{32}k^4\left(1 + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{3}{8}k^4\right)\text{ſin.}\,4s$$
$$- \tfrac{1}{16}k^5\left(1 + \tfrac{5}{6}kk\right)\text{ſin.}\,5s + \tfrac{7}{192}k^6\left(1 + \tfrac{15}{14}kk\right)\text{ſin.}\,6s$$
$$\text{etc.}$$

vbi notari conuenit, fractionem $\frac{b}{1-kk}$ exprimere ſemiaxem transuerſum. Erit ergo $\zeta \sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} - \text{Conſt.}$ anomalia media, quippe quae tempori eſt proportionalis, vnde ſi anomalia media ponatur $= r$, quae pariter ab abſide ima computetur, erit $r = \zeta \sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} - \text{Conſt.}$ atque

$$s = r + 2k\,\text{ſin.}\,s - \tfrac{3}{4}k^2\left(1 + \tfrac{1}{6}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{1}{32}k^6\right)\text{ſin.}\,2s$$
$$+ \tfrac{1}{3}k^3\left(1 + \tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4\right)\text{ſin.}\,3s - \tfrac{5}{32}k^4\left(1 + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{3}{8}k^4\right)\text{ſin.}\,4s$$
$$+ \tfrac{1}{16}k^5\left(1 + \tfrac{5}{6}kk\right)\text{ſin.}\,5s - \tfrac{7}{192}k^6\left(1 + \tfrac{15}{14}kk\right)\text{ſin.}\,6s$$

quae formula ad excentricitates ſatis notabiles ſe extendit,

ex eaque leui negotio per approximationes ad datam quamuis anomaliam mediam r, ei reſpondens anomalia vera s, poterit inueſtigari. Quod ſi forte difficile videatur; ad ſingulos gradus anomaliae verae s quaeratur anomalia media r, qua tabula conſtructa ſine labore inde tabula inuerſa formabitur, quae ad ſingulos gradus anomaliae mediae r reſpondentes anomalias veras s exhibeat.

COROLL. 3.

8. Inventa autem anomalia vera s, quia longitudo abſidis imae poſita eſt $= \omega$, erit longitudo vera ſeu angulus $ACM = \Phi = \omega + s$. Hinc porro eruitur diſtantia $CM = x = \frac{b}{1 + k\,\text{coſ}.s}$; pro qua, cum ex anomalia media r conſtet vera s, ad ſingulos gradus anomaliae mediae r tabula diſtantiarum x poterit concinnari. Diameter autem corporis ex C ſpectati apparens, vt et eius parallaxis horizontalis, erit, vt $1 + k\,\text{coſ}.s$.

COROLL. 4.

9. Motus quoque huius corporis horarius ex aequatione differentiali colligi poterit, quae eſt $d\zeta = \frac{ds\sqrt{\Lambda b^3 : Ca^3}}{(1 + k\,\text{coſ}.s)^2}$. Nam ſi $d\zeta$ denotat motum horarium ſolis medium, erit $d\Phi$ ſeu ds motus horarius corporis verus, quatenus ex puncto C ſpectatur. Hinc ergo erit motus horarius ſolis medius, qui eſt $148''$ ad motum horarium corporis, vt 1 ad $(1 + k\,\text{coſ}.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{\Lambda b^3}}$: vnde motus horarius corporis erit $= 148''(1 + k\,\text{coſ}.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{\Lambda b^3}}$. Seu cum ſit $x = \frac{b}{1 + k\,\text{coſ}.s}$, erit $(1 + k\,\text{coſ}.s)^2 = \frac{bb}{xx}$, ideoque motus horarius erit $= 148'' \sqrt{\frac{Ca^3 b}{\Lambda x^4}}$.

COROLL.

COROLL. 5.

10. Per excentricitatem k cognoſcitur ſpecies ſectionis conicae, quam corpus percurrit; ſi enim fuerit $k = 0$, orbita corporis erit circulus, cuius radius $= b$. Sin autem valor ipſius k ſit vnitate minor, ſiue ſit affirmatiuus, ſiue negatiuus, orbita erit ellipſis, cuius ſemilatus rectum $= b$, et ſemi-axis transuerſus $= \frac{b}{1 - kk}$, et diſtantia abſidis imae $= \frac{b}{1 + k}$, et ſummae $= \frac{b}{1 - k}$. Verum, ſi tertio ſit k vnitati aequalis, ita vt $1 - kk$ fiat $= 0$, orbita erit parabola, ſeu ellipſis in infinitum elongata: ſin autem quarto valor ipſius k ſit vnitati maior, ita, vt ſit $1 - kk$ numerus negatiuus, tum orbita erit hyperbola. His autem duobus poſterioribus caſibus, et quando orbita eſt ellipſis admodum longa, vbi k prope ad vnitatem accedit, ſeries ante inuenta, quae valorem ipſius ζ exhibebat, vel fit nimis parum conuergens, vel etiam ſi $k > 1$ diuergens et imaginaria, quibus caſibus peculiari modo integratio aequationis differentialis eſt inſtituenda, cui autem non immoror.

COROLL. 6.

11. Ex aequatione integrali §. 7. inuenta, facile colligitur tempus periodicum corporis, ſiquidem in ellipſi reuoluitur. Ponatur enim $s = 360°$, ita, vt corpus ad eandem abſidem, vnde eſt egreſſum, reuertatur, et quia ſinus omnium angulorum s, $2s$, $3s$, $4s$ etc. euaneſcunt, erit $\zeta \sqrt{\frac{C a^3 (1 - kk)^{\frac{3}{2}}}{A b^3}} = 360°$; vnde conſtat, eodem tempore, quo corpus vnam periodum abſoluit, ſolem motu medio conficere angulum $\zeta = 360° \sqrt{\frac{A b^3}{C a^3 (1 - kk)^3}}$,

 ſeu

ſeu cum ſit ſemi-axis transuerſus $= \frac{b}{1-kk}$, ponatur is $= f$: at tempus periodicum aequabitur illi tempori, quo ſol motu medio abſoluit angulum $= 360^\circ V \frac{Af^3}{Ca^3}$. Haec formula, ſi ponatur $f = a$, et $C = A$, praebebit tempus periodicum ſolis, ſeu quantitatem anni medii, quae exprimetur per 360°. Vnde tempus periodicum corporis erit ad tempus vnius anni, vt $V \frac{Af^3}{Ca^3}$ ad 1, ſeu vt $V \frac{f^3}{C}$ ad $V \frac{a^3}{A}$; vel tempus periodicum corporis propoſiti erit $= V \frac{Af^3}{Ca^3}$ annis. Hinc apparet, ſi plura corpora circa diuerſa centra virium motu regulari in ellipſibus reuoluantur, fore eorum tempora periodica in ratione compoſita ex directa ſesquiplicata axium transuerſorum et inuerſa ſubduplicata virium abſolutarum, ſeu earum virium, quas centra in aequalibus diſtantiis exerunt.

PROBLEMA II.

12. *Si corpus in* M, *data celeritate et ſecundum datam directionem* M m, *proiiciatur*, *inuenire eius orbitam*, *quam ad centrum virium* C *attractum*, *deſcribit*, *ſi quidem vis*, *ad* C *tendens*, *ponatur quadratis diſtantiarum reciproce proportionalis.*

SOLVTIO.

Sit diſtantia C M $= x$, quae cognita aſſumitur, et vis in M, ad C tendens, $= \frac{C}{xx}$: deinde cum detur celeritas corporis in M, eiusque directio M m, ne angulo C M m opus habeamus, reſoluatur motus ſecundum M m in duos laterales ſecundum M μ et M n, quorum illius directio M μ ſit in C M producta, huius M n ad C M

norma-

normalis. Sint autem $M\mu$ et Mn ea ſpatiola, quae a corpore confici concipiuntur, dum Sol motu medio angulum $d\zeta$ ſeu ſpatiolum ad ζ percurrit; ac ponatur $M\mu = m\,d\zeta$ et $Mn = n\,d\zeta$, ita, vt celeritas motus ſecundum $M\mu$ ſit ad ſolis celeritatem mediam vt m ad a, et celeritas motus ſecundum Mn ad celeritatem ſolis mediam vt n ad a. Praeter x et C igitur dantur quoque quantitates m et n; tum vero etiam datur angulus $ACM = \Phi$, ſeu poſitio lineae CM reſpectu lineae fixae CAa: hinc cum angulus MCm ſit $= d\Phi$, qui tempuſculo $d\zeta$ abſoluitur, erit $d\Phi = \frac{n\,d\zeta}{x}$, et $dx = mn = m\,d\zeta$: actio enim vis $\frac{C}{xx}$, quatenus corpus de via Mm retrahit, in elementis $d\Phi$ et dx tantum differentialia ſecundi gradus producit.

His poſitis, quae ſunt cognita, ſit P orbitae, quam corpus eſt deſcripturum, abſis ima et angulus $ACP = \omega$, anomalia vera ſeu angulus $PCM = s$; ſemi-latus rectum orbitae $= b$, et excentricitas $= k$. Quae quantitates, cum quaerantur, habebimus ex problemate praecedente primo $x = \frac{b}{1 + k\,coſ.s}$ deinde $d\zeta = \frac{ds}{(1 + k\,coſ.s)^2} V \frac{Ab^3}{Ca^2}$; et tertio $d\Phi = ds$, ob $\Phi = \omega + s$ et angulum ω conſtantem; ideoque $ds = \frac{n\,d\zeta}{x}$: quo valore ſubſtituto fiet $x = \frac{n}{(1 + k\,coſ.s)^2} V \frac{Ab^3}{Ca^2} = \frac{b}{1 + k\,coſ.s}$; hincque $n V \frac{Ab}{Ca^2} = 1 + k\,coſ.s$. Praeter ea ob $dx = m\,d\zeta$ aequatio $x = \frac{b}{1 + k\,coſ.s}$ differentiata dat $dx = \frac{bk\,ds\,ſin.s}{(1 + k\,coſ.s)^2} = m\,d\zeta = \frac{nbk\,d\zeta\,ſin.s}{x(1 + k\,coſ.s)^2}$. Ergo $m(1 + k\,coſ.s) = nk\,ſin.s$. Tres ergo nacti ſumus aequationes, ex quibus tres noſtras incognitas b, s et k definire oportet. Scilicet $b = x(1 + k\,coſ.s)$; $n V \frac{Ab}{Ca^2} = 1 + k\,coſ.s$ atque $m(1 + k\,coſ.s) = nk\,ſin.s$; at valor ipſius $1 + k\,coſ.s$

ex prima, qui eſt $\frac{b}{x}$ in ſecunda ſurrogatus dat $n\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}} = \frac{b}{x}$ ſeu $Annxx = Ca^3 b$, vnde fit $b = \frac{Annxx}{Ca^3}$; ſicque iam conſtat latus rectum orbitae. Porro ob $\frac{Annxx}{Ca^3} = x(1 + k\,\mathrm{cof.}\,s)$ habebimus $1 + k\,\mathrm{cof.}\,s = \frac{Annx}{Ca^3} = \frac{nk\,\mathrm{ſin.}\,s}{m}$; vnde obtinemus $k = \frac{Amnx}{Ca^3\,\mathrm{ſin.}\,s}$: ſicque erit $1 + \frac{Amnx\,\mathrm{cof.}\,s}{Ca^3\,\mathrm{ſin.}\,s} = \frac{Annx}{Ca^3}$; vnde elicitur $\frac{\mathrm{cof.}\,s}{\mathrm{ſin.}\,s} = \cot s = \frac{n}{m} - \frac{Ca^3}{Amnx} = \frac{Annx - Ca^3}{Amnx}$

et $\mathrm{ſin.}\,s = \frac{Amnx}{\sqrt{[A^2 m^2 n^2 xx + (Annx - Ca^3)^2]}}$, atque

$$\mathrm{cof}\,s = \frac{Annx - Ca^3}{\sqrt{[A^2 m^2 n^2 xx + (Annx - Ca^3)^2]}}.$$

Ex quibus definitur excentricitas:

$k = \frac{1}{Ca^3}\sqrt{[A^2 m^2 n^2 xx + (Annx - Ca^3)^2]}$

Ex datis ergo m, n, x, quibus motus, corpori initio impreſſus, determinatur et vi $\frac{C}{xx}$, orbita quam corpus deſcribet, ita definietur, vt ſit

1°. Eius ſemi-latus rectum $b = \frac{Annxx}{Ca^3}$.

2°. Eius excentricitas $k = \frac{1}{Ca^3}\sqrt{[A^2 m^2 n^2 xx + (Annx - Ca^3)^2]}$

3°. Situs lineae abſidum CP ex angulo $PCM = s$ cognoſcitur, cum ſit $\mathrm{tang.}\,s = \frac{Amnx}{Annx - Ca^3}$: erit enim longitudo abſidis imae ſeu angulus $ACP = ACM - s$. Denique motus corporis in hac orbita cognoſcetur, ſeu ad motum ſolis medium comparabitur, ope huius formulae:

$$d\zeta\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \frac{ds}{(1 + k\,\mathrm{cof.}\,s)^2}. \quad \text{Q. E. I.}$$

SCHOLION.

13. Quia excentricitas k formula irrationali exprimitur, dubium relinquitur, vtrum valor ipſius k ſit affirmatiue accipiendus, an negatiue; vel quod eodem redit, an angulus $PCM = s$ elongationem corporis ab abſide

ima

ima exhibeat, an ab abſide ſumma? Verum hoc dubium ceſſabit, ſi ad directionem motus ſecundum $M\mu$ attendamus, ſeu ad valorem ipſius m, qui, ſi fuerit affirmatiuus, indicat, corporis a puncto C diſtantiam augeri, ex quo manifeſtum eſt, id ab abſide ima ad ſummam progredi, ideoque punctum P abſidem imam referre, vnde angulus PCM duobus rectis erit minor, hincque ſin. s affirmatiuus: quam ob rem excentricitas k affirmatiue erit accipienda. Quodſi autem anomaliam ſemper ab abſide ima computare inſtituamus, ſemper quoque valor excentricitatis k poſitiuus capi debet, atque tum ex expreſſione ſinus et coſinus ipſius s intelligetur, vtrum angulus PCM ſit duobus rectis maior an minor: cum ſit ſin. $s = \frac{Amnx}{Ca^4 k}$ et coſ. $s = \frac{Annx - Ca^3}{Ca^3 k}$.

COROLL. I.

14. Si corpus in M perpendiculariter ad CM proiiciatur, vt motus $m d\zeta$ euaneſcat, in ipſo puncto M erit abſis vel ſumma vel ima: Vtra autem ibi exiſtat, ſic explorabitur. Cum poſito $m = 0$ ſit $k = \pm \frac{Annx - Ca^3}{Ca^3}$, prout $Annx$ ſit vel maius vel minus quam Ca^3; ita vt valor ipſius k prodeat affirmatiuus; fiet coſ. $s = +1$ ſi $Annx > Ca^3$, et coſ. $s = -1$ ſi $Annx < Ca^3$. Priori ergo caſu ſi $Annx > Ca^3$ in M erit abſis ima, ſin autem $Annx < Ca^3$ in M erit abſis ſumma. At ſi $Annx = Ca^3$ planum eſt, orbitam fore circulum ob excentricitatem k euaneſcentem, hoc ergo caſu, quia celeritas corporis ſecundum M n eſt $= n\,d\zeta$, exiſtente celeritate ſolis media $= a\,d\zeta$, erit celeritas corporis ad celeritatem ſolis vt $\sqrt{Ca}$ ad $\sqrt{Ax} = \sqrt{\frac{C}{x}} : \sqrt{\frac{A}{a}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

15. Cum ſit ſemi-latus rectum $b = \frac{A n n x x}{C a^3}$, patet in tantum a motu corpori ſecundum Mn impreſſo pendere, atque quadrato huius celeritatis eſſe proportionale, ita, vt motus ſecundum Mμ impreſſus valorem lateris recti plane non immutet. Semi-axis tranſuerſus vero f, quia eſt $= \frac{b}{1 - kk}$, ob $1 - kk = \frac{2 A C a^3 n n x - (mm + nn) A A n n x x}{C C a^6}$ ſeu $1 - k k = \frac{A n n x}{C C a^6} [2 C a^3 - A x (mm + nn)]$, fiet $f = \frac{C a^3 x}{2 C a^3 - A x (m m + n n)}$.

COROLL. 3.

16. Cum corpus nunc verſetur in M, definiri poterit tempus, quo ante per abſidem imam P tranſire debuit, ſi iam ante hunc motum eſſet proſecutum. Tempus hoc deſignabitur angulo ζ, quem inter ea ſol motu medio abſoluit, et qui per integrationem huius aequationis

$$d\zeta \sqrt{\frac{C a^3}{A b^3}} = \frac{d s}{(1 + k \operatorname{coſ}. s)^2} \quad \text{elici debet.}$$

Supra autem vidimus (7) eſſe integratione per approximationem inſtituta

$$\zeta \sqrt{\frac{C a^3 (1 - k k)^3}{A b^3}} = s - 2 k \operatorname{ſin}. s + \mathfrak{A} k k \operatorname{ſin}. 2 s - \mathfrak{B} k^3 \operatorname{ſin}. 3 s$$
$$+ \mathfrak{C} k^4 \operatorname{ſin}. 4 s - \mathfrak{D} k^5 \operatorname{ſin}. 5 s + \mathfrak{E} k^6 \operatorname{ſin}. 6 s - \text{etc.}$$

vbi porro breuitatis gratia:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{3}{4}(1 + \tfrac{1}{6}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{1}{32}k^6); \; \mathfrak{B} = \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4)$$
$$\mathfrak{C} = \tfrac{5}{32}(1 + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{3}{8}k^4); \; \mathfrak{D} = \tfrac{1}{16}(1 + \tfrac{5}{6}k^2); \; \mathfrak{E} = \tfrac{7}{192}(1 + \tfrac{15}{14}kk).$$

Conſtantem autem ibi adiectam hic negligo, quia poſito angulo $s = 0$ ſimul tempus, quod angulo ζ refertur, euaneſcere debet. Tempus ergo hoc quaeſitum tantum eſt, cuius interuallo ſol motu medio percurrit angulum

$$\zeta = (s - 2k \operatorname{ſin}. s + \mathfrak{A} k^2 \operatorname{ſin}. 2 s - \mathfrak{B} k^3 \operatorname{ſin}. 3 s + \mathfrak{C} k^4 \operatorname{ſin}. 4 s - \text{etc.}) \sqrt{\frac{A b^3}{C a^3 (1 - kk)^3}}.$$

vnde hoc tempus facile aſſignatur. PRO-

PROBLEMA III.

17. *Si corpus, quod motu regulari* A P M *circa* C *deſcripſit, cum peruenerit in* M *hic impetu quocunque percutiatur, vt eius celeritas et directio in* M *inde ſubito mutetur, inuenire orbitam, quam poſt hunc ictum acceptum proſequetur.* Fig. 7.

SOLVTIO.

Quia orbita, quam corpus ante ictum in M deſcribit, ponitur data, ſit CP eius abſis ima et angulus ACP $= \omega$; tum ſit orbitae ſemi-latus rectum $= b$; excentricitas $= k$, et anomalia vera ſeu angulus PCM $= s$, tempus autem, quo ab abſide ima ad M peruenerit, exprimatur angulo ζ, quem ſol interea motu medio deſcripſerit. Sit porro angulus $ACM = \omega + s = \Phi$, et diſtantia $CM = x$, erit $x = \frac{b}{1 + k\,\text{coſ.}s}$ et $\zeta = (s - 2k\,\text{ſin.}s + \mathfrak{A}k^2\,\text{ſin.}2s - \mathfrak{B}k^3\,\text{ſin.}3s + \mathfrak{C}k^4\,\text{ſin.}4s - \text{etc.}) \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3(1-kk)^3}}$ poſita vi centrali in $M = \frac{C}{xx}$. Nunc conſideretur motus verus, quem corpus in M habebit, qui reſoluatur, vt ante ſecundum directiones $M\mu$ et Mn, quorum illius celeritas ſeu ſpatium tempuſculo $d\zeta$ percurſum ſit $M\mu = m\,d\zeta$, huius vero $Mn = nd\zeta$, erit, vti ex problemate praecedenti colligere licet $n = (1 + k\,\text{coſ.}s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $m = k\,\text{ſin.}s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$. Nunc autem ictu in M ſubito facto motus corporis in M ita immutetur, vt eius celeritas ſecundum $M\mu$ fiat $M\mu' = m'd\zeta$, et celeritas ſecundum Mn fiat $Mn' = n'd\zeta$; hac vero motus mutatione facta, corpus in alia orbita progredi perget, quae ſit A′P′M, cuius abſidis imae P′ longitudo ſit $A'CP' = \omega'$, ſemi-latus rectum $= b'$, excentricitas $= k'$, et anomalia

vera ſeu angulus $P'CM = s'$. Tempus autem, quo ex P' in M perueniſſet, ſi iam ante in orbita hac noua cucurriſſet, ſit $= \zeta'$ et $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ etc. ſint valores harum litterarum, quas ob mutatum excentricitatis k valorem in k' induent: eritque $\zeta' = (s' - 2k' \text{ſin } s' + \mathfrak{A}'k'^2 \text{ſin.} 2s' - \mathfrak{B}'k'^3 \text{ſin.} 3s' + \text{etc.}) \sqrt{\frac{A\, b'^3}{C a^3 (1 - k'k')^3}}$. Verum ob angulum ACM et diſtantiam CM eadem nunc ac ante percuſſionem erit $\omega + s = \omega' + s'$ et $\frac{b}{1 + k \cos s} = \frac{b'}{1 + k' \cos s'}$. Praeterea vero ob motum corpori in M de nouo impreſſum erit $n' = (1 + k' \text{coſ. } s') \sqrt{\frac{C a^3}{A b'}}$ et $m' = k' \text{ ſin. } s' \sqrt{\frac{C a^3}{A b'}}$ vnde ob $x = \frac{b}{1 + k \cos s} = \frac{b'}{1 + k' \cos s'}$ per problema praecedens reperitur.

Primo $b' = \frac{A n'n'xx}{C a^3}$

Secundo $k' = \frac{1}{C a^3} \sqrt{[A^2 m'm'n'n'xx + (An'n'x - Ca^3)^2]}$

Tertio $\text{tang.} s' = \frac{A m' n' x}{A n'n'x - Ca^3}$ ſiue

$\text{ſin.} s' = \frac{A m'n'x}{C a^3 k'}$ et $\text{coſ.} s' = \frac{A n'n'x - C a^3}{C a^3 k'}$.

Hincque ergo noua orbita, in qua corpus poſt acceptum impetum feretur, innoteſcet vna cum poſitione lineae abſidum ſeu angulo $\omega' = \omega + s - s'$. Et quia tempus ab abſide ima P' elapſum conſtat ζ', etiam poſt hac pro quouis tempore dato, ſi angulus ſolaris interea deſcriptus ad ζ' addatur, anomalia vera illi tempori reſpondens inueſtigari, ſicque locus corporis in noua orbita ad quodvis tempus aſſignari poterit. Q. E. I.

COROLL. 1.

18. Quia eſt pro orbita, in qua ante percuſſionem factam corpus mouebatur, $b = \frac{A n n x x}{C a^3}$, et pro noua $b' = \frac{A n' n' x x}{C a^3}$ erit $\frac{b'}{b} = \frac{n' n'}{n n}$ ſeu $b' = \frac{n' n'}{n n} b$. Vnde patet

patet, ſi motus ſecundum normalem Mn ab ictu non fuerit immutatus, tum etiam latus rectum orbitae nullum neque augmentum, neque decrementum recipere. Verum ſi ab ictu motus ſecundum Mn acceleretur, latus rectum augebitur in duplicata ratione auctae celeritatis, contra in eadem ratione diminuetur, ſi motus ſecundum Mn retardetur ab ictu.

COROLL. 2.

19. Inuento ſemi-latere recto nouae orbitae b', quia eſt $Ca^3 = \frac{A n' n' x x}{b'}$, anomalia vera noua s', quae per hanc formulam $\text{tang.} s' = \frac{A m' n' x}{A n' n' x - Ca^3}$ eſt definita, etiam hoc ſimpliciori modo determinari poterit per hanc formulam $\text{tang.} s' = \frac{b' m'}{n'(b' - x)}$. Angulo autem s' inuento excentricitas nouae orbitae k' colligetur ex formula $x = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$, vnde fit $k' = \frac{b' - x}{x \cos. s'}$.

COROLL. 3.

20. Hinc ergo ſi planeta, qui alias circa ſolem motu regulari ferretur, a cauſa quacunque ſubito percutiatur, atque ab hoc ictu eius vterque motus tam ſecundum $M\mu$ quam ſecundum Mn, quae eſt recta ad CM normalis, alteretur orbita, quam poſt ictum ſequetur, determinabitur. Hoc enim problemate orbitae immutatae tam latus rectum b' cum excentricitate k', quam longitudo perihelii $A'CP' = \omega' = \omega + s - s'$ aſſignari poterit. Tum vero momento, quo percuſſio fit, tempus a perihelio, quod angulo ſolari ζ' definitur, per formulam erutam, reperitur: ad quod ſi deinceps tempus quodcunque

elapſum in angulo pariter ſolari addatur, et ſumma pro ζ ſcribatur, ex eadem formula anomalia vera ſeu longitudo planetae a nouo perihelio eruetur. Quae autem hic de percuſſionibus ſubitaneis ſunt dicta, ad ſollicitationes continuas facile transferri poſſunt, cum quaeuis ſollicitatio continua in infinitas percuſſiones ſubitaneas, quae infinite paruis temporis interuallis ſe inuicem inſequuntur, reſolui poſſit; ad quod negotium ſequentis problematis ſolutione erit opus.

PROBLEMA IV.

28. *Si ictus, quem corpus, quod adhuc in orbita* A P M *motu regulari ferebatur, ſubito in* M *patitur, fuerit infinite paruus, definire tam orbitae, quam motus, quo corpus poſt ictum feretur, mutationem.*

SOLVTIO.

Quia ictus ponitur infinite paruus, mutatio, quae inde in motu corporis ſecundum directiones M μ et M n reſoluto, orietur, erit infinite parua. Sic cum ante ictum celeritas corporis ſecundum M μ fuerit $= m\, d\,\zeta$ et ſecundum M $n = n\, d\,\zeta$, ponatur ictu facto celeritas ſecundum M $\mu = (m + dm)\, d\zeta$ et ſecundum M $n = (n + dn)\, d\zeta$, erit ſolutione praecedentis problematis huc translata, $m' = m + dm$ et $n' = n + dn$. Tum ſit ante ictum locus abſidis imae ſeu angulus A C P $= \omega$; orbitae ſemi-latus rectum $= b$, excentricitas $= k$, anomalia vera ſeu angulus P C M $= s$, et tempus ab abſide ima $= t$, quod in arcu ſolari eodem tempore confecto exprimatur. Loco ζ autem hic malo vti littera t, quia poſtea ζ ad tempus quodcunque denotandum adhibebitur. Porro ſit diſtantia

CM $= x$; et angulus ſeu longitudo vera ACM $= \phi$; eritque $x = \frac{b}{1 + k\cos.s}$; $\phi = \omega + s$; et $t = (s - 2k\sin s + \mathfrak{A}k^2\sin.2s - \mathfrak{B}k^3\sin.3s + \text{etc.})\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3(1-kk)^3}}$ poſita vi centrali $= \frac{C}{xx}$, vi ſolis $= \frac{A}{xx}$ et diſtantia ſolis a terra media $= a$. Pro orbita autem, quam corpus poſt ictum deſcribet, ſit, quia omnes mutationes erunt infinite paruae, longitudo abſidis imae $A'CP' = \omega' = \omega + d\omega$; orbitae ſemi latus rectum $b' = b + db$; excentricitas $k' = k + dk$, anomalia vera $P'CM = s' = s + ds$; et tempus ab abſide ima $= t' = t + dt$, quod pro ζ' ſcribi debet.

Erit ergo $d\omega = -ds$, et ds cum reliquis mutationibus db, dk et dt ſequenti modo inuenietur. Cum ſit $m = k\sin.s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $n = (1 + k\cos.s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$, quia inuenimus $b' = \frac{n'n'}{nn}b$, poſito $b + db$ pro b' et $n + dn$ pro n' habebimus $db = \frac{2ndn}{nn}b = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$. Deinde ob tang. $s' = \frac{b'm'}{n'(b'-x)}$ erit $l\text{tang}.s' = lb' + lm' - ln' - l(b'-x)$ ideoque differentiando $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \frac{db}{b} + \frac{dm}{m} - \frac{dn}{n} - \frac{db}{b-x}$, et ob $db = \frac{2bdn}{n}$ erit $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \frac{dm}{m} + \frac{dn}{n} - \frac{2bdn}{n(b-x)}$ $= \frac{dm}{m} - \frac{(b+x)dn}{n(b-x)}$, vnde pro m et n ſubſtitutis valoribus erit $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \left(\frac{dm}{k\sin.s} - \frac{(b+x)dn}{(1+k\cos.s)(b-x)}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$.
et quia $x = \frac{b}{1+k\cos.s}$ et $\frac{b+x}{b-x} = \frac{2+k\cos.s}{k\cos.s}$, erit $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \left(\frac{dm}{k\sin.s} - \frac{dn(2+k\cos.s)}{(1+k\cos.s)k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$, ideoque $ds = -d\omega = \frac{1}{k}\left(dm\cos.s - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$.
Denique ob $k' = \frac{b'-x}{x\cos.s}$ ſeu $lk' = l(b'-x) - lx - l\cos.s$, erit $\frac{dk}{k} = \frac{db}{b-x} + \frac{ds\sin.s}{\cos.s} = \frac{2bdn}{n(b-x)} + \frac{ds\sin.s}{\cos.s}$,
et ob $\frac{b}{b-x} = \frac{1+k\cos.s}{k\cos.s}$ et $n = (1 + k\cos s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$.
$\frac{dk}{k} = \frac{2dn}{k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}} + \frac{\sin.s}{k\cos.s}\left(dm\cos.s - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$ ſeu

ſeu $dk = \frac{1}{cof.s}\left(dm\,\text{fin.}s\,\text{cof.}s + 2\,dn - \frac{dn(2+k\,\text{cof.}s)\,\text{fin.}s^2}{1+k\,\text{cof.}s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$
vel $dk = \left(dm\,\text{fin.}\,s + \frac{dn(2\,\text{cof.}\,s + k + k\,\text{cof.}\,s^2)}{1+k\,\text{cof.}\,s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$
Sicque iam haec tria differentialia db, dk et ds ſeu $d\omega$ elicuimus; reſtat ergo, vt mutationem in tempore t ab abſide ortam eruamus; quod fiet differentiatione aequationis

$$t\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = (1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\,\text{fin.}s + \mathfrak{A}k^2\,\text{fin.}\,2s - \mathfrak{B}k^3\,\text{fin.}\,3s + \text{etc.})$$

ponendis b, k, s et t variabilibus, et ſcribendis pro db, dk et ds valoribus iam inuentis. At eſt, vt ex ſuperioribus conſtat $(1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\,\text{fin.}\,s + \mathfrak{A}k^2\,\text{fin.}\,2s - \mathfrak{B}k^3\,\text{fin.}\,3s + \text{etc.})$ $= \int\frac{ds}{(1+k\,\text{cof.}s)^2}$ ſi in hac integratione tantum s, vt quantitas variabilis tractetur. Viciſſim ergo huius formulae differentiale, ſi k conſtans ſumatur, erit $= \frac{ds}{(1+k\,\text{cof.}s)^2}$, at ſi ſimul k pro variabili habeatur, ponamus, eſſe differentiale completum $= \frac{ds}{(1+k\,\text{cof.}s)^2} + S\,dk$ atque conſtat differentiale primi termini $\frac{ds}{(1+k\,\text{cof.}s)^2}$ poſito k tantum variabili aequale eſſe debere differentiali poſterioris termini $S\,dk$ poſito tantum s variabili, ſit igitur $dS = V\,ds$, eritque $-\frac{2\,dk\,ds\,\text{cof.}s}{(1+k\,\text{cof.}s)^3} = V\,ds\,dk$, ac proinde $V = -\frac{2\,\text{cof.}s}{(1+k\,\text{cof.}s)^3}$: et $S = \int -\frac{2\,ds\,\text{cof.}s}{(1+k\,\text{cof.}s)^3}$. Quare huius formulae

$$(1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\,\text{fin.}s + \mathfrak{A}k^2\,\text{fin.}2s - \mathfrak{B}k^3\,\text{fin.}3s + \text{etc.})$$

differentiale plenum, ſi tam k quam s varientur, erit

$$\frac{ds}{(1+k\,\text{cof.}s)^2} - 2\,dk\int\frac{ds\,\text{cof.}s}{(1+k\,\text{cof.}s)^3}$$

Verum eſt $\int\frac{ds\,\text{cof.}s}{(1+k\,\text{cof.}s)^3} = \frac{1}{k}\int\frac{ds(k\,\text{cof.}s + 1 - 1)}{(1+k\,\text{cof.}s)^3} = \frac{1}{k}\int\frac{ds}{(1+k\,\text{cof.}s)^2}$ $- \frac{1}{k}\int\frac{ds}{(1+k\,\text{cof.}s)^3}$, atque huius formulae poſterioris valor integralis perinde reperietur ac prioris. Ponamus igitur, quoniam haec integralia, tanquam cognita, ſpectare licet:

$\int\frac{ds}{(1+k}$

$\int \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} = P$ et $\int \frac{ds}{(1+k\cos.s)^3} = Q$ vbi quidem k, vt quantitas conſtans ſpectatur, et integralia P et Q ita capiuntur, vt euaneſcant poſito $s = 0$.

eritque $t\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = P$ ſeu $t = P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, vnde cum ſumto tam k quam s variabili ſit $dP = \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - \frac{2dk}{k}(P-Q)$ erit

$$dt = \left[\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - \frac{2dk}{k}(P-Q) + \frac{3P\,db}{2b}\right]\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$$

quod eſt incrementum temporis ab abſide ima elapſi, ab effectu percuſſionis oriundum, vbi autem pro db, ds et dk valores ante inuenti ſcribi debent, ſcilicet:

$$db = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}} \text{ ſeu } \frac{db}{b} = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

$$ds = \frac{1}{k}\left(dm\cos.s - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

$$dk = \left(dm\sin.s + \frac{dn(2\cos.s + k + k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

qua facta ſubſtitutione, erit

$$dt = \left\{\begin{matrix} \frac{dm\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} - \frac{2(P-Q)dm\sin.s}{k} \\ -\frac{2(P-Q)dn(2\cos.s + k + k\cos.s^2)}{k(1+k\cos.s)} + \frac{3P\,dn}{1+k\cos.s} \end{matrix}\right\}\frac{Abb}{Ca^3}$$

At hoc impulſu mutatio in loco abſidis imae facta erit

$$d\omega = \frac{1}{k}\left(\frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s} - dm\cos.s\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$$

Quibus formulis tota mutatio tam in orbita quam in motu, quae ab impulſu infinite paruo oritur, continetur. Q. E. I.

SCHOLION.

22. Quod ad valores formularum P et Q attinet priorem P iam ſupra inuenimus eſſe:

P =

$$\begin{aligned} P = \; & s\,(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{15}{8}k^4 + \tfrac{35}{16}k^6 + \tfrac{315}{128}k^8 + \text{etc.}) \\ & - 2k\,\text{ſin}.s\,(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{15}{8}k^4 + \tfrac{35}{16}k^6 + \text{etc.}) \\ & + \tfrac{3}{4}k^2\,\text{ſin}.2s\,(1 + \tfrac{5}{3}k^2 + \tfrac{35}{16}k^4 + \tfrac{21}{8}k^6 + \text{etc.}) \\ & - \tfrac{1}{3}k^3\,\text{ſin}.3s\,(1 + \tfrac{15}{8}k^2 + \tfrac{21}{8}k^4 + \text{etc.}) \\ & + \tfrac{5}{32}k^4\,\text{ſin}.4s\,(1 + \tfrac{21}{10}k^2 + \tfrac{63}{20}k^4 + \text{etc.}) \\ & - \tfrac{1}{16}k^5\,\text{ſin}.5s\,(1 + \tfrac{7}{3}k^2 + \text{etc.}) \\ & + \tfrac{7}{192}k^6\,\text{ſin}.6s\,(1 + \tfrac{18}{7}k^2 + \text{etc.}) \\ & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Simili autem modo inueniemus $Q = \int \frac{ds}{(1 + k\,\text{coſ}.s)^2}$, ſed cum in noſtra aequatione occurrat $\frac{1}{k}(P - Q) = \int \frac{ds\,\text{coſ}.s}{(1 + k\,\text{coſ}.s)^3}$, praeſtabit ſtatim huius formulae valorem integralem inueſtigare. Cum igitur ſit

$$\frac{\text{coſ}.s}{(1 + k\,\text{coſ}.s)^3} = \text{coſ}.s - 3k\,\text{coſ}.s^2 + 6k^2\,\text{coſ}.s^3 - 10k^3\,\text{coſ}.s^4 + 15k^4\,\text{coſ}.s^5 - 21k^5\,\text{coſ}.s^6 + 28k^6\,\text{coſ}.s^7 - 36k^7\,\text{coſ}.s^8 \text{ etc.}$$

reductis poteſtatibus coſ.s ad coſinus angulorum multiplorum erit

$$\begin{aligned} & - k\,(\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{4}k^2 + \tfrac{105}{16}k^4 + \tfrac{315}{32}k^6 + \text{etc.}) \\ \frac{\text{coſ}.s}{(1 + k\,\text{coſ}.s)^3} = \; & \text{coſ}.s\,(1 + \tfrac{9}{2}kk + \tfrac{75}{8}k^4 + \tfrac{245}{16}k^6 + \text{etc.}) \\ & - k\,\text{coſ}.2s\,(\tfrac{3}{2} + 5k^2 + \tfrac{315}{32}k^4 + \tfrac{63}{4}k^6 + \text{etc.}) \\ & + k^2\,\text{coſ}.3s\,(\tfrac{3}{2} + \tfrac{75}{16}k^2 + \tfrac{147}{16}k^4 + \text{etc.}) \\ & - k^3\,\text{coſ}.4s\,(\tfrac{5}{4} + \tfrac{63}{16}k^2 + \tfrac{63}{8}k^4 + \text{etc.}) \\ & + k^4\,\text{coſ}.5s\,(\tfrac{15}{16} + \tfrac{49}{16}k^2 + \text{etc.}) \\ & - k^5\,\text{coſ}.6s\,(\tfrac{21}{32} + \tfrac{9}{4}k^2 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

vnde

vnde integratione peracta reperietur:

$$\begin{aligned}\tfrac{k}{1}(P-Q) = &- \tfrac{3}{2}\,k\,s\,(1 + \tfrac{5}{2}k^2 + \tfrac{35}{8}k^4 + \tfrac{105}{16}k^6 + \text{etc.})\\ &+ \text{ſin.}\,s\,(1 + \tfrac{9}{2}k^2 + \tfrac{75}{8}k^4 + \tfrac{245}{16}k^6 + \text{etc.})\\ &- \tfrac{3}{4}k\,\text{ſin.}\,2s\,(1 + \tfrac{19}{3}k^2 + \tfrac{105}{16}k^4 + \tfrac{21}{2}k^6 + \text{etc.})\\ &+ \tfrac{1}{2}k^2\,\text{ſin.}\,3s\,(1 + \tfrac{25}{8}k^2 + \tfrac{49}{8}k^4 + \text{etc.})\\ &- \tfrac{5}{16}k^3\,\text{ſin.}\,4s\,(1 + \tfrac{63}{20}k^2 + \tfrac{63}{10}k^4 + \text{etc.})\\ &+ \tfrac{3}{16}k^4\,\text{ſin.}\,5s\,(1 + \tfrac{49}{15}k^2 + \text{etc.})\\ &- \tfrac{7}{64}k^5\,\text{ſin.}\,6s\,(1 + \tfrac{24}{7}k^2 + \text{etc.})\end{aligned}$$

PROBLEMA V.

23. *Si corpus, quod ad centrum virium* C *attrahitur in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, inſuper in ſingulis punctis* M *ſollicitetur viribus quibuscunque, inuenire continuam, tam orbitae, quam motus variationem, quae ab his viribus perturbantibus producetur.* Fig. 8.

SOLVTIO.

Exprimat $\frac{C}{xx}$ vim, qua corpus continuo ad centrum C vrgetur, quae ſi ſola ageret, corpus motu regulari circa C gyraretur. Vis autem quae praeter ea in corpus agit, eiusque motum perturbat, in ſingulis punctis M reſoluatur ſecundum directiones MC et MN, quarum haec ad illam ſit normalis. Ponatur vis acceleratrix ſecundum $MC = M$ et vis acceleratrix ſecundum $MN = N$, quas vires M et N perturbantes vocabo. Peruenerit corpus ab his viribus ſollicitatum in M, exiſtente $CM = x$, et $ACM = \Phi$; atque ſi nunc vires perturbantes ceſſarent, corpusque poſthac a ſola vi $\frac{C}{xx}$ traheretur; id motu regulari incederet, orbitamque ellipticam eſſet deſcripturum; pro quo motu regulari ponamus

Longitudinem abſidis imae ſeu angulum $ACP = \omega$

ſemi-latus rectum orbitae $= b$
excentricitatem $= k$

Corporis, dum in M verſatur, anomaliam veram $PCM = s$ et tempus ab abſide ima elapſum $= t$. Quibus poſitis, erit $x = \frac{b}{1 + k\cos s}$; $\phi = \omega + s$, atque $t = P\sqrt{\frac{Ab^2}{Ca^3}}$, exiſtente $P = \int \frac{ds}{(1 + k\cos s)^2}$, cuius valorem iam ante inuenimus. Nunc vero, quia corpus, dum in M verſatur, a duabus viribus M et N perturbantibus ſollicitatur, a vi M eius motus ſecundum $M\mu$ diminuetur ita, vt ſecundum hunc motum tempusculo $d\zeta$ non ſpatium $m\,d\zeta$, ſed ſpatium $m\,d\zeta - \frac{1}{2}M\,dt^2 = m\,d\zeta - \frac{Ma^3}{A}\,d\zeta^2$ percurrat; ob vim autem N ſecundum Mn ſpatium conficiet eodem tempusculo $= n\,d\zeta - \frac{Na^3}{A}\,d\zeta^2$. Qui effectus quanquam tempusculo $d\zeta$ eduntur, concipiamus tamen eos ſubito corpori in M imprimi; eritque propterea, ſolutione praecedentis problematis huc translata, $dm = -\frac{Ma^3}{A}d\zeta$, et $dN = -\frac{Na^3}{A}\,d\zeta$. Hanc ob rem nunc quidem corpus in alia orbita apm progredi pergeret, niſi deinceps a viribus perturbantibus afficeretur atque noua haec orbita a praecedente ita differet, vt nunc ſit

ſemi-latus rectum $= b - \frac{2N\,d\zeta}{1 + k\cos s}\sqrt{\frac{a^3 b^3}{AC}}$

excentricitas $= k - d\zeta\left(M\sin s + \frac{N(2\cos s + k + k\cos s^2)}{1 + k\cos s}\right)\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$

locus abſidis $= \omega + \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos s - \frac{N(2 + k\cos s)\sin s}{1 + k\cos s}\right)\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$

anomalia vera $= s - \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos s - \frac{N(2 + k\cos s)\sin s}{1 + k\cos s}\right)\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$

At tempus ab abſide ima p ad M vsque elapſum erit

$$= t - d\zeta\left(\frac{M\cos s}{k(1 + k\cos s)^2} - \frac{N(2 + k\cos s)\sin s}{k(1 + k\cos s)^3} - \frac{2N(P - Q)(2\cos s + k + k\cos s^2)}{k(1 + k\cos s)}\right)\frac{bb}{C}$$
$$- \frac{2}{k}M(P\;Q)\sin s + \frac{3NP}{1 + k\cos s}$$

Verum quia haec mutatio re vera tempusculo $d\zeta$ abſol-
vitur

vitur, ea tum demum, cum corpus elapſo tempuſculo $d\zeta$ in m peruenerit, perfecta eſt ſtatuenda, ſicque cum corpus in m verſatur, quod fit confecto angulo $MCm = d\Phi = d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, vti ex problemate primo, ob $ds = d\Phi$, colligere licet, locus abſidis imae, ſemilatus rectum et excentricitas eos habebunt valores, quos modo aſſignauimus, at anomalia vera ante inuenta nunc augebitur angulo $MCm = d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, et tempus ab abſide ima elapſum augebitur tempuſculo $d\zeta$: ideoque nunc, dum corpus in m verſatur, erit

anomalia vera $= s + d\zeta(1+k\cos.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$,

et tempus ab abſide ima elapſum nunc erit

$$t + d\zeta - \frac{bbd\zeta}{C}\left(\frac{M\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} - \frac{2}{k}M(P-Q)\sin.s + \frac{2NP}{1+k\cos.s} - \frac{2N(P-Q)(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{k(1+k\cos.s)}\right)$$

Hinc ſi tum, cum corpus in m exiſtit ſecundum legem continuitatis, ponamus

locum Abſidis imae aCp	$= \omega + d\omega$
ſemi-latus rectum	$= b + db$
excentricitatem	$= k + dk$
anomaliam veram	$= s + ds$
tempus ab abſide	$= t + dt$

habebimus harum differentialium ſequentes valores,

$$db = -\frac{2Nd\zeta}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{a^3b^3}{AC}}$$

$$dk = -d\zeta\left(M\sin.s + \frac{N(2\cos.s + k + k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

ac ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{1}{k}(P-Q) = R$, erit

$$dt = d\zeta - \frac{bbd\zeta}{C}\left(\frac{M\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} + \frac{2NP}{1+k\cos.s} - 2MR\sin.s - \frac{2NR(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)$$

 Supra

Supra autem vidimus, ſi quantitas $P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$ differentietur ſumtis b, k et s variabilibus, eius differentiale fore
$$\left(\frac{ds}{(1+k\cos s)^2}-2R\,dk+\frac{3P\,db}{2b}\right)\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}} \text{ ob } R=\tfrac{1}{k}(P-Q)$$
in quo, ſi pro ds, dk et db valores modo inuenti ſubſtituantur, eadem emergit expreſſio, quam pro valore dt eruimus, vnde ſequitur, fore
$dt=d.P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, ideoque integrando $t=P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$.
Deinde continua tam orbitae, quam motus mutatio per integrationes formularum db, dk, $d\omega$ et ds debet inveſtigari, quo facto ad quoduis tempus propoſitum orbita, in qua corpus tum mouetur, eiusque in ea locus definiri poterit. Erit autem $dx=k\,d\zeta\,\text{ſin.}s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$
et $ddx=k\,d\zeta^2\,\text{coſ.}s(1+k\,\text{coſ.}s)^2\frac{Ca^3}{Abb}-\frac{Ma^3d\zeta^2}{A}$
qui valor, cum $d\Phi=d\zeta(1+k\,\text{coſ.}s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, ſatisfacit aequationibus $2\,dx\,d\Phi+x\,dd\Phi=-\frac{Na^3}{A}d\zeta^2$, et $ddx-x\,d\Phi^2=-\frac{Ca^3d\zeta^2}{Axx}-\frac{Ma^3}{A}d\zeta^2$. Q. E. I.

COROLL. 1.

24. Quia t indicat tempus, quo corpus ab abſide ima p in M peruenturum fuiſſet, ſi motu regulari ita eſſet ingreſſum, vt in M eam, quam ibi iam actu habet, celeritatem acquiſiuiſſet, patet, cum corpus iam, antequam in M peruenit, a viribus M et N fuerit in motu ſuo perturbatum, id re vera nunquam in puncto p eſſe verſatum, ideoque tempore t plane non erit opus ad motum corporis cognoſcendum. Atque hinc patet cum tempus t a ſola corporis celeritate in M eiusque ibi directione pendeat, id quoque per ſolas quantitates b, k et s, quae hoc momento locum habent, determinari, neque harum

quan-

quantitatum immutationes a viribus perturbantibus M et N profectas in valorem ipſius t ingredi. Quae etiam cauſa eſt, quod formulam differentialem pro dt inuentam tam expedite licuit integrare. Quin etiam ſine reſpectu ad variationes litterarum b, k et s habito, valor ipſius t ſtatim ex ipſa rei natura elici potuiſſet, cum ſumtis b et k conſtantibus eſſe debeat $t\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \int \frac{ds}{(1+k\cos s)^2} = P$.

COROLL. 2.

25. Pro quouis ergo tempore tam orbita, quam locus corporis in ea ex formulis differentialibus, quae valores elementorum db, dk, $d\omega$ et ds exhibent, debet definiri, in quibus formulis, etſi variabiles, b, k et s ſunt maxime inter ſe permixtae, tamen ſi vires M et N ſint admodum exiguae prae vi $\frac{C}{xx}$, ac propter ea earum effectus valde parui, facile eiusmodi methodus approximandi reperietur, cuius ope ad quoduis tempus propoſitum, quod littera ζ indicatur, valores b, k, et s, itemque ω inueniri queant; praecipue ſi excentricitas k fuerit valde parua. Peruenietur autem tandem ad huiusmodi aequationem integralem.

$$\zeta = S + \text{Conſt.}$$

in qua, ſi conſtans, ita definiatur, vt poſito $s=0$, fiat $\zeta=0$, valor ipſius ζ indicabit tempus, quo corpus poſtquam de abſide ima vera, ubi erat $s=0$, exceſſerit, ad anomaliam veram s pertigerit, vnde, ſi conſtet momentum, quo fuerit ſemel $s=0$, ad quoduis tempus inde elapſum, quod angulo ſolari ζ exprimetur, ope ſuperioris aequationis anomalia vera s definietur, quae ſi addatur ad angulum ω ſeu longitudinem praeſen-

tem abſidis imae, obtinebitur longitudo vera ſeu angulus A C M. Ex reliquis enim aequationibus rite tractatis pro eodem tempore valores litterarum b, k et ω elicientur, qui ſimul in aequationem $\zeta = S +$ Conſt. ingredientur, quibus inuentis erit vera corporis a centro C diſtantia $CM = x = \frac{b}{1 + k\, cof.s}$. Verum notandum eſt pro caſuum diuerſitate ſaepe numero methodos diuerſas has aequationes tractandi adhiberi debere.

COROLL. 3.

26. Si axis orbitae transuerſus, qui pariter erit variabilis, ponatur $= f$, cum ſit $f = \frac{b}{1 - kk}$, erit $df = \frac{(1 - kk)\,db + 2\,bk\,dk}{(1 - kk)^2}$. Hic ſi pro db et dk valores ante inuenti ſubſtituantur, reperietur:

$$df = \frac{-2\,d\zeta}{(1 - kk)^2}\,[\,M\,k\,\text{ſin}.s + N\,(1 + k\,\text{coſ}.s)\,]\,\sqrt{\frac{a^3\,b^3}{A\,C}},$$

vnde patet, axem tranſuerſum ab vtraque vi perturbante M et N immutari, cum contra latus rectum tantum a vi N, cuius directio eſt ad radium C M normalis, varietur.

COROLL. 4.

27. Si vis haec perturbans N euanescat, vt motus corporis a ſola vi M, quae continuo ad centrum C tendit, perturbetur, latus rectum orbitae ob $db = 0$, perpetuo eiusdem quantitatis manebit. Pro axe trans-verſo autem erit $df = \frac{-2\,Mk\,d\zeta\,\text{ſin}.s}{(1 - kk)^2}$, qui ergo perinde atque excentricitas k et longitudo abſidis ω continuas mutationes perpetietur. Atque excentricitas quidem k diminuetur, dum corpus ab abſide ima ad ſummam progreditur, contra vero rurſus augebitur, dum corpus ab abſide ſum-

ſumma ad imam reuertitur: ſicque, prout vis M fuerit comparata fieri poteſt, vt poſt quamuis reuolutionem integram excentricitas ad priſtinam quantitatem reducatur. Linea autem abſidum promouebitur, quando coſ.s eſt affirmatiuus, contra retrocedet: fierique ſimili modo poteſt, vt linea abſidum poſt integram reuolutionem in ſitum priſtinum redigatur: quo caſu linea abſidum inuariabilis erit cenſenda, quia linea abſidum eatenus tantum mobilis aeſtimari ſolet, quatenus poſt quamque reuolutionem integram de loco ſuo mota deprehenditur. Pe ſpicuum eſt, hoc euenire debere, ſi vis perturbans M quoque ſit quadratis diſtantiarum a puncto C reciproce proportionalis; quia tum corpus motu regulari in ellipſi immobili incedet.

SCHOLION I.

28. Quodſi autem ponatur $M = \frac{B}{xx} = \frac{B(1 + k\,\text{coſ}.s)^2}{bb}$ exiſtente $N = 0$, erit b quantitas conſtans, et

$$dk = -\frac{B\,d\zeta(1 + k\,\text{coſ}.s)^2\,\text{ſin}.s}{bb}\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{B\,d\zeta(1 + k\,\text{coſ}.s)^2\,\text{coſ}.s}{bbk}\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1 + k\,\text{coſ}.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{B\,d\zeta(1 + k\,\text{coſ}.s)^2\,\text{coſ}.s}{bbk}\sqrt{\frac{a^3 b}{AC}};$$

vnde fit $\frac{ds}{dk} = -\frac{C}{B\,\text{ſin}.s} + \frac{\text{coſ}.s}{k\,\text{ſin}.s}$, ſeu $Bkds\,\text{ſin}.s = -Ckdk + Bdk\,\text{coſ}.s$, cuius integrale eſt

$\frac{1}{2}Ckk = Bk\,\text{coſ}.s + D$; vnde ſequens calculus facile expeditur. Erit enim $k = \frac{B\,\text{coſ}.s + \sqrt{(B^2\,\text{coſ}.s^2 + 2CD)}}{C}$, hincque fit $d\omega = \frac{B\,ds\,\text{coſ}.s}{\sqrt{(B^2\,\text{coſ}.s^2 + 2CD)}}$, et integrando, $\text{ſin}.\omega = \frac{B\,\text{ſin}.s}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$, ex quo patet, integra reuolutione abſoluta, tam excentricitatem k, quam locum lineae abſidum in ſtatum priſtinum reſtitui. Verum hic mirum videbitur, quod tam excentricitas

tricitas, quam linea abſidum mutabilis reperiatur, cum tamen conſtet, motum corporis eſſe regularem: ſed notandum eſt, hoc calculo non veram corporis orbitam, quae conuenit vi $= \frac{C + B}{xx}$ exhiberi, ſed quouis tempore eam per calculum orbitam indicari, quam corpus motu ſuo proſecuturum eſſet, ſi vis B ſubito ceſſaret. Simili modo reſpondebitur ad dubium, quod forte ex caſu petetur, quo vis M eſt reciproce, vt cubus diſtantiae, quoniam motus fieri in ellipſi mobili eſt demonſtratus, cuius axis et excentricitas nullam mutationem ſubeant: cum tamen hic vtrinque variatio prodeat: ſcilicet iſte modus, quo hic vtimur ad motum definiendum, prorſus eſt diuerſus ab eo, quo hoc caſu motus vulgo determinari ſolet. Verum modus hic traditus motus quoscunque perturbatos ad calculum reuocandi, tum in primis inſignem habet vſum, quando ſubinde vires perturbantes intermittunt, motuique regulari locus conceditur; quem calculus noſter ſtatim manifeſtabit. Interim tamen nullum eſt dubium, quin etiam in perturbationibus continuis ſaepe vtiliter in vſum vocari poſſit.

SCHOLION 2.

29. Caſus, quem hic ſum contemplatus, quo altera vis perturbans erat $M = \frac{B}{xx}$, altera $N = 0$, mereretur vlteriorem euolutionem, quoniam deducit ad aequationem maxime perplexam, cum tamen motus re vera ſit regularis. Quoniam inuenimus

$d\omega = \frac{B\, ds\, cos.s}{\surd(B^2 cos.s^2 + 2CD)} = \frac{B\, d\zeta (1 + k cos.s)^2\, cos.s}{bbk} \surd \frac{a^3 b}{AC}$, hinc habebimus: $d\zeta \surd \frac{a^3}{ACb^3} = \frac{k\, ds}{(1 + k cos.s)^2 \surd (B^2 cos.s^2 + 2CD)}$, vbi ſi pro k valor inuentus ſubſtituatur, $\frac{B\, cos.s + \surd(B^2 cos.s^2 + 2CD)}{C}$, prodibit

$$d\zeta \surd \frac{a^3}{ACb^3} = \frac{C\, ds\, [B\, cos.s + \surd(B^2 cos.s^2 + 2CD)]}{[C + B\, cos.s^2 + cos.s \surd(B^2 cos.s^2 + 2CD)]^2 \surd(B^2 cos.s^2 + 2CD)},$$

cuius

cuius integratio maxime ardua videtur. Verum cum certum ſit, hunc motum eſſe regularem, quia a vi $= \frac{B+C}{xx}$ oritur, iuuabit conformitatem huius formulae complicatae cum motu regulari monſtraſſe. Sit igitur verae orbitae, quam motu regulari corpus deſcribit, latus rectum $= \beta$; excentricitas $= \kappa$, et anomalia vera $= \sigma$: erit $x = \frac{\beta}{1+\kappa \, cof.\sigma}$; et diſtantia minima $= \frac{\beta}{1+\kappa}$, maxima vero $= \frac{\beta}{1-\kappa}$; Motus autem per problema primum ita erit comparatus, vt ſit $d\zeta \surd \frac{(B+C)a^3}{A\beta^3} = \frac{d\sigma}{(1+\kappa \, cof.\sigma)^2}$. At ex formulis, pro motu perturbato, inuentis eſt diſtantia $x = \frac{Cb}{C+B\,cof.s^2+cof.s.\surd(B^2 cof.s^2+2CD)}$, vnde, ſi ponatur $s = 0$, prodit diſtantia minima, maxima vero ſi $s = 180°$, ſicque erit

$$\frac{\beta}{1+\kappa} = \frac{Cb}{C+B+\surd(B^2+2CD)} \text{ et } \frac{\beta}{1-\kappa} = \frac{Cb}{C+B-\surd(B^2+2CD)}$$

ex quibus elicitur $\beta = \frac{Cb}{C+B}$ et $\kappa = \frac{\surd(B^2+2CD)}{C+B}$. Hinc porro obtinemus

$$x = \frac{Cb}{C+B+cof.\sigma.\surd(B^2+2CD)} = \frac{Cb}{C+B\,cof.s^2+cof.s\surd(B^2 cof.s^2+2CD)}$$

itaque erit $cof\,\sigma = \frac{cof.s\surd(B^2 cof.s^2+2CD)-B\,fin.s^2}{\surd(B^2+2CD)}$ et $1+\kappa\,cof.\sigma = \frac{C+B\,cof.s^2+cof\,s.\surd(B^2 cof.s^2+2CD)}{C+B}$. Cum autem ſit $fin.\omega = \frac{B\,fin.s}{\surd(B^2+2CD)}$ et $cof.\omega = \frac{\surd(BB\,cof.s^2+2CD)}{\surd(BB+2CD)}$, manifeſtum eſt, eſſe $cof\,\sigma = cof.s\,cof.\omega - fin.s\,fin.\omega$, ideoque $\sigma = s+\omega$, vnde intelligitur angulum σ a loco fixo eſſe computatum, prorſus vt in motu regulari fieri ſolet; ſumitur ſcilicet anomalia vera σ a linea abſidum, quae eſt immobilis. Deinde quia eſt $d\sigma = ds + d\omega$, at $d\omega\,cof.\omega = \frac{B\,ds\,cof.s}{\surd(BB+2CD)}$, erit $d\omega = \frac{B\,ds\,cof.s}{\surd(B^2 cof.s^2+2CD)}$ et $d\sigma = \frac{ds[B\,cof.s+\surd(B^2 cof.s^2+2CD)]}{\surd(B^2 cof.s^2+2CD)}$. Quibus valoribus pro β, $d\sigma$ et $1+\kappa\,cof.\sigma$ ſubſtitutis

aequatio ex motu regulari deducta $d\zeta\sqrt{\frac{(B+C)a^3}{Ab^3}} = \frac{d\sigma}{(1+\varkappa\,cof.\,\sigma)^2}$ induet hanc formam:

$$\frac{(B+C)^2}{CC}d\zeta\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \frac{(B+C)^2\,ds[B\,cof.\,s+\sqrt{(B^2cof.\,s^2+2CD)}]}{[C+B\,cof.\,s^2+cof.\,s\sqrt{(B^2cof.\,s^2+2CD)}]^2\sqrt{(B^2cof.\,s^2+2CD)}}$$

quae multiplicata per $\frac{C}{(B+C)^2}$ eadem plane fit, quam ex conſideratione motus perturbati elicuimus.

SCHOLION 3.

30. Quem ad modum calculus etiam ſecundum noſtras formulas facillimus euaſiſſet, ſi vim perturbantem $\frac{B}{xx}$, quia eſt reciproce, vt quadratum diſtantiae, ſtatim cum vi centrali $\frac{C}{xx}$ coniunxiſſemus, quo facto vires perturbantes euanuiſſent, motusque regularis ſponte prodiiſſet: ita quoque ſi in aliis caſibus vis perturbans M partem contineat, quae fuerit quadrato diſtantiae reciproce proportionalis, conueniet eam partem cum vi centrali coniungere, et reliquam partem ſolum in M relinquere; ita vt vis M diſcrepantiam tantum vis ſecundum MC perturbantis a ratione reciproca duplicata diſtantiarum complectatur. Hoc etiam latius patet atque ad vires applicari poteſt, quae abhac ratione prorſus diuerſae videntur: Sic ſi vis perturbans ſecundum directionem MC fuerit $= \frac{B}{x^n} = \frac{B}{b^n}(1+k\,cof.\,s)^n$ ea in huiusmodi duas partes reſoluta concipi poteſt

$\frac{E}{bb}(1+k\,cof.\,s)^2$ et $\frac{E}{bb}(1+k\,cof.\,s)^n - \frac{E}{bb}(1+k\,cof.\,s)^2$,

exiſtente $E = \frac{Bbb}{b^n}$. Tum igitur pro C ſcribi debebit $C+E$, et litterae M tribuatur valor $\frac{E}{bb}(1+k\,cof.\,s)^2 \times$

[(1+

$[(1+k\cos.s)^{n-2}-1]$; qui ſi excentricitas k non ſit notabilis, multo erit minor, atque minores aberrationes a motu regulari producere reperietur. Ita ſi excentricitas k fuerit valde parua, erit $M = \frac{(n-2)Ek\cos.s}{bb}(1+k\cos.s)^2$ et ſcripto C pro C+E breuitatis ergo, poſito N = 0, erit b quantitas conſtans et

$$dk = -\frac{(n-2)Ekd\zeta\sin.s\cos.s}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{(n-2)Ed\zeta\cos.s^2}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{(n-2)Ed\zeta\cos.s^2}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

Hinc ergo elicitur $\frac{dk}{d\omega} = -\frac{k\sin.s}{\cos.s}$, et

$\frac{ds}{dk} = \frac{-C}{(n-2)Ek\sin.s\cos.s} + \frac{\cos.s}{k\sin.s}$, vnde fit

$\frac{Cdk}{(n-2)E} = dk\cos.s^2 - kds\sin.s\cos.s$, quae per k multiplicata et integrata dat $\frac{Ckk}{(n-2)E} = kk\cos.s^2 + \frac{D}{(n-2)E}$, vnde obtinetur $k = \sqrt{\frac{D}{C-(n-2)E\cos.s^2}}$. Cum iam ſit

$\frac{ds}{d\omega} = \frac{C}{(n-2)E\cos.s^2} - 1$, erit $d\omega = \frac{(n-2)Eds\cos.s^2}{C-(n-2)E\cos.s^2}$ ſeu

$$d\omega + ds = \frac{+Cds}{C-(n-2)E\cos.s^2} = \frac{+Cds}{C-\frac{1}{2}(n-2)E-\frac{1}{2}(n-2)E\cos.2s}$$

At huius formulae integrale, quatenus a ſolo angulo s pendet, erit $+s\sqrt{\frac{C}{C-(n-2)E}}$; ideoque $\omega = s(-1+\sqrt{\frac{C}{C-(n-2)E}})$, neglectis inaequalitatibus, quae a ſinibus angulorum $2s$, $4s$, etc. pendent: qui ſinus, cum euaneſcant, ſi $s = 0$, $s = 90$, $s = 180°$, etc. patet ſingulis reuolutionibus anomaliae, lineam abſidum promoueri angulo

$= \frac{\sqrt{C}-\sqrt{[C-(n-2)E]}}{\sqrt{[C-(n-2)E]}} 360°$. Quare ſi corpus ad centrum C attrahatur vi $= \frac{C}{xx} + \frac{B}{x^n}$, fueritque excentricitas quam minima, ſi ſemi-latus rectum orbitae, ſeu quod hoc

 caſu

caſu eodem redit, diſtantia corporis media ponatur $= b$, fiatque $E = \frac{B}{b^{n-2}}$; linea abſidum orbitae, in qua corpus mouebitur, erit mobilis atque ſingulis reuolutionibus anomaliae conficiet angulum $= [\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{(n-2)E}{C+E})}} - 1]\, 360°$ quia pro C ſcribi oportet $C + E$. Vnde patet, ſi ſit $n = 2$, lineam abſidum quieſcere, progredi vero, ſi $n - 2 > 0$, at regredi, ſi $n - 2 < 0$ vel ſi $n < 2$. Pro motu autem ipſo definiendo, quo corpus in hac orbita mutabili proferetur, peruenitur ad hanc aequationem:

$$d\zeta \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \frac{C\,ds}{[\sqrt{(C - (n-2)E\cos.s^2)} + \cos.s\sqrt{D}]^2}$$

cuius reſolutio non eſt difficilis.

31. Hanc autem methodum effectus virium perturbantium definiendi eum potiſſimum in finem excogitaui, vt eius opera perturbationes, quae in motibus planetarum ob eorum actionem mutuam euenire obſeruantur, commodius indagari atque aſſignari queant. Hinc igitur quantum motus Saturni a Ioue, et motus Iouis a vi Saturni perturbetur, meliori cum ſucceſſu inueſtigari poterit, quam aliis methodis, quae adhuc adhiberi ſunt ſolitae. Deinde ſi vis Iouis ad Saturnum vsque porrigitur, nullum eſt dubium, quin ab ea motus Martis, et Terrae, ac fortaſſe etiam inferiorum planetarum non nihil afficiatur. Denique etiam inueſtigatio inaequalitatum motus Lunae hac methodo non parum promoueri videtur, quia vires Solis partim ad vim regularem, partim ad vires perturbantes M et N commode reuocare licet. Sed vnaquaeque harum inueſtigationum tanti eſt momenti, vt peculiarem tractationem mereatur. Quam ob rem nunc quidem in ipſa methodi explicatione acquieſco.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

RESOLVTIONES PROBLEMATVM SPECTANTIVM AD
ARCHITECTVRAM CIVILEM.

AVCTORE
GEORG. WOLFFG. KRAFFTIO.

§. 1.

Cognitionem rerum mathematicam vti requirit *Philoſophia Theoretica*, veri inueniendi ſtudio occupata: ita eandem depoſcit ſibi *Philoſophia* quoque *Practica*, ſalutis noſtrae communis amore incenſa. Atque haec quidem hunc ſummum intelligentiae gradum eo magis neceſſarium ſibi habet, quo facilius eſt ſpeculari et cogitare de re aliqua generaliter, ſine menſuris ac indeterminate: vt vero agamus, vt exerceamus operam quandam, ſine menſuris, ſine omnimoda determinatione, fieri omnino nequit. Nemini ergo obſcurum eſſe poterit, *Architecturam Ciuilem*, hoc eſt, Philoſophiam Practicam in aedificando, nobiliſſimam, dignitatique humanae conuenientiſſimam, ſcientiam cognitione rerum ſuarum mathematica quam plurimum adiuuari; immo eadem, ſi ſapiens eſſe debeat, carere nullo modo poſſe. Fecit hoc, vt cogitarem iam diu *de problematibus Architecturae ciuilis* omnibus illis, quae, a variis Auctoribus pertractata, Geometricam arundinem admoueri ſibi patiuntur, in vnum faſciculum colligendis, atque

atque accurate excutiendis, vt publicae vtilitati pro viribus proſim, ſed propriae etiam delectationi, quae ad labores maxime nos inuitat, indulgerem.

§. II. Primo quidem campum integrum hic nobis aperit conſtructio et aedificatio concamerationum architectonicarum, quae *Fornices*, *Voutes* gallice, appellari ſolent; aut etiam *Arcus*; vel a *Vitruuio*, lib. VII. cap. 3, *Camerae*; quibus omnibus nihil aliud indigitatur, quam lacunar incuruatum, partes aedificii tegens. De his Cameris pauciſſima tradit *Vitruuius*, nempe haec *lib.* VI. *cap.* 11, *ſin hypogea, concamerationesque inſtituentur: fundationes eorum fieri debent craſſiores*; ſuadetque ibidem, *vt directiones lapidum, fornicem conſtituentium, tendant ad commune centrum arcus medium*; vid. *Blondel*, *Cours d'Architecture*, P. IV. *lib.* I. *cap.* 2, *p.* 316; Agnouit porro, in loco modo allegato, *fornicationes leuare onus parietum*; adeoque, ſi lacunar feneſtrae, aut portae, oneri impoſito impar ſit ferendo, illud eſſe incuruandum; vel conſtitui debere fornicem ſupra lacunar; aut etiam muniendum eſſe illud cantheriis; in angulum coeuntibus, quos vocat *ſubcuneatos poſtes*; de quo vid. *Perraltum* in verſione Gallica, et notis ad loc. cit. Quibus deinde commentatores *Vitruuii* adiecerunt diuiſionem camerarum in *teſtudines*, *fornices*, et *hemisphaeria*; de quibus vid. *Philander*, in *notis ad Vitruuii lib.* VII. *cap.* 3. Eadem hac Camerarum firmitate *ſimilis* loco vſus eſt *Seneca*, *Epiſt.* 95, *p. m.* 447, dicens: *ſocietas noſtra lapidum fornicationi ſimillima eſt; quae caſura, niſi inuicem obſtarent, hoc ipſo ſuſtinetur.*

§. III.

§. III. Vt igitur, quae recentiori aetate de firmitate camerarum per Matheſin ſtabilita ſunt, connectamus, ſequenti modo rem hanc aggrediamur. Ante omnia praemittamus definitiones. Sit fornix A B C D, vocantur lapides, ex quibus ille eſt compoſitus, *cunei*, quia cunei formam habent, veluti E F G H; *vouſſoir* Gallice. Lineae rectae, iuxta quas ſibi incumbunt cunei, F H, E G, ſunt *lecti iuncturae*; *concluſurae Vitruuio*, *les lits*, *les joints*; cuneus omnium ſupremus B C N O, eſt *tholus*, *vmbilicus*, *la clef de la voute*, *clavis*; columnae, quibus arcus inſiſtit, K A Q, D P R, appellantur *moles*, *pilae*, *piedroits*; arcus interior A B C D eſt *concauitas*, *l'intrados*; arcus exterior K L M P, ſi adfuerit, eſt *conuexitas*, *l'extrados*; baſis pilae D P, cui impoſitus eſt primus cuneus F H P D, dicitur *puluinar*, *couſſinet*, *impoſte*. Tab. IV. Fig. 1.

§. IV. Supponunt autem Auctores optimi omnes, lectos ſingulos conuergere in centrum medium S, et arcui eſſe perpendiculares, quod *Vitruuius* etiam ſuadet; (§. II.) nec immerito, quia ſic et venuſtati conſulitur, et commoditati tam futurae dimenſionis Geometricae, quam conſtructionis, cuneorum. Deinde aſſumitur, lectos omnes habere ſuperficies perfecte politas ſibi commiſſas, ita vt vnus cuneus ſupra alterum perfecte lubricum labi poſſit, et deſcendere ſine omni reſiſtentia. Si enim firmitas conciliata fuerit cuneis talibus politiſſimis ex eorundem figura et pondere; tum certa illa maior adhuc erit, ſi calce, aut caemento, intermixtis ſibi mutuo adhuc adhaereſcant. Tertio etiam plerumque eligi ſolent latitu-

dines cuneorum E F, omnes inter ſe aequales. In arcubus quidem Toſcanis easdem inaequales fecit *Vignole*, notante *Blondello*, *Cours d'Architecture*, p. 319, ſed ingratum id eſt viſui.

Tab. IV. Fig. 2. §. V. Ponamus nunc cauitatem arcus eſſe A D F, ac alicuius cunei concluſuram continuatam in centrum eſſe M C, cui incumbat cuneus, tanquam punctum conſideratus ponderis abſoluti p. Euidens eſt ad deſcenſum ſuum niti hunc cuneum in hoc lecto iuxta rectam M C, eodem modo ac ſi plano inclinato M C, ad horizontem A G, cuius altitudo ſit P M $=$ u, impoſitus eſſet. Conabitur itaque deſcendere pondere non abſoluto, ſed reſpectiuo tantum, quod eſt $= \frac{pu}{MC}$; hinc etiam tholus ipſe, ſi cadere poſſet, caderet pondere ſuo aliquo tantum reſpectiuo. Ex quo facile patet, ſi in arcu ſemicirculari cunei omnes inter ſe ſint aequales, aut eiuſdem ponderis, tum ſuperiorem quemuis maiori pondere reſpectiuo deſcenſurum eſſe, quia altiori ſemper incumbit plano inclinato; erit enim hac ratione, ob M C, et p, conſtantes, pondus reſpectiuum quoduis vti u; talis itaque fornix ipſe per ſuam ſtructuram inaequaliter ſe ſuſtinebit, et maxime debilis erit in vertice ſuo circa tholum. Vt igitur in omnibus cuneis idem ſit conatus deſcendendi, vel idem pondus reſpectiuum: requiritur vt ſuperior quiuis inferiore ſuo teneat pondus abſolutum minus. Si enim alicubi cuneus quis maiorem habeat conatum deſcendendi, quam caeteri, is quidem caemento interpoſito impeditur, ſed ſucceſſu temporis ibi fornix fatiſcit. Quare tales fornices ſemicirculares, in quibus cunei omnes ſunt aequales, et eiusdem ponderis, firmi non ſunt.

§. VI.

§. VI. Cum ergo requirimus fornicem in ſingulis punctis ſuis aeque firmum, ac inde durabilem: efficiendum eſt, vt ſingula ipſius puncta habeant vim deſcendendi, in ſuis planis inclinatis, eandem, aut pondus reſpectiuum conſtans; vtque adeo in hoc verſus centrum delabendi conatu nullus cuneorum alterum ſuperet. In quem finem optime dicit *Fontenellius in Hiſtoire des Memoires de Paris*, 1729. „ tous les vouſſoirs, qui compoſent une voute, ſont des eſpeces de coins; ils tendent tous à tomber, & il faut qu'aucun ne tombe; „ il faut de plus, afin que la voute ſoit la plus durable qu'il ſe puiſſe, qu'ils tendent tous avec une force „ égale à tomber; autrement l'endroit, où il ſe trouveroit plus de cette force, viendroit à s'abbaiſſer peu „ à peu.

§. VII. Si nunc ponamus ergo in arcu architectonico ſingulorum punctorum pondus reſpectiuum conſtans: erit $\frac{pu}{MC} = 1$, (§. V.) aut $p = \frac{MC}{u}$; hoc eſt, pondera abſoluta cuneorum debent eſſe in ratione directa ipſarum MC, atque inuerſa ipſarum PM, vt exinde omnium enaſcatur dein pondus reſpectiuum idem. Sit porro altitudo arcus $CD = a$, abſciſſa concauitatis $DF = x$, ſemiapplicata $FM = CP = y$, erit $u = a - x$; quo ſubſtituto prodit cuiusuis cunei pondus abſolutum $p = \sqrt{\frac{y^2 + \overline{a - x}^2}{a - x}}$.

§. VIII. Ducatur concauitatis tangens DE in vertice arcus D, ad DC nempe normalis, et directio lecti in

 M,

M, quae eſt MC, producta occurrat tangenti huic in E; atque ob ſimilia triangula PMC, DCE, erit $\frac{MC}{u} = \frac{CE}{CD}$; vnde praecedens menſura ponderum abſolutorum hoc etiam exprimi poteſt modo, vt illa eſſe debeant in ratione $\frac{CE}{CD}$.

§. IX. Ex puncto N ducatur alia directio lecti alicuius in centrum fornicis BNC, et vocetur anguli BCD ſinus m, coſinus n, poſito ſinu toto $= 1$; atque erit $1 : CB = m : BD$, vnde $CB = \frac{BD}{m}$; ſitque etiam ND dimidius tholus, et cuneorum ſingulorum iuncturae in centrum C continuatae, faciant angulos aequales MCN; atque erit nunc angulus MCN duplus ipſius NCD; et ſinus $MCN = 2mn$; *ex elementis Trigonometriae*. Habetur hinc $2mn : BE = n : CE = \frac{BE}{2m}$. Cum adeo eſſe debeat pondus abſolutum in N ad pondus abſolutum in $M = \frac{CB}{CD} : \frac{CE}{CD} = CB : CE$. (§. VIII.), erunt eadem pondera inter ſe vti $\frac{BD}{m} : \frac{BE}{2m} = BD : \frac{BE}{2} = 2BD : BE = BI : BE$, ſi NDH fuerit tholus integer, et NCH ipſius angulus. Idem ratiocinium extenditur ad omnes reliquos cuneos, ſi horum ſingulorum anguli in centro C fuerint aequales, quare patet exinde Theorema *De la Hirii*, *Traité de Mechanique*, *Prop.* CXXV, pondera cuneorum abſoluta eſſe in ratione differentiarum tangentium angulorum, quos faciunt lecti continuati in centrum, qui nempe anguli omnes ſupponuntur inter ſe aequales. Quod vero Theorema *De la Hirius* de ſolo circulo, et longe diuerſa ab hac noſtra methodo demonſtrauit. Sed memorabile fuit hoc inuentum, cum inde

a *Vi-*

a *Vitruvio* vsque ad hoc tempus Architecti in condendis fornicibus nihil certi haberent, quod ſequerentur, ſed palpando tantum cuneos formarent, teſtante *Fontenellio in Mem. de l'Acad.* 1704. *p* 95.

§. X. Apparet hinc, pondus abſolutum primi cunei F D H P debere eſſe infinite magnum. Debet enim eſſe $= \frac{MC}{u}$, (§. VII.); hoc autem caſu eſt $u = 0$, ergo $p = \frac{MC}{0} = \infty$. Nam qualecunque pondus finitum habeat cuneus hic primus, minima vis, premens ipſum ſecundum directionem lecto ſuo normalem, a cuneo ſuperiori proximo proficiſcens, repellet ipſum a centro, et fornicem turbabit. In hac igitur hypotheſi, in qua cunei ſunt perfecte lubrici, pondus valde magnum debet tribui cuneo primo, et ſequentibus proxime ipſum, vt vim tholi ſuſtinere queant. Quia autem cunei interpoſita calce vniuntur, adeoque multum abſunt a perfecta lubricitate; hinc regula haec, cum in rigore obſeruari non poſſit: nec etiam debet. Tab. IV. Fig. 1.

§. XI. Haec vero regula de pondere infinite magno cunei primi, in eo tantum caſu valet, in quo puluinar eſt horizontale, atque ſimul, vti diximus, perfecte poſitum. Cuius rei rationem optime explicat iterum *Fontenellius in Mem. de l'Acad. de Paris*, 1704, *p.* 94, hisce verbis: „ tous les vouſſoirs, hormis le dernier, ne „ pourroient laiſſer tomber un autre ſans s'elever, à quelle „ elevation ils reſiſtent; mais le dernier (*nobis primus*) „ peut laiſſer tomber un autre ſans s'elever, en gliſſant ho- „ rizontalement, au quel mouvement les poids, tant qu'ils „ ſont finis, n'apportent aucune reſiſtance, & ils ne com-

„ mencent à y en apporter une finie, que quand on les „ conçoit infinis. „ Sin autem puluinar ipſum ſit inclinatum ad horizontem: tum primus cuneus requirit pondus abſolutum finitum, traditis regulis conforme; quod primus annotauit *Coupletus*, *Memoires de l'Acad. des Sciences* 1729. *p* 83.

§. XII. Ex his perſpicitur, nullum rite conſtrui poſſe fornicem, aut arcum architectonicum, in quo cunei omnes idem teneant pondus abſolutum. Quoniam enim generaliter eſt $p = \frac{\sqrt{(y^2 + \overline{a-x}^2)}}{a-x}$, (§. VII.); ponatur $\frac{\sqrt{(y^2 + \overline{a-x}^2)}}{a-x} = 1$, vnde deducitur $y = 0$, quod indicat, nullam curuam huic requiſito efficiendo dari; ſed ſolos lapides quadratos ſibi verticaliter ſuper impoſitos hoc efficere poſſe; quod alias patet.

§. XIII. Colligitur exinde porro, nullam lineam curuam eſſe, quae non apta ſit concamerationi exſtruen-
Tab. IV. dae firmiſſimae, nullamque alteri in hoc negotio prae-
ferri poſſe, modo diuerſum etiam, pro cuiuslibet curuae
Fig. 3. natura, cuneis ſingulis tribuatur pondus abſolutum. Sit ex. gr. parabola, cuius parameter 4 a, efficietur ex illa fornix abſolutiſſimus, ſi cuneorum pondera abſoluta ſint vbique vti $\frac{a+x}{a-x}$, et pondus tholi $= 1$; Cum enim in hac curua ſit $4\,ax = y^2$, erit, hoc ſubſtituendo in aequatione ſuperiori (§. VII.) $p = \frac{\sqrt{(4ax + a^2 - 2ax + x^2)}}{a-x} = \frac{a+x}{a-x}$; atque ſimiliter in omnibus aliis curuis pondera cuneorum erunt determinanda. Sine ſufficiente ratione

tione igitur ſtatuerunt ellipſin ſolam conſtruendis fornicibus aptam, niſi venuſtatis cauſa hoc fecerunt, *Serlius Architect. l.* 1, *c.* 1; *Alb. Dürerus*, atque cum hoc *Dan. Hartmannus*, *Architect. f.* 7. Si iuſta etiam ponderum abſolutorum aſſumatur menſura, conueniens ſemper inuenietur curua, ad cuius ductum fornix exſtruendus eſt, vt ſit firmiſſimus.

§. XIV. Diximus paullo ante, (§. XII.) nullum dari fornicem, aequabiliter firmum, in quo puncta ſingula idem teneant pondus abſolutum; aut qui vbique eiusdem ſit craſſitiei, adeoque teneat conuexitatem concauitati parallelam. Sed contrarium aſſerunt duo Viri egregii, putantes fieri id poſſe; ſi fornix exſtruatur ad curuitatem illius lineae, quae *catenaria* vocatur, atque illa eſt, quam aſſumit libere catena, aeque grauis vbique, ac ex vtraque ſua extremitate firmata deorſum pendens. Cui itaque dubio nobis eſt occurrendum. Primus inuentor huius praxeos eſt *Dav. Gregorius*, qui in *demonſtrationibus de Catenaria*, *Act. Erud. Lipſ. a.* 1699, *m. Febr.* dicit: catenam in plano verticali, ſed ſitu inverſo poſitam, figuram ſuam ſeruare, nec decidere, adeoque fornicem facere. Hinc ad talem vſum hanc curvam commendat, atque, cur nihilominus etiam aliae curuae reddant ſtabiles fornices, cauſam in eo ſitam eſſe putat, quod hae curuae, in latitudine fornicum, catenariam in ſe includant et ſemper comprehendant.

§. XV. Sed mirum videri poteſt, quae via ad hanc conſequentiam duxerit, vt quae catena deorſum

pen-

pendens in aequilibrio manet: eadem quoque ſurſum verſa idem faciat. Dum enim deorſum pendet talis catena, vtrinque clauo affixa: ponduſculis ipſius tenſionem efficientibus deorſum, et clauis renitentibus, aequilibrium tandem in certa aliqua curuitate catenae conſiſtit; quae vero omnia ceſſant, cum catenula haec ita incuruata ſurſum iam erigitur; pondera enim non tendunt eam ſurſum, vti antea deorſum; et ratiocinium allatum videtur ſimile eſſe illius, quo quis probaret, pendulum in aequilibrio ſitum eſſe poſſe etiam tum, cum ponduſculum ex ſitu verticali deorſum tendente transfertur in ſitum eundem ſed ſurſum tendentem.

§. XVI. Alter, qui denuo in hanc de catenaria incidit opinionem, eſt *Coupletus*, *in Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris*, 1729, *pag.* 87, *probl.* IV; hanc ad fornices aptitudinem huic curuae ex eo adſcribens, quoniam Theorema *Hirianum* ſupra allatum, (§. IX.) in eadem locum inueniat. Sed, praeterquam quod ex falſa ſuppoſitione hoc demonſtret auctor, nempe dari poſſe intra catenariam punctum aliquod vnicum, ex quo educi poſſint perpendiculares in ſingulas chordas infinite paruas eiusdem, quae ſcilicet proprietas ſoli circulo conuenit, et nulli alii praeterea curuae: idem Theorema *Hirianum* ad omnes curuas quadrat; (§. IX.) ex quo palam eſt, catenariam ad fornices conſtruendos aptiorem non eſſe, quam aliam lineam inflexam quamuis ſententiam *Coupleti* optime expreſſit *Fontenellius*, in *Hiſtoire de Memoires* 1729, dicendo: " *Mr. Couplet* a penſé, „ qu'une voute, qui auroit la courbure de la chainette, „ pour-

„ pourroit avoir par cette nature tous ſes vouſſoirs egalement peſans, & ſeroit par conſequent d'une epaiſſeur uniforme „ ; ſed nihil contra monuit. Nouiſſime etiam catenariam pro aedificandis fornicibus commendavit in *Commentariis Academiae Scient. Suecicae*, *tomo* IV. *p.* 138, *Clariſſ. Polhemius.* Omnia vero haec eo intelligenda ſunt, vt catenaria ſola, per ſe conſiderata, fornicem efficere ſtabilem nequeat, quia, vt linea, nullam tenet latitudinem, in qua cunei, ad fornicem neceſſarii, et introlabi conantes, concipi poſſent. Si vero capiatur catenaria, eaque ad altitudinem aliquam circumdetur alia curua ipſi parallela, vt priori huic requiſito locus relinquatur: tum demum catenaria, cum alia ſibi curua parallela, fornicem formare poterit vbiuis aeque denſum, et perfecte firmum; non quidem ex ea cauſſa, quam hic ſolam aſſumſimus, vt ſingularum in ea particularum idem ſit pondus reſpectiuum, ſed ex alia, nempe quod ex intro ceſſione hac cuneorum, aeque ponderantium, cuneus ſuperior quiuis tanta vi ſurſum premitur, quanta ipſe deorſum premit ſibi ſubiectum; in qua hypotheſi fornicem a catenaria pendere primus diſtincte oſtendit *Iac. Bernoullius*, in *Operum tomo* II. *pag.* 1119, cuius methodum alia occaſione explicabo.

§. XVII. Cum itaque nulla curuarum alteri palmam praeripiat in conſtituendo fornice, omnes adeoque ad hunc vſum pariter ſint aptae (§. VII.): recte fecerunt ſuperioris aetatis Architecti quidam celebres, qui praeter circulares et ellipticos fornices alias quoque harum formas aſſumpſerunt, quas nempe aſpectui gratas

 eſſe

eſſe iudicarunt; ſed in eo defecerunt a veritate, quod cuique tali curuae, oculis gratae, ſuam certam et propriam rationem in ponderibus cuneorum non aſſignauerint. Ita recenſet *De la Hire* in *Mem. de l'Acad des Sciences de Paris* 1702, quosdam hanc tribuiſſe formam
Tab. IV. fornicibus, quae ex ſequenti conſtructione pateſcet. Sit
Fig. 4. AB altitudo fornicis, et recta BD, priori ad angulum rectum iuncta, ſemilatitudo eiusdem; debet fornix tangere has rectas in A & D; praeter ea vero diuidatur vtraque in eundem numerum partium aequalium pro lubitu, tum iungantur puncta EF, GH, IK, et deſcribatur curua, quae tangat alicubi omnes has rectas EF, GH, IK, etc.

§. XVIII. Vt ſciatur, qualis ſit haec curua, ita ducta, quam *de la Hire* fatetur ab initio habuiſſe pro ellipſi; ducit idem hic ex quocunque puncto M rectas ML et MN, perpendiculares ad BD et BA, aſſeritque, patere ex regula de maximis et minimis, quod BD, BF, BL et BA, BE, BN, ſint in proportione continua; ex qua proprietate naturam curuae deducit. Cum vero vix perſpici poſſit, quomodo de hac proportione conſtet: melius ſoluitur problema hoc per methodum *Hoſpitalii*, *in Analyſe des infinement petits*, §. 146, de inuenienda curua tangente infinite multas rectas, certa lege ductas; quod hac ratione praeſtabimus. Sit pro tangente EF, $DL = y$, $LM = x$, $BD = a$, $BA = b$; et praeter ea $BE = t$, $BF = u$; et quia, per conſtructionem, AE ſimilis eſt pars ipſius AB, qualis eſt BF ipſius BD: erit AE $(b-t)$: AB(b) = BF(u):

BD

BD(a), hinc $u = a - \frac{at}{b}$; (A) et FD $=$ BD $-$ BF $=$ $a - u = \frac{at}{b}$. Porro eſt FL ($y - \frac{at}{b}$) : LM (x) $=$ FB (u) : BE (t), aut $ux = ty - \frac{at^2}{b}$ (B). Nunc conſiderandum eſt, eſſe DL, LM, aut y et x, conſtantes, dum BF, BE, u et t, incrementum infinite paruum aſſumunt; hinc aequatio modo inuenta differentietur poſitis x et y, conſtantibus, atque orietur $x\,du = y\,dt - \frac{2at\,dt}{b}$, aut, ob $du = -\frac{a\,dt}{b}$ (A); erit facta ſubſtitutione, $t = \frac{ax + by}{2a}$; et $u = a - \frac{ax + by}{2b}$ (A). Vnde haec iterum ſubrogando in (B), habebitur haec aequatio: $ax - \frac{ax^2 + bxy}{2b} = \frac{axy + by^2}{2a} - \frac{a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2}{4ab}$; quae aequatio reducitur ad hanc, $\overline{ax + by}^2 = 4a^2bx$, quae eadem quoque eſt cum Hiriana, atque ſecundum regulas ordinarias Locorum Geometricorum eſt ad Parabolam Apollonianam; quam ſequenti modo conſtruit *de la Hire*: Ducatur AD, et biſecetur in O, erit ducta BO diameter Parabolae; huic BO ſit normalis BP; et t ad hanc normalis AP; fiat AN $=$ AP, erit N focus Parabolae, et ducta RN, normalis itidem ad BP, erit axis curuae; qua RN biſecta in $ſ$, habebitur in $ſ$ vertex eiusdem. Haec itaque curua parabolica, quamuis pluribus placeat architectis, reiicitur a *de la Hirio*, ex ea iuſta cauſſa, quod duplex fracturae ſpecies, apud $ſ$ in vertice Parabolae et in D tranſitu vtriusque parabolae ingrata viſui futura eſt, qualem inflexionem viſibilem Galli vocant *un parret*, quaſi poplitem, aut poplitis flexuram; vnde his parabolicis fornicibus praeferendi ſunt elliptici, qui tali poplite viſum non laedunt.

TAB. IV. Fig. 5.

 §. XIX.

§. XIX. Ceterum ex hac noſtra ſoluendi methodo praecedens problema, illud *de la Hirii* aſſertum, modo memoratum (§. XVIII.), ſtatim pateſcit. Inuenimus enim $t = \frac{ax + by}{2a}$, hoc eſt $2at = ax + by$; ſi igitur in aequatione curuae inuenta hic valor ipſius ax
TAB. IV. $+ by$ ſubſtituatur: emergit $4a^2t^2 = 4a^2bx$, aut $t^2 = bx$,
Fig. 4. vel $b : t = t : x$, hoc eſt BA : BE = BE : BN; vnde BA, BE, BN, ſunt in proportione Geometrica continua; et ſimiliter quoque BD, BF, BL.

§. XX. Quoniam ergo ducta AD, et biſecta ea
Fig. 5. in O, recta BO eſt diameter parabolae, ob tangentes DB, AB, in eodem puncto B concurrentes; *per conuerſam propoſ.* 30, *lib.* II. *Conicor. Apollonii*; hinc ex conſtructione Hiriana (§. XVIII.) aequatio ad axem huius parabolae ita eruitur. Ducatur ad axem TN perpendicularis AQ, et alia arbitraria VM, ſintque SM $= x$, MV $= y$, AD $= \sqrt{(a^2 + b^2)} = m$; atque erit, *per Trigonometriae planae regulas* ſin. D $= \frac{b}{m}$, coſ. D $= \frac{a}{m}$, hinc ſin. 2D $= \frac{2ab}{m^2}$, coſ. 2D $= \frac{a^2 - b^2}{m^2}$, poſito ſinu toto $= 1$. Erit etiam ex conſtructione ſinus totus (1) : AB $(b) =$ ſin. PBA $(\frac{b}{m})$; PA $(\frac{b^2}{m}) =$ AN = TN; ſunt enim triangula BCD, BOA, TNA, aequicrura, ob tres lineas aequales OA, OB, OD, quia ex O per angulum rectum B ſemicirculus deſcribi poteſt, et RN parallelam ipſi BO. Iam in triangulo rectangulo AQN eſt ſinus totus (1) : AN $(\frac{b^2}{m}) =$ ſinus N $(\frac{2ab}{m^2})$: AQ $(\frac{2ab^3}{m^3})$; eſt enim angulus N = BOA = 2D; porro eſt ſinus totus (1) : AN $(\frac{b^2}{m}) =$ coſ. N $(\frac{a^2 - b^2}{m^2})$: QN $\frac{(a^2 - b^2)b^2}{m^3}$,
hinc

hinc $TQ = TN - QN = \frac{b^2}{m} - \frac{\overline{aa-bb}.b^2}{m^3} = \frac{2b^4}{m^3}$. Sed eſt, ob tangentem AT, ſubtangens TQ, hinc $TS = SQ = \frac{1}{2} TQ = \frac{b^4}{m^3}$, et ex natura parabolae fluit $AQ^2 \left(\frac{4a^2b^6}{m^6} \right) : MV^2 (y^2) = SQ \left(\frac{b^4}{m^3} \right) : SM (x)$; vnde extremis et mediis in ſe multiplicatis, fit $\frac{4a^2b^2}{m^3} x = y^2$, vnde patet, eſſe parametrum ad axem $= \frac{4a^2b^2}{m^3} = 4SN$; et $SN = SQ + QN = \frac{a^2b^2}{m^3}$, vti paullo ante etiam inuentum eſt. Eſt denique in triangulo rectangulo TQA, ſin. $ATQ \left(\frac{a}{m} \right) : AQ \left(\frac{2ab^3}{m^3} \right) =$ ſin. tot. $(1) : AT \left(\frac{2b^3}{m^2} \right)$, hinc $BT = b - \frac{2b^3}{m^2} = b \left(\frac{a^2 - b^2}{m^2} \right)$; atque in triangulo BRT, habebitur haec analogia, ſin. tot. $(1) : BT \left(\frac{b.\overline{aa-bb}}{m^2} \right)$ ſin. $T \left(\frac{a}{m} \right) : BR \left(\frac{ab.\overline{aa-bb}}{m^3} \right)$, quae eſt diſtantia axeos RN *a* diametro prius ducta BO. Aequatio autem ad diametrum BO facile habetur, ducta quauis EF parallela ad AD; eſt enim, ob DB, tangentem, BO ſubtangens, $= 2CO$, adeoque $CO = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{4}AO = \frac{1}{4}m$; vnde, ex natura parabolae, $AO^2 \left(\frac{1}{4}m^2 \right) : EG^2 = CO \left(\frac{1}{4}m \right) : CG$, aut vero $m . CG = EG^2$; vnde patet, parametrum ad hanc diametrum pertinentem eſſe $m = AD$. TAB. IV. Fig. 6.

§. XXI. Maxime autem in hoc negotio confugerunt ad arcus circulares Architecti, eo modo inter ſe combinandos, vt figuram ellipticam, oculo gratam referrent, poplite deſtitutam. Aptiſſimum quidem eſt, fornici tribuere formam circularem; quam in tres ſpecies diſtinxerunt. Si arcus contineat perfectum ſemicirculum; dicitur *ſemicircularis fornix*; *un arc en plein cintre*. Si minus contineat quam ſemicirculum, vocatur *arcus depreſſus*, *un arc ſurbaiſſé*;

 ſi

ſi vero plus contineat quam ſemicirculum, eſt *arcus exaltatus*, *un arc ſurhauſſé*. Arcus igitur Semicircularis nullo deprauatur poplite, neque in puluinari, neque circa thalam, adeoque venuſtiſſimus omnium eſt. Cum vero quandoque ſuadeant circumſtantiae, immo etiam venuſtas quibusdam poſtulare videatur, vt adhibeantur arcus depreſſi: hi certe ſine viſibili poplite in vtroque puluinari exſtrui nequeunt. Commode hic adhiberentur arcus ſemielliptici, qui nullos progignunt poplites: ſed cum hi difficilis ſint deſcriptionis, conuerterunt ſe artifices ad deſcribendos arcus ſemiellipticis ſimiles: ſed ex aliquot arcubus circularibus compoſitos; quos *ouales* dicunt, *arcs à anſe de panier*; eosque variis modis concinnare docet *Serlio* et alii; quorum eſt commodiſſimus,
TAB. IV. deſcriptus a *Blondelo Cours d'Architecture*, *lib.* IV,
Fig. 7. *cap.* 6, ſequens: ſit latitudo fornicis AB, biſecetur illa in C, et hinc et inde capiantur aquales arbitrariae CD, CE, et ſuper DE erigatur pro lubitu triangulum aequicrurum DFE, ductis rectis FDG, FEH; tum centris D ac E, radiis DA, EB, deſcribantur arcus circulares AG, BH; centro denique F arcus circularis GH; habebitur ita arcus, elliptici ſimilis, ſed re vera ex arcubus circularibus compoſitus, at omni poplite deſtitutus.

§. XXII. Tradita autem haec methodus non eo extenſa eſt vſque, vt etiam altitudinem datam aliquam CI arcus requirat, ſed ſolam latitudinem datam AB; pro qua quidem hac reſtrictione ſolutionem etiam affert *Blondel*, *l.* c. ſed ſine demonſtratione, et operoſam

non

non nihil. Hinc ſequenti conſilio hoc problema aggreſſus ſum. Sint fornicis ſemilatitudo A C, altitudo C B datae. Quoniam itaque poples euitandus eſt in puluinari apud A, arcus circularis A K centrum ſuum alicubi habere debet in recta A C, veluti in I. Vt poples abſit in K, debent duo arculi contigui ibidem infinite parui habere communem tangentem; cum autem tangens puncti K in reſpectu ad arcum K A ſit perpendicularis radio I K: talis etiam debet eſſe tangens ſimilis in reſpectu ad arcum K B, hoc eſt, arcus K B centrum ſuum habere debet in recta K I M protenſa; vt effugiamus poplitem in B cum altera arcus medietate: requiritur centrum arcus K B quoque in recta B C protenſa; centrum ergo arcus *K* B nusquam eſſe poteſt, niſi in interſectione rectarum K I, B C, productarum, hoc eſt in M; requiritur itaque, vt ſit M K = M B. Neceſſe porro deinde eſt, vt duo radii I K et M K non nimium inter ſe differant longitudine; alias aſpectus enormiter laeditur, quod facili delineatione concipi poteſt. Quamuis enim arculi contigui etiam in hac circumſtantia habeant communem tangentem: tamen curuitates vtriusque arcus A K et K B, cuius curuitatis indices ſunt radii I K et M K, ſubito et multum immutantur, ſi radii multum differant longitudine; quae ipſa ſubita mutatio animum ſpectatoris laedere magnopere ſolet. Similes porro regulae adhiberi debent pro euitando poplite in illis membris architectonicis omnibus, quae ex duobus circuli arcubus componuntur, qualia ſunt *cymatium Lesbium*, *trochilus*, *ſimae*; immo etiam alia, veluti *torus*, et *apophygis*, in quibus effici debet

Tab. IV. Fig. 8.

debet, vt ne arcus unus cum lineis rectis ingratam reddat inclinationem.

TAB. IV. Fig. 8. §. XXIII. His itaque praeſuppoſitis ſint $CA = a$, $CB = b$, et differentia horum ſemiaxium $CA - CB = a - b = m$, qua deſcribatur ex C quadrans circuli DE, et poſtea aſſumatur quaelibet $DI = x$, et $EM = y$; atque erit $MB = b + m + y$, $AI = KI = a - m - x$ $CI = m + x$, $CM = m + y$, adeoque $MI = \sqrt{(\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2)}$, et hinc ob $MK = MB$, erit etiam $\sqrt{(\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2)} : + a - m - x = b + m + y$, aut vero $\sqrt{(\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2)} = m + x + y$; vnde producitur $2xy - m^2 = o$, aut vero $y = \frac{m^2}{2x}$; quae facili conſtructione obtinetur, quaerendo nempe, arbitrarie aſſumta, x, ad $2x$ et m tertiam continue proportionalem, quae deinde dabit centrum quaeſitum M.

Fig. 9. §. XXIV. Cum itaque hoc problema ſit indeterminatum: eius aequatio localis eſt $xy - \frac{1}{2}m^2 = o$, quae eſt ad Hyperbolam inter aſymptotos. Axe igitur tranſverſo $AB = 2m$ conſtruatur Hyperbola aequilatera HAKOBM, eius ducantur aſymptoti CG, CI, CN, CL, orthogonales, tum capſa quauis $CE = x$, erit normalis ad aſymptotum hanc ducta $EF = y$. Ducta enim normali DA ad eandem aſymptotum in verticem hyperbolae A, erit ex huius natura $CE \times EF = CD \times DA$; nec non $CD = DA$; ergo $CD = DA = \frac{m}{\sqrt{2}}$; conſequenter $xy = \frac{m^2}{2}$, aut $xy - \frac{m^2}{n} = o$.

§. XXV.

§. XXV. Conſiderandi autem hic occurrunt varii caſus, prouti x ſit poſitiua aut negatiua, hoc eſt in latus CG, vel in oppoſitum CL cadat; ac etiam prouti eadem haec x alias atque alias teneat magnitudines. Sit ergo *Primo*, x poſitiua quaecunque DI; inuenietur ex Hyperbola deſcripta, pro hac differentia ſemiaxium CA-CB, ſiue m, conueniens y etiam poſitiua $=$ EM; ducatur itaque recta MIK, et centro I radio IA deſcribatur arcus circuli AK; centro autem M, radio MK arcus KB, qui per punctum datum B tranſibit, et fornicem oualem AKB abſoluet ſine omni poplite. Tab. IV. Fig. 10.

§. XXVI. *Secundo*, ſit x negatiua $=$ DI; ſed minor quam $\frac{1}{2}m$ inuenietur ex Hyperbola, applicata hac x in partem oppoſitam CL, conueniens y etiam negatiua, hoc eſt ab E ſurſum ponenda EM. Ducta nunc IMK, deſcribendus erit centro I, radio IA, arcus AK, et deinde centro M, radio MK, arcus KB, qui per datum punctum B transibit quidem, ſine poplite in K, ſed fornici conſtruendo inutilis. Tab. V. Fig. 1.

§. XXVII. *Tertio*, ſit x negatiua, ſed $=\frac{1}{2}m=$ DI, inuenietur correſpondens $-y$ ex Hyperbola $=-m$, $=$ EM; hinc centro I, radio IA deſcribendus erit arcus ALK, deinde centro M, quod coincidit cum C, radio CK, arcus KB, iterum retrorſum ducendus, qui per datum punctum B rurſus quidem transibit, ſed fornici conſtituendo eſt ineptus. Fig. 2.

§. XXVIII. *Quarto*, ſi fuerit $x = -m$; erit ex aequatione locali, ſubſtituto hoc valore, $-my - \frac{1}{2}m^2 = 0$, aut vero $-m(y + \frac{1}{2}m) = 0$; quae aequatio ſupponit $-m = 0$, et $y + \frac{1}{2}m = 0$, ſiue $y = -\frac{1}{2}m = -\frac{1}{2}0$; hic adeoque caſus ſupponit ſemiaxes inter ſe aequales; in alio autem caſu ſolutionem problematis efficit impoſſibilem.

Tab. V. Fig. 3. §. XXIX. *Quinto*, ſi fuerit x negatiua, ſed maior quam m, veluti DI; erit y adhuc negatiua = EM; et ducta IMK, deſcribendus erit centro I, radio IA, arcus deorſum vergens AK; deinde centro M, radio MK, arcus KLB ſurſum vergens, qui attinget quidem punctum datum B, ſed rurſus fornicem non efficiet, adeoque noſtro inſtituto non erit accommodatus. *Sexto* denique ſi fuerit $x = 0$, correſpondens y cadet in aſymptotum ipſam, requiret adeoque magnitudinem infinitam; vnde et hic caſus eſt impoſſibilis; quod ita etiam Tab. IV. Fig. 10. oſtenditur: requiritur vt ſit $AI + IM = BC + CM$; ſed ſi $x = 0$, eſt $AI = AD = BC$; ergo erit hoc caſu $BC + IM = BC + CM$, aut $IM = CM$, hoc eſt quaelibet hypothenuſa aequalis ſuae catheto; quod eſt abſurdum. (*Elem. Euclidis lib. I. prop* 18.). Patet igitur ex his omnibus, nullum caſum valere in noſtro negotio alium, niſi eum ſolum, qui aſſumit x poſitiuam.

§. XXX. In eodem hoc, quod modo pertractauimus, problemate prolixam admodum operam conſumſit *Pitotus* in *Commentariis Acad. Scient. Pariſinae ad annum* 1726, *p.* 209; ſed, quod fateri debemus, non adeo felici ſucceſſu. Recenſet, ac prolixe demonſtrat, hanc con-

Tab. V. Fig. 4.

conſtructionem. Sit fornicis latitudo AB, altitudo ON; fiat $BY = ON$, $OZ = \frac{1}{2} OY$; ſupra ZY deſcripto ſemicirculo ducatur ZT, cui aequalis reddatur ZD; iam ſuper $DE = 2 DO$ erigatur triangulum aequilaterum DCE, eritque D et E centrum arcus AL et BM, intra AB, et CL, CM, ducendi; C vero erit centrum arcus LNM. Sit pro hoc conſtructionis modo $OD = x$, $OA = a$, $ON = b$, ac $a - b = m$; eritque $DE = DC = 2x$; $OC = x\sqrt{3}$; $AD = LD = a - x$; nec non, ob $CL = CN$, habebitur $2x + a - x = x\sqrt{3} + b$, vnde deducitur $x = \frac{m}{\sqrt{3} - 1}$, aut, ſi commodius videatur hoc vti valore, $x = \frac{m(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = m \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2}$, qui expeditius ita poteſt conſtrui.

Fig. 5.

Fiant OR, OQ, OP, aequales ſingulae $\frac{1}{2} m$, et ſuper PR erigatur triangulum aequilaterum PSR, erit $SQ = x$. Habebitur enim ſic $OS = \sqrt{(m^2 - \frac{1}{4} m^2)} = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, et conſequenter $SQ = \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2} = \frac{m(\sqrt{3} + 1)}{2}$. Haec autem conſtructio arcus, valde a *Pitoto* depraedicata, cum ſine neceſſitate ſupponit triangulum DEC aequilaterum, quod *Blondellus* multo melius aequicrurum aſſumit (§. XXI.), id incommodi ſecum fert, vt in arcubus valde depreſſis circa L et M ingrati poplites oriantur, quia tum radii LD, LC, nimium inter ſe differunt longitudine, quod ſupra ſolicite euitandum eſſe vidimus (§. XXII.). Eſt enim in hac ſolutione differentia radiorum $DC = 2x = \frac{2m}{\sqrt{3} - 1} = \frac{200m}{73} = 2\frac{37}{58} m$, aut fere aequalis $3m$; quo maior itaque adeſt differentia ſemiaxium m, eo maior etiam aderit differentia radiorum DC.

§. XXXI. Cum igitur ex regula *Pitoti* differentia radiorum conſtans ſit, neque minimum quod admittat: videamus, qualis optio in noſtra regula ſit inſtituenda, vt differentia radiorum, pro quibuslibet ſemiaxibus datis, fiat minima, ac inde efficiatur arcus omnium poſſibilium aſpectui gratiſſimus. Eſt autem (§. XXIII.) differentia radiorum

Tab. IV. Fig. 8.

$M I = \sqrt{(m^2 + 2mx + x^2 + m^2 + 2my + y^2)} = \sqrt{(2m^2 + 2mx + x^2 + 2my + y^2)}$, et $y = \frac{m^2}{2x}$. Vt igitur $M I$ fiat omnium poſſibilium minima, erit ipſius differentiale $\frac{m\,dx + x\,dx + m\,dy + y\,dy}{\sqrt{(2m^2 + 2mx + x^2 + 2my + y^2)}} = 0$, aut vero $m\,dx + x\,dx + m\,dy + y\,dy = 0$. Eſt autem ſimul $dy = -\frac{m^2\,dx}{2x^2}$, et $y\,dy = -\frac{m^4\,dx}{4x^3}$; quibus ſubrogatis oritur x, quae differentiam radiorum $M I$ minimam reddit, elicienda ex hac aequatione, $x^4 + mx^3 - \frac{1}{2}m^3 x - \frac{1}{4}m^4 = 0$.

Tab. V. Fig. 6.

§. XXXII. Huius aequationis incognita x ita eruitur. Conſtruatur Porabola D A M, cuius parameter $= m$, differentiae ſemiaxium fornicis; in hae capiatur $DE = \frac{11m}{16}$, et ad hanc perpendicularis $EC = \frac{3m}{16}$; centro hoc C, et radio $CM = \frac{m\sqrt{165}}{16}$, deſcribatur circulus, ſecans parabolam in m et M; tum capiatur $DG = \frac{m}{16}$, eritque ſic, ex natura parabolae, $GA = \frac{m}{4}$; ex A ducatur AP, parallela axi parabolae, et ad hanc AP demittantur ex M et m perpendiculares MP, mp, erunt hae aequales, et PM, aut pm, $= x$. Ponatur enim $AP = y$; atque erit $GE = DE - DG = \frac{5m}{8}$; demiſſa perpendiculari CH ad FP, erit $PH = GA - EC = \frac{m}{16}$; hinc ex natura para-

parabolae, $mx\,DF = FM^2$, aut $m(y + \frac{m}{16}) = (x + \frac{m}{4})^2$; vnde prodit $y = \frac{x^2}{m} + \frac{x}{2}$. Sed ex natura circuli eſt $CH^2 + HM^2 = CM^2$, aut vero $(y - \frac{5m}{8})^2 + (x + \frac{m}{16})^2 = \frac{165\,m^2}{16^2}$; vnde deducitur $y = \frac{5m}{8} \pm \sqrt{(\frac{164\,m^2}{16^2} - x^2 - \frac{mx}{8})}$. Ex his itaque duobus valoribus ipſius y aequatis nanciſcimur hanc aequationem, $\frac{x^2}{m} + \frac{x}{2} - \frac{5m}{8} = \pm \sqrt{(\frac{164\,m^2}{16^2} - x^2 - \frac{mx}{8})}$, et quadratis membris, deletisque ſeſe tollentibus, redit haec aequatio, $x^4 + mx^3 - \frac{1}{2}m^3x - \frac{1}{4}m^4 = 0$, quae erat conſtruenda. Atque prodit quidem ſic x quam proxime aequalis $\frac{11\frac{1}{3}m}{16}$ ſiue 0, 70833 m; et conſequenter $y = \frac{12\,m}{17}$, ſiue 0, 70588 m. Eo igitur iam negotium hoc deduximus, vt, de quo nemo huc vsque cogitauit, fornicem delineare poſſimus, ex duobus circuli arcubus conſtantem, de quo demonſtrare liceat, illum omnium poſſibilium, pro datis ſemiaxibus, eſſe venuſtiſſimum, minimumque poplitis habere. Capiatur enim modo loco x, $DI = 0$, 70833 m, et loco y, $EM = 0$, 70588 m, ducatur MIK, et deſcribantur arcus AK, KB, centris I et M, vti ſupra modo dictum fuit (§. XXII.). Cum autem DI ſic inuenta ipſam EM 0, 00245 partibus modo ſuperet: in praxi tuto aſſumi poteſt, pro differentia radiorum minima reddenda DI et EM eſſe aequales; aut $x = y = \frac{m^2}{2x}$, quod efficit $x = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}m\sqrt{2}$; captis igitur CD et CE, vti ante aequalibus, $= m$, ducatur hypothenuſa ED, et biſecetur in N, erit $EN = DI = EM$, pro differentia radiorum MI efficienda minima. Sed quoniam ſemper Tab. IV. Fig. 8.

 debet

debet eſſe DILDA, $\lessdot a-m \lessdot b$, neceſſe eſt, vt in hac praxi ſit DI, aut hoc caſu DN, $\lessdot b$, aut $DE \lessdot 2b$.

Tab. V. Fig. 7. §. XXXIII. Faſtigia turrium arcuata rotunda ſequenti modo eleganter delineari poſſunt, pro quauis ratione altitudinis ad latitudinem. Sit enim haec AB, et ſuper hanc triangulum aequicrurum quoduis ACB; latera AC, BC, ſecentur in tres partes aequales, per quas ducantur parallelae KL, DE, OI, biſecetur CE in H, et ex H erigatur perpendicularis HI, ſecans OC in I, erit CI radius communis, quo arcus duci debent. Nam ducta recta per E, quae ſit IEK, erit I centrum arcus CE et K centrum arcus EG. In triangulis nempe ICH, et IEH, praeter rectos ad H, eſt HC = HE, et HI communis; ergo haec triangula aequalia, et IC = IE, quare arcus CE tranſibit per C et E, neque vnquam arcus oppoſitus CD, centro O, vbi CO = CI, deſcribendus, hunc priorem interſecabit, ob vtriusque angulum in C rectum. Sed porro in triangulis CIE, GKE, eſt EG = EC, *per conſtruct.* ICE = KGE, ob parallelas CI et KG; et anguli apud E verticales etiam aequales; vnde etiam haec triangula ſunt aequalia, et, ob IC = IE; erit quoque KE = KG; vnde centro K radio communi deſcriptus arcus tranſibit per G; et quoniam centra I et K ſunt in eadem recta IEK, arcus CE et EG; facient apud E vterque angulum rectum, adeoque poplitem non efficient. Capiatur denique GM = radio communi CI, et pari ratione demonſtrabitur, futuram eſſe GM = BM, hoc eſt M eſſe centrum arcus GB; centra K et

K et M eſſe in eadem linea recta, et hinc poplitem apud G euitari; ſed apud B poples dabitur, qui in eiusmodi tectis non eſt effugiendus. Arcus deinde ex altera parte deſcribantur radio eodem communi, centris O, L, N, ſimiliter cum prioribus poſitis. Hinc nullam rationem ſufficientem perſpicio, quare *Ioh. Wilhelmus in Architectura ciuili*, 1668 *edita* pro radiis arcuum CE et BG generaliter aſſumat $\frac{7}{22}$ BC, pro radio autem arcus EG $\frac{4}{11}$ BC; ex hac enim menſura conſtanti radiorum fit, vt in his faſtigiis, paullo altioribus quam latis, arcus CD et CE ſeſe interſecent, adeoque conſtructionem inutilem reddant.

§. XXXIV. Haec itaque arcuum circularium combinatio poplites excludens, huc vsque pertractata optime ſuccedit, cum pilae ſunt verticaliter erectae, et aequales, vt recta ipſarum ſummitates iungens fiat horizontalis; ſed cum pilae ſunt inaequales, neque verticales, ſed quomodocunque inclinatae inter ſe, hoc eſt, cum fornices conſtitui debent obliqui, *arcs rampants*, tum nihil plane agi poſſe eiusmodi arcuum circularium compoſitione, annotauit *Blondel, Cours d'Architecture*, P. IV, *lib.* VI, *cap.* 9 *p.* 424, neceſſariasque, et vſus indiſpenſabilis eſſe hic indicauit ſectiones conicas, ita ducendas, vt illae tangant duas rectas datas in datis punctis, et tertiam in puncto quocunque. Sed eraſſe in hoc Virum ſagaciſſimum videbimus infra (§. XXXVII.). Conſtruendos vero ſaepius eſſe eiusmodi fornices obliquos, praecipue in ſcalis, aliisque occaſionibus, ibidem oſtenditur.

§. XXXV.

TAB. V. Fig. 8. §. XXXV. Sit igitur fornix ellipticus AHB efficiendus ſuper pilas, *piedroits*, PA, QB, quomodocunque inclinatas, et horizonti PQ oblique inſiſtentes; ſitque linea obliquitatis, *la ligne de la rampe*, AB, hinc et inde continuata, in μ et I; et linea determinans altitudinem fornicis EF, continuata etiam in I, vbi ſecet lineam obliquitatis; totum negotium iam eo reducitur, vt deſcribatur ellipſis, quae triangulum GEF concluſum, ex pilarum, et lineae altitudinem determinantis, productione, tangat in duobus punctis datis A et B, et tertio H vbicunque. Biſecetur ergo data recta AB in Z, et ex G ducatur recta GZΦ, atque haec erit, ob tangentes GA, GB, diameter ellipſeos; AB ordinatim applicata, per *Apollonii prop.* 30, *lib.* II. Sit itaque in hac centrum eiusdem Y, et ducantur AH, BH, cum EY, FY, eruntque ob tangentes EA, EH; FB, FH; rectae EY, FY, diametri, et ad has reſpectiue ordinatim applicatae AH, BH, biſectae in V, et X. Demittantur ex centro perpendiculares in latera trianguli Yλ, et Yr; ducantur praeter ea rectae Eμ, Fη, diametro GΦ parallelae; nec non rectae AY, HY, BY; atque ob aequalia triangula AGZ, BGZ, nec non ob aequalia AYZ, BYZ, hoc eſt, ob aequalia triangula GAY, GBY, erit iam $AG \times Y\lambda = BG \times Yr$; aut vero $BG : AG = Y\lambda : Yr$. (A). Deinde ob ſimilia triangula EμA, GZA; et FηB, GZB; habebitur $E\mu : AE = GZ : AG$, nec non $BF : F\eta = BG : GZ$; ex quibus proportionibus inter ſe multiplicatis oritur haec $E\mu \times BF : F\eta \times AE = BG : AG$, aut vero talis

Eμ:

E μ : F η = A E × B G : B F × A G, vel pro ratione B G : A G ſubſtituendo aequalem Y λ : Y r, (A) emergit haec proportio E μ : F η : = A E × Y λ : B F × Y r. (B) Eſt autem E H : H F = E Y H : F Y H; eſt porro E I : F I = E μ : F η = A E × Y λ : B F × Y r, per (B) = A E Y : B Y F. Sunt deinde, ob biſectam A H in V, triangula A E Y, et E Y H aequalia; et pariter, ob biſectam B H in X, triangula B Y F et F Y H aequalia; ergo ratio A E Y : B Y F eadem eſt cum ratione E Y H : F Y H; hinc etiam rationes E I : F I, et E H : H F erunt aequales, hoc eſt, E I : F I = E H : H F; aut, quod in idem recidit, recta E I diuiſa eſt harmonice in punctis H et F; ſiue tres rectae E I, H I, F I, ſunt harmonice proportionales, vt nempe ſit E I − H I : H I − F I = E I : F I. Vnde, ſi inter datas E I et F I quaeratur media proportionalis harmonice H I, determinabit illa punctum H, in quo ellipſis tertium trianguli latus E F tangit; ducta deinde B H, et biſecta in X, determinabitur per rectam F X Y centrum ellipſeos Y; et quoniam ob tangentem G A, et ordinatim applicatam A B, eſt Y Z : Y α = Y α : Y G; vti *ex conicis* patet: erit *Semidiameter* ellipſeos Y α = Y β = √(Y Z × Y G); et conſequenter ſemidiameter coniugata huic priori $Y\delta = \frac{ZA\sqrt{GY}}{\sqrt{GZ}}$. Idem hoc problema copioſe ſoluit et prolixe *Blondel in Memoires de l'Academie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, *tomo* v. in peculiari tractatu, cui titulus eſt *Apollonius Gallus Tactionum.* Si vero aliquando ellipſis haec inuenta abeat in circulum, ſub caſibus ſpecialibus, egit de hoc *Boſſe*, *in Ouvrages d'Architecture.*

§. XXXVI. Vt aequationem algebraicam ex hac praemiſſa conſtructione eruamus vtilem ad varios problematis caſus excutiendos, ponantur, ducta M N parallela ad ZA, adeoque ordinatim applicata ad diametrum Gβ, $\beta M = x$, $MN = y$, ſemidiameter $\beta Y = m$, $ZA = a$, $\beta Z = b$; et hinc $\alpha Z = 2m - b$. Erit ſic ex natura ellipſeos $ZA^2 (a^2) : MN^2 (y^2) = \alpha Z \times Z\beta (\overline{2m-b} . b) : \alpha M \times M\beta (\overline{2m-x} . x)$, quae reducitur ad hanc aequationem $y^2 + \frac{a^2 x^2}{2mb - b^2} - \frac{2 a^2 m x}{2mb - b^2} = 0$. Ex qua nunc facile perſpicitur, eam generaliter eſſe ad *Ellipſin*, cuius diameter $\alpha\beta$, et ordinatim applicata ZA, antea determinatae; in caſibus vero particularibus eandem eſſe ad *Circulum*, ſi fuerit $a^2 = 2mb - b^2$; ad *Hyperbolam*, ſi exiſtat $b > 2m$; ad *Parabolam* autem, ſi contingat eſſe $m = \infty$, vbi nempe $\frac{a^2}{2mb - b^2}$ euaneſcit, et prodit $y^2 - \frac{a^2 x}{b} = 0$, vbi ſcilicet pilae fornicis PA, QB, ſunt parallelae. Inueniri igitur haud difficili conſtructione hac ratione poteſt diameter Ellipſeos $\alpha\beta$, atque huius coniugata $\delta Y \pi$, ducendo nempe parallelam $\delta\pi$ ipſi AB, per centrum Y; quomodo autem ex his diametris coniugatis datis deinde porro reperiri debeant axes methodo omnium commodiſſima, et noua, docui in horum ipſorum *Nouorum Commentariorum Academiae Scientiarum Imperialis tomo* I. *pag.* 127, quanquam etiam ex ſolis diametris duabus coniugatis datis Ellipſis commode deſcribi poſſit per puncta infinita, ſecundum methodum *Hoſpitalii*, *ſection. conicor. prop.* 13, *p.* 43.

§. XXXVII. Diximus ſupra, *Blondellum* neceſſarias exiſtimaſſe ſectiones conicas in conſtruendis fornicibus ſupra

pra pilas inclinatas et inaequales (§. XXXIV.): verba eius haec ſunt in *Cours d'Architecture P. IV, lib. VI.* „*cap.* 9. Il y a eû divers architectes, qui ont eſſayé „de trouver des manières d'en tracer le trait par des „portions de cercle ſur divers centres: mais comme „leur pratiques ſont fauſſes, faiſſant jarret en divers „lieux, & principalement ſur les lignes des piedroits, „outre que les centres des cercles dont ils ſe ſervent ne „ſont le plus ſouvent trouvéz que par hazard & en „tatonnant; je n'ai pas crû devoir y faire aucune re„flexion, & j'ai jugé, que ces arcs, pour être juſtes „& corrects, devoient être l'une des ſections coniques.„ Reiicit igitur hic vir ſolertiſſimus arcus circulares, et ſectiones conicas in Architecturam ciuilem recipit, contra huius praecepta, neceſſitate, vti putat, adductus, quia in hoc caſu arcus circulares poplites euitare nequeant, nec ratio Geometrica conſtet, cuius ope tales arcus circulares debeant deſcribi. Sed errat in hac re vir alias ſubtiliſſimus; tradam enim methodum formandi fornices ſupra pilas quomodocunque inclinatas, et inaequales, ex arcubus duobus circularibus, qui et nuſquam poplitem vllum faciant, ſed et ratione Geometrica determinantur; qua ipſa non parum vtilitatis ad ſcientiam aedificandi attuliſſe mihi videor.

§. XXXVIII. Sint in hunc finem duae pilae inclinatae et inaequales P A, Q B, ad vtramque erigantur perpendiculares A F, B E, decuſſantes ſe in D; capiatur D C differentia harum perpendicularium, et biſecetur in G; erecta perpendicularis G I ſecans B E in I, dabit Tab. V. Fig. 9.

 in

in I centrum ducendi arcus circularis H B, atque in C centrum erit deſcribendi arcus alterius circularis A H; Conſtat ita de conſtructionis huius ratione Geometrica perfecta; deinde arcus A H perfecte coincidet cum pila A P, quoniam et ad A P, et ad A H, perpendicularis eſt radius A C, quod ſimili modo de arcu H B probatur. Ductus eſt igitur, quod *Blondellus* fieri poſſe negauit, ſuper pilas quaſcunque arcus circularis duplex, Geometrice et omni poplite carens.

§. XXXIX. Solutio problematis Algebraica haec eſſe poteſt. Sint $DC = x$, $DI = y$, et, demiſſa perpendiculari BK, $DA = a$, $BK = b$, $DK = c$, $BD = e$; atque erit, ob triangula ſimilia BKD, IGD, $BD(e) : DI(y) = BK(b) : IG\left(\frac{by}{e}\right)$; et pariter $BD(e) : DI(y) = DK(c) : DG\left(\frac{cy}{e}\right)$; vnde $GC = x - \frac{cy}{e}$, et $CI = \sqrt{\left(\frac{b^2y^2}{e^2} + x^2 - \frac{2cxy}{e} + \frac{c^2y^2}{e^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{b^2+c^2}{e^2}y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right)} = \sqrt{\left(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right)}$, ob $b^2 + c^2 = e^2$. Exinde debet eſſe $CA = x + a = CH = CI + IB = \sqrt{\left(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right)} + e - y$; aut vero, ponendo $m = e - a$, debet eſſe $\sqrt{\left(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right)} = x + y - m$; vnde prodit

$$y = \frac{\frac{1}{2}m^2e - emx}{em - \overline{e+c}.x};$$

ex quo patet, infinitas ſolutiones admittere hoc problema, vti ſuperius (§. XXIII.); quarum vnicam dabo, aſſumendo nempe, vti modo ante feci, $x = DC = m$; hinc fit ergo $y = \frac{\frac{1}{2}me}{c}$; eſt autem per conſtructionem traditam, ob triangula ſimilia DKB

et

et DGI, DK(c): DB(e) $=$ DG($\frac{1}{2}m$): DI($\frac{\frac{1}{2}me}{c}$) $= y$.

Manifeſtum eſt porro, locum Geometricum problematis huius indeterminati eſſe iterum Hyperbolam intra aſymptotos, cuius vero tradendae conſtructioni, aut determinandae differentiae radiorum IC minimae, non immorabor. Ad hoc ſolum erit attendendum in praxi, vt, ſi punctum D cadat extra pilam PA, et ſic AD fiat negatiua; tum capiatur $m = e + a$.

§. XL. Cum autem praecedens haec conſtructio et ſolutio non adeo commode applicari poſſint ad illum caſum, quo duae pilae ſunt verticales, ſed inaequales: deſtinabimus hinc ſequentem aliam ſoluendi modum. Sint pilae verticales, ſed inaequales, PA, QB, ſupra quas ducendus eſt fornix circularis compoſitus; ad PA ducatur perpendicularis AD, et ſit centrum arcus AF in D, ipſa vero AD $= x$, et praeterea differentia altitudinum GB $= a$, AG $= b$, BC $= y$, ita vt in perpendiculari BC ad BG in C haereat centrum alterius arcus FB. Erit ita AE $= b - y$, ED $= x -$ AE $= x - b + y$, adeoque $\sqrt{}(ED^2 + EC^2) +$ CB $=$ DF $=$ DA, hoc eſt, $\sqrt{}(x^2 - 2bx + b^2 + 2xy - 2by + a^2 + y^2) + y = x$, ex quo efficitur $y = \frac{2bx - a^2 - b^2}{4x - 2b}$; atque iterum elucet, problema hoc infinitis modis poſſe reſolui, prout haec nempe x, aut alia, aſſumitur; ſed breuitatis cauſſa aſſumamus $x = b =$ AG, atque erit ſic $y = \frac{b^2 - a^2}{2b}$, aut $2y = b - \frac{a^2}{b}$; hinc pro hoc caſu facillima ſequens emergit conſtructio: ex vna pila ducatur perpendicularis AG ad ipſam; ex altera B huic parallela BC; capiatur AD $=$ GB, eri- Tab. VI. Fig. 1. Fig. 2.

 gatur

gatur perpendicularis DF, et huic fiat aequalis AH, erit HG $= b - \frac{a^2}{b} = 2y$; ſin igitur HG biſecetur in E, et erigatur perpendicularis EI ſecans ſuperiorem BC in I, dabitur in I centrum arcus CKB et in G centrum arcus ACK; quae omnia vlteriori demonſtratione non egent.

Tab. VI. Fig. 3. §. XLI. Nihil attinet dicere de arcubus Gothicis Gallice, *arcs à tiers point*, in quibus centro A, radio AB, deſcribitur arcus BC, eodem deinde radio, centro B, arcus AC, vt ita triangulum rectilineum ABC ſit aequilaterum. Quamuis enim iudice *Blondello* in *Cours d'Architecture p.* 419, tales arcus omnium ſint fortiſſimi ad geſtanda onera, minimumque impulſionis (*pouſſée*) faciant in ſuas pilas, vnde ſine dubio in aedificiis Gothicis antiquis, templis, portis, feneſtris, ex hac cauſſa perpetuo fuerunt in vſu; tamen eodem arbitro grauiſſimo, exulare debent hi arcus ex omnibus aedificiis ſecundum regulas probae et elegantis Architecturae exſtruendis, quae nempe nuſquam tolerant poplitem adeo inſignem et inuenuſtum, qualem hi arcus in ſummitate ſua prae ſe ferunt, eoque oculos intelligentis ſpectatoris mirum in modum laedunt.

§. XLII. In tectis rectilineis etiam multa occurrunt, quae mathematicam admittunt cognitionem. Cantherii tectorum, (*les chevrons*) ab impoſitis tegulis premuntur; adeoque propius ab his ad fracturam adiguntur, quam ſi liberi ab hoc integumento, neceſſario tamen,
Fig. 4. eſſent. Quaeritur itaque, an tectum altius BA, magis prematur ab impoſito ſibi onere tegularum, quam vero tectum

tectum depreſſius B C; poſita vtriusque tecti ſemilatitudine BD eadem? Quod, vt examinemus, ponamus tecti A B pondus eſſe $= p$, collectum in centro grauitatis E, hoc eſt in medio ipſius A B, hoc pondus ſit expoſitum per E F verticalem; reſoluta hac in E G, perpendicularem ad AB, et GF eidem parallelam, dabit ex ſimilitudine triangulorum E G $= \frac{p \cdot BD}{AB}$, $=$ preſſioni, quam tectum hoc altius A B ſuſtinet. In tecto depresſiori B C, cuius pondus H I $= \pi$, ſimiliter reperietur preſſio H K $= \frac{\pi \cdot BD}{CB}$, quae duae preſſiones igitur inter ſe erunt $= p.$ C B : $\pi.$ A B; ſed ob tecta ſuppoſita homogenea erit $p : \pi =$ A B : C B, aut erit $p.$ C B $= \pi.$ A B; ergo preſſiones, quas tectum aut altius, aut depreſſius, recipiunt a materia homogenea, ſunt inter ſe aequales; poſita latitudine tecti in vtraque altitudine eadem. Quod primus reperit *Coupletus*, in *Memoires de l'Acad.* 1731. *p.* 69. Certum igitur eſt, ſuper eadem baſi erecto ſiue altiori, ſiue depreſſiori tecto, vtrumque aequaliter premi ab onere ſibi impoſito: interim tamen altius tectum erit debilius; quoniam in eo preſſio eadem agit in brachium longius A E $= \frac{1}{2}$ A B, adeoque exinde maius acquirit momentum mechanicum, ex ratione vectis facile perſpiciendum.

§ .XLIII. Si praeterea examinare velimus, vtrum tectum altius, aut depreſſius, habeat plus impulſionis, *pousſée*; conſiderabimus cantherium ab onere ſuo trahi iuxta longitudinem ſuam quantitate G F; capiatur huic G F $=$ B L, et reſoluatur in verticalem B M, et horizontalem

lem B N ; abſorbebitur illa in pilam tecto ſuppoſitam; Sed B N conabitur pilam eandem extus trahere et protrudere ; erit itaque B N menſura legitima impulſionis. Eſt autem B L = G F = $\frac{p + AD}{AB}$; atque hinc in triangulo B N L erit ſinus totus (1) : B L ($\frac{p + AD}{AB}$) = ſin. B L N ($\frac{BD}{AB}$) : B N ($\frac{p + AD + BD}{AB^2}$); ſed ob $p : \pi$ = A B : C B, aut $\frac{p}{AB} = \frac{\pi}{CB}$, erit $\frac{p}{AB}$ conſtans, qualis etiam ſupponitur eſſe B D ; habetur ergo impulſio tecti proportionalis huic quantitati $\frac{AD}{AB}$, ſiue ſinui anguli ABD; cum itaque in tecto altiori ſinus hic ſit maior quam in depreſſiori : euidens eſt, illius propulſionem eſſe maiorem. Nescio igitur, qua cauſſa inductus ſtatuerit *Coupletus in Memoires de l'Acad.* 1731. *p.* 69. *ſeqq.* tecta, quo ſint altiora, eo eſſe ſolidiora ; ob liberiorem defluxum pluuiarum, difficiliorem ſubleuationem tegularum a vento forti efficiendam, quae certe vera ſunt ; ſed cum addit altiora tecta habere minorem impulſionem horizontalem, id non perſpicio.

§. XLIV. Elegans et vtilis eſt quaeſtio de tectis, *Marſardicis* dictis, ita conſtruendis, vt quantum fieri poteſt, illa ipſa ſe teneant in aequilibrio, neque alicubi, ſine neceſſitate praegrauent. Huius problematis ſolutio-
Tab. VI. nem reperi ſequentem. Sit tale tectum conſtruendum
Fig. 5. ſuper ſemilatitudine D C, ac altitudine D A ; iungantur A et C linea recta, quae biſecetur in M, et ex M erigatur perpendicularis M B, cuius determinatio deſideratur, vt deinde rectae duae aequales A B, B C illuc ductae tectum *Marſardicum* conſtituant, et ſeſe mutuo

teneant

teneant in aequilibrio. Igitur erit triangulum A B C aequicrurum. Sit nunc trabis A B pondus $= p$, collectum in centro grauitatis ipſius E, et expoſitum per rectam libere aſſumtam verticalem E F $= p$; reſoluatur haec E F in vires collaterales E H et E G, quarum haec ſit horizontalis, altera in directione ipſius trabis A B. Patet, illam horizontalem deſtrui a trabe, ex altera tecti parte ſimiliter poſita; hanc vero E H idem efficere, ac ſi trabs A B traheretur in ſuo extremo B vi $=$ E H $=$ B I, recta A B continuata. Reſoluatur haec B I iterum in collaterales B K et B L, illam normalem ad B C, et hanc in directione ipſius B C, redundabit haec in hypomochlium C; illa vero B K conabitur trabem B C vertere circa C extrorſum momento B K $\times$ B C. Iam vero trabs B C, vi ponderis ſui in centro grauitatis N, collecti, deorſum nititur verticaliter vi N P $=$ E F $= p$, ob aequalitatem harum trabium; quae N P reſoluatur in N O et N Q, quarum illa ſit normalis ad B C, haec in directione B C. Redundabit N Q iterum in hypomochlium C; vnde hoc par eſſe debet ſuſtinendis viribus B L $+$ N Q; ſed N O conabitur trabem B C introrſum vertere circa C, momento N O $\times$ N C $= \frac{1}{2}$ N O $\times$ B C. Vt igitur hae duae trabes A B, et B C ſeſe teneant in mutuo aequilibrio: debet eſſe $\frac{1}{2}$ N O $\times$ B C $=$ B K $\times$ B C; ex quo fit N O $= 2$ B K. Sint igitur anguli D A C ſinus m, coſinus n; anguli M A B $=$ M C B ſinus x, coſinus y; erit ſinus F H E (coſ. D A B, $ny - mx$): E F (p) $=$ ſin. tot. (1): E H ($\frac{p}{ny-mx}$) $=$ B I. Porro eſt, ſin. tot. (1) : B I ($\frac{p}{ny-mx}$) $=$ ſin. B I K

 (ſin.

(ſin. L B I, ſin. 2 M A B, $2xy$) : B K ($\frac{2pxy}{ny-mx}$). Eſt denique etiam ſin. tot. (1) : N G (p) = ſin. O P N (ſin. P N Q, coſ. D C N, $my-nx$) : N O ($p.\overline{my-nx}$); ergo erit $p(my-nx) = \frac{4pxy}{ny-mx}$; quae reducitur ad hanc ſequentem $mn(x^2+y^2) - xy(m^2+n^2) = 4xy$; ſunt vero $x^2+y^2 = 1$, et pariter $m^2+n^2 = 1$; ergo obtinebitur $mn = 5xy$; aut vero $\frac{2mn}{5} = 2xy =$ ſin. 2 M A B. Sed eſt pariter $2mn =$ ſin. 2 D A C; ergo reſultat $\frac{1}{5}$ ſin. 2 D A C = ſin. 2 M A B. Accipiatur ergo ſinus anguli dati 2 D A C, hic diuidatur per 5; dabit quotus ſinum 2 M A B; vnde problema erit conſtructum. Idem hoc problema ſoluit quoque *Coupletus in Memoires de l'Academie des Sciences de Paris*, 1731 *p.* 69. ſed iudicent aequi et intelligentes huius rei aeſtimatores, vter noſtrum verum tetigerit? Si iam porro quaerantur valores ipſarum B L et N Q: harum ſumma trahet trabem B C, in C, ſecundum directionem B C. Haec ſumma reſoluatur in vires collaterales horizontalem et verticalem; atque erit illa propulſio, quam pilae domus ab hoc tecto impoſito patiuntur, et cui proinde reſiſtere debent; quae propulſio iterum in *loco citato* diuerſa ab hac aeſtimatione menſuratur.

DE VIRTVTE MAGNETICA
ABSQVE MAGNETE COMMVNICATA EXPERIMENTA.

AVCTORE

G. W. RICHMAN.

Acceptis a Viro plurimum Reuerendo *Dumareſque*, Anglicanae Eccleſiae Paſtore, quibusdam ex Anglia ad ipſum miſſis ſcriptis, in quibus methodus virtutem magneticam absque magnete communicandi deſcripta erat, et lamellis chalybeis in hunc finem paratis, quibus tamen virtus magnetica nondum communicata erat, decantata in Anglia experimenta imitari tentaui. Et quia, quae requirebantur ad experimenta haec rite inſtituenda, omnia ad manus non erant, et nonnulla ab autore *Michel* Anglo, qui methodum praeſcripſit, minus diſtincte propoſita, ſubſtitui alia, de quibus cogitaui, idem praeſtitura eſſe, et mutaui methodum aliqua ex parte ad finem eundem obtinendum, ſequentiaque pericula feci.

EXPERIM. I.

Ope veru AB, prope A ſuspenſi, lamellam *a b* ex Tab. VI.
chalybe molli, politam, longitudinis trium digit. Lond. Fig. 6.
latitudinis duarum et dimidiae lineae et craſſitiei vnius quartae circiter partis lineae, ponderis 69 granorum, inter parallelepipeda ferrea DE et FG, (quorum quodlibet erat 50 libr. Ruſſ. longitudinis 23. digit. Lond. circiter, latiudinis 6 digit. ferme et craſſitiei paulo plus quam digiti) lineae meridianae magneticae ferme pa-

rallela parallelepipedis paruis ferreis *c* et *d* impoſitam, ſtrinxi a ſeptentrionali plaga auſtralem plagam verſus, verſus quam plagam veru reſpiciebat extremitate A. Et tandem veru et lamella virtutem directricem tali tritu acceperunt, quam acus magnetica prodidit. Extremitas *b* illa, quae boream verſus reſpexerat, polus borealis lamellae fiebat, altera polus auſtralis. Aliquot centenis tamen ductibus opus erat, antequam lamella acquireret dictam virtutem. Virtute directrice acquiſita, paucis ductibus additis, e. g. 50 ad 60 additis, lamina obtinuit virtutem 7 ad 8 drachmas ferri ſuſtentandi virtute ſua magnetica acquiſita, et idem pondus etiam veru A B trahebat, quod ante tritum nullam aliud ferrum attrahendi virtutem prodiderat.

Ioh. Michel in tractatu de *Artificialibus Magnetibus* loco parallelepipedi F G, extremitati boreali adplicati, ſimile parallelepipedum triginta libr. Lond. adhibuit, longit. quatuor pedum Lond. extremitate boreali parallelepipedi paululum infra horizontalem depreſſa, extremitati auſtrali adplicuit parallelepipedum 18 libr. Lond. longit. quatuor pedum et 6 digitorum.

Inſtrumentum iſtud, cui ego veru ſubſtitui, *Michelo* fuit baculus ferreus, quo in Anglia vtuntur ad carbones in caminis agitandos et cuius pondus libram Lond. paululum ſuperabat. Virtus magnetica, quam *Michel* chalybeae lamellae tribuit tritu per baculum praedictum ferreum, minor tamen erat ea, quam ego ipſi tribui per veru, lamella enim eius ponderis 80 granorum ſuſtentabat tantum 4 drachmas poſt acquiſitam tritu per baculum ferreum magneticam virtutem, cum mea lamella 69 granorum, 7 ad 8 drachmas ferri traheret.

EX-

EXPERIM. II.

Laminae talis abſque magnete magnetica virtute imbutae virtus attrahendi ferrum debilitabatur

I. Vehementi et ſaepius repetita proiectione in pavimentum, vel lapſu vehementi, ita vt tandem pauca tantum grana ferri attrahere valeret, virtus directrix tamen non periit.

II. Inflexionibus in multis locis factis, virtus directrix tamen non prorſus periit.

III. Candefactione in igne, qua virtus directrix etiam periit, ſemel tamen obſeruaui ſenſibilem virtutem directricem poſt candefactionem reſiduam, licet lamina in directione ad acum magneticam normali frigeſceret.

IV. Malleatione, qua virtus directrix tamen difficulter tollebatur.

V. Contrariis ductibus ſitu lamellae inuerſo per veru factis.

Hinc videre eſt, virtutem magneticam lamellarum absque magnete magnetica virtute imbutarum eadem ratione debilitari ac lamellarum magnete magnetica virtute imbutarum.

EXPERIM. III.

Si lamella, cuius virtus magnetica debilitata erat inſigniter vel vehementi lapſu vel inflexione, ope veru, vti dictum Exp. I. quater tantum ſtringebatur, reſtituebatur tota virtus attrahendi ferrum, quam antea habebat.

EXPERIM. IV.

Iis lamellis, quae candefactione in igne virtutem magneticam perdiderunt, difficilius tribuebatur et reſtituebatur magnetica virtus, quam politis non candefactis.

EXPERIM. V.

Cum contrariis ductibus ſitu lamellae inter parallelepipeda inuerſo virtutem ipſi directricem adimere volebam ope veru, obſeruaui ad tollendam magneticam virtutem requiri multo maiorem numerum ductuum, quam ad eam tribuendam. Quatuor enim ſufficiebant ad tribuendam, ſi ſemel lamella magneticam virtutem acceperat (Exp. III.) et inflexione, lapſu vel contrariis ductibus perdiderat, dum centum non ſufficiebant ad virtutem adimendam.

EXPERIM. VI.

Tab. VI. Fig. 6. Si loco ſerreorum fulcimentorum *c* et *d* lignea fulcimenta adhibui, virtus tanta nullo modo tam paruo tempore lamellae potuit tribui, quanta ſi fulcimenta ſerrea adhibita ſunt.

Michel nullam mentionem facit fulcimentorum ferreorum *c* et *d*, vt probabile ſit, ipſum iſta non adhibuiſſe.

EXPERIM. VII.

Si quatuor lamellis *a b c d* dicta ratione Exp. I. Fig. 7. magnetica virtute imbutis, aliam *e f*, quae nondum virtutem acceperat, inter ſerrea parallelepipeda E D et F G ſuper fulcimenta ſerrea locabam et priores *a b c d* amplioribus

plioribus lateribus ſibi impoſitis ita coniungebam, vt duo boreales poli *a b* ex vno latere et duo auſtrales *c d* ex altero terminarentur, in eodem ferme plano, interpoſitoque ab altera extremitate fruſto ligni K, lamellas verticales *a b c d* horizontali *e f* ita imponerem, vt poli boreales verticalium lamellarum *g h* reſpicerent polum auſtralem ſubiacentis *e f* et poli auſtrales verticalium nim. *l m* polum borealem ſubiacentis *e f*, duceremque lamellas *a b c d* antro et retro ſaepius.

a) Horizontalis *e f* accipiebat (1) virtutem magneticam, quam antea non habebat, (2) virtutem maiorem, quam verticales acceperant ope veru.

b) Verticalium tamen virtus tali ratione debilitata eſt.

Michel contrarium aſſerit in tractatu laudato ſcil. creſcere tali permutatione lamellarum virtutem perpetuo vsque ad definitum gradum. Vel igitur ille non obſeruauit decrementum virtutis lamellarum verticalium, vel ego imitatus experimentum peccaui in aliqua circumſtantia.

EXPERIM. IX.

Debilitata lamellarum virtute, vt vix ſcrupulum ferri attraherent, iungebam *a b c d e f*, ita vt lamellae *f* extremitas *g* lineam circiter promineret, haec extremitas *g* trahebat ſtatim 7 drachmas, et prout laminae prominentis virtus minor erat et pondus ferri attrahendum maius, eo minor pars prominere debebat. Si omnes lamellae in eodem plano deſinebant, parum admodum trahebant.

EXPERIM. X.

Si lamellae virtutem inſignem habebant, vt ſeptem drach-

drachmas ferri ſuſtentarent, vnitis ita vt poli boreales deſinerent in eodem plano, et ferro iis admoto, attrahebant et ſuſtentabant quidem coniunctim ferrum, cuiuslibet tamen lamellae virtus inſigniter debilitabatur.

VI. Ergo debilitatur magnetica virtus lamellarum, ſi lamellae vnitis viribus ferrum trahunt. Confer Exper. II.

EXPERIM. XI.

Si parallelepipedum ex indurato chalybe politum longit. 6 ferme digitorum Lond. lat. dimidii digiti et craſſitiei 0. 166 dig. ſimili ratione inter parallelepipeda
Tab. VI. DE et FG locatum, vti lamellae ex chalybe molli
Fig. 6. Exp. I. ſtringebatur cum laminis ex chalybe molli virtute magnetica imbutis, ſimili ratione vti experimento
Fig. 7. VII. indicatum, tandem virtutem magneticam acquirebant, vt pondus octo drachmarum ferri attraherent nimirum non maius pondus, quam quod lamellae ipſae et veru trahebant. Laboraui multis modis, vt maiorem virtutem parallelepipedo communicarem, ſed fruſtra hucusque.

INQVI-

INQVISITIO IN DECREMENTA ET INCREMENTA CALORIS SOLIDORVM IN AËRE

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

Maiorem et minorem corporum virtutem calorem retinendi conſideraturus ſum, quae ſedulo diſtinguenda eſt a capacitate eorum maiori vel minori caloris: ea enim ipſa corpora, quae maioris caloris capacia ſunt, minorem ſaepius virtutem calorem retinendi produnt, vti de mercurio conſtat, ſi cum aqua et aliis fluidis craſſioribus confertur. Vltimam proprietatem, dum Phyſici nonnulli in corporibus offenderent, cum illa etiam priorem connexam eſſe aſſeruerunt. Obtinet hinc in multis ſcriptis Phyſicis propoſitio, corpora eo tardius definitum calorem aſſumere, quo denſiora ſunt, et eo tardius rurſus calorem iſtum perdere. Alii ſimul reſpiciunt cohaerentiam, et credunt, cohaerentiam ſimul ſumtam cum denſitate efficere maiorem vel minorem virtutem calorem retinendi, et motui ex calore reſiſtendi. De argento vivo oſtendi, illud, licet fluidum ſit denſiſſimum, nihilo minus motui ex calore obedientiſſimum eſſe inter fluida craſſiora. Solida nunc ſub examen voco, et edoceor, idem obtinere, neque mobilitatem maiorem a calore (1) denſitati minori, neque (2) cohaerentiae minori, neque (3) vtrique ſimul, neque (4) duritiei minori, neque tandem (5) omnibus ſimul, eſſe adſcribendam. E re etenim vtique eſſe, et ad incrementum ſcientiae facere videtur,

videtur, in proprietates corporum ita inquirere, vt definire valeamus, quid fieri debeat, ne ex propoſitionibus precario adſumtis errores in totum ſyſtema immaturo concludendi ſtudio ſerpant et illud perturbent. Proprietatibus etiam accurate definitis legitimis conſectariis veritates plures alias maiori cum certitudine eruere poterimus. Nunc apparatum et experimenta, quae hunc in finem inſtitui, ſine ambagibus deſcribam.

§. 1. Metallis ſub examen vocatis, illis primo defi-
Tab. VII. nitam temperiem conciliare conſtitui, et ea poſtea defi-
Fig. 1. 3. nitae temperiei aeris exponere, vt decrementa caloris conferre poſſem. Hinc fieri curaui (1) Globos A ex variis metallis cauitatibus cylindricis *a b*, recipiendis bulbis Thermometrorum *c d* aptis praeditos et anſis *e* et *f*, ex quibus globi ſuſpendi poſſent. Diametri globorum erant 4 digit. Lond. et cauitatum cylindricarum diametri vnius digiti et profunditates etiam vnius digiti. (2) Afferruminari curaui tubulos *g b c b* ex lamella aurichalcea tenui, vt profunditates cauitatum fierent duorum digitorum. (3) Thermometra confecta ſunt exacte harmonica bulborum exiguorum, vt hydroſtatice examinata non maius volumen occuparent ac 20 circiter grana medica aquae.

EXPERIM. I.

§. 2. Globo metallico A in aqua, in vaſe BCD,
Fig. 1. in furnulo collocato, ebulliente ſuſpenſo ex funibus *f k*, *e l*, aquae in vaſe B C immerſi bulbum Thermometri *m n*, vt cognoſcerem, vtrum ad 212 gradum argentum viuum adſcenderet, ſiue ad ſummum ebullitionis aquae gradum.

gradum. Infuſa cauitati quolibet experimento eadem copia aquae et immerſo bulbo Thermometri *c d* notaui temperiem aquae in cauitate metallorum contentae. Ita obſeruaui, licet aqua ambiens vehementer ebulliret, vt mercurius gradum 212 Therm. F attingeret, mercurium Thermometri *c d* ad hunc gradum nulla ratione potuiſſe perduci, ebullitione interdum per horae ſpatium continuata. Subſtitit mercurius 6 ad 10 gradus infra 212 gr., et dum decreſcebat aquae ambientis temperies, ſimul mercurius in Thermometro *c d* deſcendebat. In ferreo globo temperies aquae ambientis erat conſtanter 212. gr. per dimidiam horam, et Thermometrum oſtendebat conſtanter 205 gr. Cum temperiem aquae ambientis decreſcere ſinebam

ad gr. 198	Thermometrum *c d* oſtendebat gr.	193
- - - 196	- - - - - -	190 $\frac{4}{18}$
- - - 187	- - - - - -	183 $\frac{2}{18}$
- - - 179	- - - - - -	174 $\frac{4}{18}$
- - - 163	- - - - - -	159 $\frac{6}{18}$
- - - 149	- - - - - -	147 $\frac{2}{18}$

In cupreo globo, cum temperies aquae globum ambientis decreſcebat

ad gr. 199	Thermometrum *c d* oſtendebat gr.	190
- - - 197	- - - - - -	189
- - - 186	- - - - - -	177
- - - 174	- - - - - -	167
- - - 173 $\frac{1}{2}$	- - - - - -	165
Therm. *m n*		Therm. *c d*
ad gr. 159 $\frac{8}{18}$	- - - - - -	154
- - - 132 $\frac{8}{18}$	- - - - - -	130
- - - 123 $\frac{6}{18}$	- - - - - -	122

 Stan-

Stannum, plumbum, aurichalcum ſimiliter examinaui et ſimilia obſeruaui, et ſemper diſcrimen inter calorem aquae ambientis et calorem aquae in cauitate metallorum contentae initio, vbi calor aquae ambientis erat vicinus gr. 212, obſeruabatur. Differentia haec in metallis diuerſis erat diuerſa, diuerſitatis tamen huius rationem habere non potui, quia globos aquae ebullienti ſimul immittere et Thermometra ſimul obſeruare non potui. Huic enim rei apparatus meus non ſufficiebat.

§. 3. Videtur exinde patere, metalla in aqua ebulliente, quae calorem celerius communicat cum aëre frigidiori ſuperficiem contingenti, quam cum quibuslibet corporibus calidis, quibus contigua eſt, minorem temperiem habere ac aqua ipſa ambiens. Hoc phaenomenon ſimilitudinem habet cum phaenomeno iſto, quod G. E. Hamberger *deſcribit in Elementis ſuis Phyſ.* §. 611. *Ed. alt.* dum ſcribit. *Peculiare quoque eſt phaenomenon, quod fundus aheni, in quo aqua ebullit, ſi ahenum ſubito ab igne auferatur, tamdiu nullum ſenſibilem caloris gradum poſſideat, quamdiu aqua ebullit; eo momento vero, quo ebullitio aquae ceſſat, inſignem acquirat calorem.*

§. 4. Subnaſci poterit circa Exp. I. cogitatio: 1) Aquam ipſam nunquam forte caloris 212 gr. capacem eſſe, ſed Thermometrum a ſuperfluis ex aqua adſcendentibus particulis igneis affici ita, vt argentum viuum, quod maioris caloris capax eſt, ac aqua, adſcendere poſſit ad gr 212.

2)

2) Affici quidem metalla etiam ab iſtis particulis igneis adſcendentibus et nanciſci maiorem calorem, quam aqua capax eſſet, non tamen poſſe communicare iſtum calorem aquae in cauitate contentae, quae iſtius caloris non capax eſſet, hinc neque Thermometrum poſſe affici, vt mercurius adſcendat ad gr. 212.

Videtur quidem (1) igneas particulas etiam ex metallo per aquam in cauitate contentam adſcendentes afficere debere Thermometrum et eleuare mercurium ad gr. 212; (2) mercurium Thermometri *m n*, quia continuo a particulis igneis ſuperfluis, quibus retinendis aqua non capax eſſet, afficeretur, adſcendere debere ad maiorem adhuc gradum, quam 212. ſi ratio praedicta obtineret. Vt tamen experimento nouo rationem phaenomeni explorarem, an valida eſſet, loco aquae, oleum oliuarum adhibui et cauitati metallorum infudi, quod perinde ac mercurius multo maioris caloris capax eſt, ac aqua, et phaenomenon idem obſeruaui, nimirum durante ebullitione adſcendit mercurius in Thermometro ab 205 gr. ad 206, et rurſus deſcendit ad eundem gradum, et hic adſcenſus et deſcenſus una quarta parte horae ſaepius obſeruatus eſt.

§. 5. Poſſet etiam disparitas attribui lamellae aurichalceae ex aqua prominenti, quae cum metallo connexa maiorem efficeret metalli ſuperficiem, et ita decrementum caloris progigneret, quod a calore aquae non reſarciri poſſet. Vt explorarem, an haec ratio obtineret, paruum Thermometrum fieri curaui, in quo terminus caloris aquae ebullientis notatus erat et infra hunc ter- Tab. VII. Fig. 2.

 minum

minum digitus Londinenſis diuiſus in 20 partes in ſcala lignea, et una talis pars erat quinque graduum. Tale Thermometrum aquae in cauitate metalli contentae immerſi et ope ſuberis, per quod Thermometrum penetrabat, cauitatem cylindricam clauſi contra aquae ambientis ingreſſum, vt nimirum ſubmerſo globo metallico et cylindrico tubulo, aquae omnis aditus in cauitatem metalli prohiberetur. Ne vero etiam vapores in cauitate metalli retenti calorem excitarent maiorem, veluti in machina Papiniana, per tubulum vitreum *op* per ſuber transmiſſum iis exitum conceſſi. His praeparatis immerſi globum metalli, et phaenomenon idem obſeruaui, ſubſtitit nimirum mercurius in Thermometro plus quam dimidiam lineam i. e. plus quam quinque gradus infra terminum ebullitionis, licet aqua per horae ſpatium in continua ebullitione eſſet. Aqua etiam ipſa in phiala ebullienti aquae immerſa non ebullit, ſed ad minorem gradum incaleſcit, vt hinc concludere ſit, aquam ebullientem, dum calorem communicat celerrime cum aëre contiguo frigidiori, cum phiala aeque ferme calida eum non communicare poſſe, bulbum Thermometri tamen ob volumen paruum et mobilitatem mercurii a calore ad gr. 212 ebullientis aquae perduci poſſe.

EXPERIM. II.

§. 6. Globis A ex aqua ebulliente ſimul extra-
Tab. VII. ctis et ſuspenſis in temperie aeris per Therm. *m n* no-
Fig. 3. tata, notaui tempora decrementi caloris et gradus temperiei, quos Thermometra *c d* aquae in cauitatibus globorum ſtagnanti immerſa prodebant. In prima columna ſequentis Tabellae exſtant tempora, vnitas quinque

que minuta prima valet. In ſecunda columna ſiſtuntur gradus caloris cupri reſidui. In tertia ſunt gradus ferri reſidui et in quarta gradus ſtanni reſidui. In quinta aëris, refrigerantis temperies notatur. Notandum tamen eſt circa hoc experimentum, adhibitos fuiſſe globos, qui non exactiſſime fuerunt eorundem voluminum. Volumina cupri, ferri et ſtanni poſt examina hydroſtatica enim ſe habebant; vti 8757, 9124, 8834.

Tempora	II♀	III♂	IV♃	V. aeris Temper.
0	180	180	180	65 gr.
2	174	172	161	63
4	160	159	142	—
7⅖	143	142	120	—
8	140	139	116	—
10	133	132	107	—
12	124	124	98½	60½
14	118	118	92	60
16	113.5	112.5	88.5	—
18	107.5	107.5	83.5	—
20	104	103	80	—
28	89.5	90	71	—
30	88	88	70	59.5
32	84.2	85	68.5	60
36	82	81.5	66.5	—
37⅗	80	80	66	—
40	79.5	78.3	65	—
44	75.5	76	64	—
52	72.2	72	63	—
64	68	68	62	—
80	65	64.5	61.5	—

§. 7.

§. 7. Stannum ergo a gr. 142 ad 80, 80 min. pr: ferrum ab 142 ad 80, 151 min. pr. et cuprum ab 142 ad 80 eodem tempore peruenit, ac ferrum.

Corol. 1. Cum volumen cupri ſit minus quam volumen ſtanni (§. praeced.) et nihilo minus decrementum caloris cupri tardius fiat, quam decrementum caloris ſtanni, tardius adhuc idem decrementum caloris pati debet cuprum, ſi cum ſtanno idem volumen habet.

Corol. 2. Cum volumen cupri fuerit minus volumine ferri (§. praec.) et decrementa aequalia caloris vtrumque metallum paſſum ſit, cuprum minora decrementa eodem tempore pati debet quam ferrum, ſi cum ferro habet idem volumen.

Corol. 3. Cum ſtannum ob minus reſp. ferri volumen maius decrementum caloris paſſum eſſe dici poſſit quam ferrum, nondum ex his obſeruationibus concludere licebit, ſtannum citius frigeſcere, quam ferrum.

EXPERIM. XI.

§. 8. Detecta diſparitate globorum metallicorum omnes exactiſſime aequales fieri curaui et eadem ratione examinaui cuprum, ferrum, plumbum.

Temp.		II ♀		III ♂		IV ♄		V temper. aër.
0	circiter	194	circ.	194	circ.	194		57
$1\frac{2}{5}$	-	174	-	172.4	-	148	-	—
$1\frac{3}{5}$	-	$172\frac{4}{10}$	-	171.2	-	146	-	—
$3\frac{2}{5}$	-	162	-	159.8	-	129	-	—
$3\frac{4}{5}$	-	160	-	158	-	127	-	—

Temp.	II ♀	III ♂	IV ♄	V. temper. aer.
$3\frac{4}{5}$	circiter 160	circ. 158	circ. 127 -	—
10	- 131	- 129.2	- 92 -	—
13	- 121	- 119	- 83 -	—
$16\frac{2}{5}$	- 112	- 109.4	- 77 -	—
$20\frac{4}{5}$	- 103	- 100	- 71 -	—
$21\frac{3}{5}$	- 101	- 98.6	- 70 -	60
22	- 100	- 98	- 70 -	—
25	- 94	- 91.4	- 67 -	—
28	- 90	- 87.8	- 66 -	—
37	- 82	- 78.8	- 62 -	—
46	- 76	- 71.6	- 61 -	62
51	- 74	- 70	- 60 -	—
85	- 63	- 60	- 59 -	—

§. 9. Cuprum ergo ab 142.4 gr. ad 100. centum et duobus minutis primis, ſerrum 97 min. pr. pervenit. Plumbum ab 129 gr. ad 70 quadraginta et uno min. primo, ſerrum ab 129 ad 70 gr. ducentis et quinque minutis primis acceſſit.

Coroll. 1. Cuprum hinc et ſerrum minora decrementa caloris patiuntur eodem tempore quam plumbum.

Coroll. 2. Ferrum paulo maiora decrementa caloris patitur, quam cuprum eodem tempore.

EXPERIM. IV.

§. 10. Aurichalcum cum cupro examinans erat:

Tempore	Aurich. calor.	Cupri calor.	Aeris calor
0	$189\frac{1}{2}$ circ.	$189\frac{1}{2}$ circ.	63
2	175	174	—
3	169	169	61
$3\frac{1}{2}$	164	164	—
5	156	156	—
8	142.5	142.5	—
12	129	129	—
15	119	118	—
22	105	104	—
54	75	74	—

§. 11. *Coroll.* 1. Cuprum ergo et aurichalcum exactiſſime aequalia decremenra caloris aequalibus temporibus patiuntur in eadem temperie aeris.

Coroll. 2. Aurichalcum ergo tardius, quam plumbum, ſtannum et ferrum frigeſcit. (Exper. II. Coroll. 1. 2. Exper. III. Coroll. 1. 2.) Quod aurichalcum tardius frigeſcat, quam ferrum ex ſequentibus etiam obſeruationibus patebit, et hinc rurſus liquet, ferrum etiam pati maiora decrementa caloris quam cuprum, quod cum aurichalco aequalia patitur (per §. 10.), confirmaturque Coroll. 2. §. 9.

EXPERIM. V.

§. 12. Aurichalcum cum ferro examinans erat:

Tempore.	Calor Aurich.	Ferri Calor.	Aeris calor
0	195 circ.	195 circ.	64
$8\frac{1}{2}$	147	139	—

Tem-

Tempore.	Calor Aurich.	Ferri calor.	Aeris calor.
10 4/5	139	131	—
11 4/5	136	126. 5	—
14 4/5	127	118. 4	—
16 2/5	122	114	—
19 2/5	114. 5	106. 7	—
22 2/5	108	100. 4	—
22 3/5	107 3/4	100.	—
27	101	93. 2	—
27 1/5	100	92. 6	—
30	97	88. 7	—
34 3/5	91. 5	84. 2	—
37 3/5	88	80. 6	—
39 1/5	86. 5	79. 5	—
42 1/5	84. 5	77	—
45 1/5	82. 2	75. 2	—
46 4/5	81	73	—
49 4/5	79	72. 5	—
52 4/5	77. 5	71. 6	—
57 2/5	75	69. 8	—
72	70	66. 8	—

§. 13. *Coroll.* Aurichalcum ergo 83 min. pr. ab 139 ad gr. 100. et ferrum ab 139 ad gr. 100, 69 minutis primis acceſſit. Celerius ergo frigeſcit ferrum quam aurichalcum, conſeq. celerius quam cuprum (§. 11. Coroll. 1).

EXPERIM. VI.

§. 14. Stannum et plumbum examinans primo cum globis non exacte aequalibus experimentum inſtitui, erat enim globus plumbeus paulo maior, et inueni decrementa

 ferme

ferme aequalia, globo plumbeo vero aequali reddito globo ſtanneo et omnibus reliquis inueni

Temp.	Stanni calorem.	Plumbi cal.	Aeris cal.
0	circiter 180	circ. 180	64.
$1\frac{1}{5}$	173	162	—
$1\frac{2}{5}$	171	158	—
$1\frac{3}{5}$	169	155	—
$1\frac{4}{5}$	166	151	—
2	164	148	—
$2\frac{1}{5}$	162	145.5	—
$2\frac{2}{5}$	160	142	—
$2\frac{3}{5}$	159	140	—
3	154	135	—
4	146	124	—
5	239	116	—
8	124	100	—
9	119	97	—
10	114	93	—
$13\frac{1}{5}$	103	83	—
$14\frac{2}{5}$	100	81	—
$16\frac{3}{5}$	95	77.5	—
$67\frac{4}{5}$	65	62	—

§. 15. Plumbi calor ergo ab 162 ad 100 triginta quatuor minutis primis et ſtanni ab 162 ad 100 in eadem temperie aeris 61 min. prim. decreuit.

Coroll. 1. Patitur ergo plumbum maiora decrementa caloris, quam ſtannum.

Coroll.

Coroll. 2. Cum ferri calor ab 139 ad 100 ſexaginta nouem min. pr. decreſcat (Exper. V) in temperie aeris 64 gr: et ſtannum idem decrementum in eadem temperie quadraginta ſeptem minutis primis patiatur (per Exper. praeced.), ferrum etiam tardius frigeſcit, quam ſtannum.

§. 16. *Coroll.* 3. Aurichalcum ergo et cuprum maximam, poſtea ferrum, deinde ſtannum, et tandem plumbum virtutem minimam retinendi calorem habet inter examinata haec corpora.

§. 17. Ex his obſeruationibus rationem decrementorum caloris praedictorum metallorum ſub certa temperie aeris erui poſſe accurate, promittere haud poſſum, quia uno Thermometro poſt alterum obſeruato tempus praeterlapſum eſt, vt hinc qualibet obſeruatione dimidii gradus errorem forte non euitauerim et vel in exceſſu vel defectu peccauerim. Accedit, Thermometra fuiſſe anguſtioris ſcalae et difficultatem accurate obſeruandi auxiſſe. Conſtitutionem denique aeris ratione ſiccitatis et tranquillitatis forte fuiſſe diuerſo tempore diuerſam. Juuat tamen adpoſuiſſe, quodcunque ex obſeruationibus deduci potuit ſequenti tabula. Decrementorum caloris initialium propterea rationem non habui, quia initio obſeruationum Thermometrorum velocitas nimis prohibuit, quo minus tempus, quo mercurius eodem tempore in Thermometris ſtagnabat, notari potuerit, et ſic ipſum initium incertum ſit.

In tabulae ſequentis Columna prima exſtat corpus examinatum: in ſecunda Experimentum, ex quo erutum

eſt decrementum caloris: in tertia, gradus caloris, à quo mercurius Thermometri deſcendere incepit: in quarta differentia inter temperiem metalli et aeris refrigerantis: in quinta gradus, quos quinque minutis primis mercurius abſoluit in temperie aeris, quae obtinebat: in ſexta gradus, quos mercurius abſoluere debuiſſet ſub differentia 119.5 gradus inter temperiem metalli et aeris eodem tempore quinque minutorum primorum. Praecedit omnes columnas columna, quae numerum caſuum adductorum exhibet.

I	II	III	IV	V	VI
1. ♀	Exp.III.	174.0	117.0	6.0 $\mp$	6. 1 $\mp$
2. ♀	Exp.III.	100 0	40 0	2.0 $\mp$	6. 0 $\mp$
3. ♂	Exp.III.	172.4	115.4	6.3 $\mp$	6. 5 $\mp$
4. ♂	Exp.III.	98.0	38 0	2.2 $\mp$	6. 9 $\mp$
5. ♄	Exp.III.	148.0	91.0	9.5 $\mp$	12. 4 $\mp$
6. ♄	Exp.III.	70.0	10.0	1.0 $\mp$	11.95 $\mp$
7. ♃	Exp.VI.	173.0	109.0	11.0 $\mp$	12. 0 $\mp$
8. ♄	Exp.VI.	162.0	98.0	16.5 $\mp$	18. 0 $\mp$
9. Aurich.	Exp. IV.	175.0	112.0	6.0 $\mp$	6. 29 $\mp$
10. ♂	Exp. V.	139.0	75.0	4.0 $\mp$	6. 37 $\mp$
11. ♃	Exp. V.	103.0	39 0	2.5 $\mp$	7. 60 $\mp$
12. ♃	Exp. V.	119.0	55.0	5.0 $\mp$	10. 8 $\mp$
13) Aurich.	Exp. V.	81.0	17.0	0.66 $\mp$	4. 68 $\mp$

Si ſecundum legem decrementi caloris ex aequatione $\frac{(a - x)^n}{a^{n-1}} = c$, (vbi ponitur a differentia inter temperiem corporis et aeris initialem et n tempus refrigerii, c vero differentia inter temperiem corporis et aeris poſt tempus n) deducitur formula ad decrementum x, quod corpus

corpus quinque minutis primis patitur, eruendum, habetur $l(a-x) = \frac{lc + (n-1)la}{n}$. Secundum hanc formulam inveni, (Exper: III. ſumta pro cupro $a = 117$ et $c = 46$ et $n = 19\frac{2}{5}$, pro ferro $a = 115.4$ et $c = 36$ $n = 19\frac{2}{5}$, pro plumbo $a = 910$, $c = 14$ et $n = 19\frac{2}{5}$) decrementa caloris quinque minutis primis ſub eadem differentia inter temperiem corporum et aeris ſcil. ſub diff. 119. 5 gr.

pro	cupro	ferro	et plumbo
vti	6. 20	6. 55	11. 75

Similiter Experimento V collato cum Experimento VI. (ſumta pro aurichalco Exper. V. $a = 83.0$, $c = 43.75$ et $n = 13\frac{4}{5}$ et ſumta pro ſtanno $a = 109.0$, $c = 36.0$ et $n = 13\frac{1}{5}$) inueni decrementa caloris quinque minutis primis ſub eadem differentia inter temperiem corporis et aeris.

pro	aurichalco	ſtanno
vti - - -	6. 20 - - -	8. 57

hinc pro cupro, aurichalco, ferro, ſtanno et plumbo vti 6. 20, 6. 20, 6. 55, 8.57, 11.75. Hanc rationem tamen accuratam eſſe aſſerere non audeo.

§. 18. Cum ergo, rationem veram decrementorum caloris examinatorum metallorum accurate praedicta ratione erui poſſe, non crediderim, et ex antecedentibus tantum ſequatur aurichalcum et cuprum minimum et deinde ferrum, poſtea ſtannum et tandem plumbum maximum decre-

decrementum caloris pati ſub iisdem circumſtantiis, non vero quantum vnius metalli decrementum caloris decrementum caloris alterius metalli ſuperet, vt exactius compararem virtutes retinendi calorem horum metallorum Thermometro ſcalae amplioris adhibito, in qua gradus quilibet diuiſus erat in quinque ſatis diſtinctas partes, (pars enim vna aequabat $\frac{1}{5}$ lin. Lond.) omnia metalla examinare conſtitui continuo vnum poſt alterum et tempus accuratiſſime ſecundum minuta ſecunda obſeruare, quo quodlibet metallum decrementum caloris pateretur in temperie certa aeris.

EXPERIM. VII.

§. 19. Aurichalcum examinans in temperie aeris 60 gr. et vnius dimidii gradus erat temperies

Tempore			
o - - -	180. gr.	poſt 4 min. pr. -	175. 2 gr.
poſt 1 min. pr.	778. 8.	— — 5 - -	173. 8 gr.
— 2 - - -	177. 6.		
— 3 - - -	176. 4.		

EXPERIM. VIII.

§. 20. Cuprum examinans in temperie aeris 57.5 gr. erat temperies

poſt tempus		poſt tempus	
- - o min. pr.	180. 6 - -	6 min. pr. - -	173. 1gr.
- - 1 - -	179. 4 - -	7 - - - -	171. 8.

poſt

poſt tempus		poſt tempus	
- - 2 - -	178. 2	- - 8 - - - -	170 8
- - 3 - -	177.	- - 9 - - - -	169.6
- - 4 - -	175. 6	- - 10 - - - -	168. 2
- - 5 - -	174. 4.		

Corol. Ab 177 gr. ad 170 $\frac{4}{5}$ per 6 $\frac{1}{5}$ gradus, differentia inter temperiem corporis et aëris initiali exiſtente vti in praecedente experimento, decreuit cupri calor quinque minutis primis.

EXPERIM. IX.

§. 21. Ferrum examinans in temperie aëris 57. 5 gr. erat

tempore	temperies	tempore	temperies
0 - -	180 erat	6 min. pr.	171.7
1 min.pr.	178.6	7 - -	170.4
2 - -	177.2	8 - -	169.2
3 - -	175.8	Ergo 7 $\frac{1}{7}$ - -	170. $\frac{8}{35}$
Ergo 2 $\frac{1}{7}$ min.	177	erat 9 - -	167.8
4 - -	174.4	10 - -	166.6
5 - -	173		

Corol. Ferrum hinc a gr. 177 ad gr. 170 $\frac{8}{35}$ per 6. $\frac{4}{5}$ gradus, differentia inter temperiem corporis et aëris initialem exiſtente vti in praecedentibus experimentis VIII. IX, peruenit quinque min. pr.

EXPERIM. X.

§. 22. Stannum examinans in temperie 60 $\frac{1}{2}$ gr. erat

tempore	temperies	tempore	temperies
0 - - -	180.	8 - - -	167. 8
1 - - -	177. 8	9 - - -	165. 4
2 - - -	175. 6	10 - - -	163.
3 - - -	173. 6	11 - - -	160. 8
4 - - -	171. 8	12 - - -	158. 4
5 - - -	169. 6,		

Corol. Peruenit ergo ſtannum a gr. 180 ad gr. 169 $\frac{3}{5}$ per 10 $\frac{2}{5}$ gradus, eadem exiſtente differentia initiali inter temperiem corporis et aëris ac in praecedentibus experimentis, quinque minutis primis.

E X P E R I M. XI.

§. 23. Plumbum examinans in temperie aeris 60 et vnius dimidii gradus erat

tempore	temperies	tempore	temperies.
0 - - -	180.	7 - - -	159.
1 - - -	176. 8	8 - - -	156. 4
2 - - -	173.	9 - - -	153. 8
3 - - -	170.	10 - - -	151. 2
4 - - -	167.	12 - - -	146. 6.
5 - - -	164. 4.		

Corol. Peruenit plumbum a gr. 180 ad 164. 4, eadem exiſtente differentia initiali inter temperiem plumbi et aëris, vti in praecedentibus experimentis, per 15. 6 gr. quinque minutis primis.

§. 24.

§. 24. Fuerunt ergo decrementa caloris quinque minutis primis, differentia inter temperiem corporum initialem et aëris exiſtente 119. 5 gr. Thermometro F indicata,

Aurichalci,	Cupri,	Ferri,	Stanni,	Plumbi.
vti 6. 2 gr	- 6.2 gr.	6.8 gr.	- 10. 4 gr.	15.6 gr-
S. vti 10	- 10	- 11	- 17	- 25 ferme.

§. 25. Si confero haec cum tabula ex obſeruationibus deducta (§ 17); paruo errore qualibet obſeruatione admiſſo, qui vnum gradum facile ſuperare potuit, inprimis iis caſibus, vbi velocitas Thermometri adhuc fuit magna, caſu 5, 7, 8, nulla adeſt repugnantia. Vt hoc euidenter pateat in ſequenti Tabula, in prima columna ſiſto numerum caſuum Tab. §. 17. in ſecunda columna errorem in obſeruando addendum vel ſubtrahendum ſuppoſitum; in tertia columna decrementum caloris ante correctionem ſub differentia inter temperiem metalli et aëris 119. 5 gr. in quarta decrementum caloris poſt correctionem, ſub differentia eadem:

I.	II.	III.	IV.
(1.) ♀	+ 0. 1	6.1.	6.2.
(2.) ♀	+ 0.067	6.0.	6.2.
(3.) ♂	+ 0. 29	6.5.	6.8.
(4.) ♂	− 0. 31	6.9.	6.8.
(5.) ♄	− 2. 4	12.4	15.6
(6.) ♄	+ 0. 3	11.95	15.6
(7.) ♃	− 1. 37	12	10.4

I.		II.	III.	IV.
(8.)	♄	−2.2	18	15.6
(9.)	Aurich.	−0.9	6.29	6.2
(10.)	♂	+0.27	6.37	6.8
(11.)	♃	+0.9	7.66	10.4
(12.)	♃	−0.22	10.8	10.4
(13.)	Aurich.	+0.22	4.68	62

§. 26. Nunc ſuperſedere poſſem labori inquirendi in incrementa caloris ſolidorum in aere conſtantis temperiei, quia, vbi de decremento et incremento caloris fluidorum tractaui, oſtendi, incrementa caloris pariter ſe habere, quam decrementa; vt tamen in hac re nihil omittatur, inſtitui etiam experimenta ſequentia.

EXPERIM. XII.

§. 27. Aurichalceum globum ſuſpendi foras in temperie aeris aliquot graduum infra gr. 32 aquae gelaſcentis, ſpirituque vini cauitati cylindricae infuſo, Thermometrum immerſi ſpiritui vini et exſpectaui, donec globus temperiem aeris acquireret. Deinde portaui globum in muſeum et in temperie aeris 62 graduum ſuſpendi et peruenit a gradu 32 calor globi

				temper. aëris
poſt	3	min. prim.	ad gr. 33	62
-	5	- - -	ad gr. 33 $\frac{2}{3}$	—
-	6	- - -	- - 34	—
-	10	- - -	- - 35 $\frac{1}{3}$	—
-	15	- - -	- - 37	—

poſt

										temper. aëris
poſt 23	min.	prim.	ad	gr.	39 ½	-	-	62
- 99	-	-	-	-	-	51	-	-	—
- 101	-	-	-	-	-	51.2	-	-	—
- 110	-	-	-	-	-	51.8	-	-	—
- 114	-	-	-	-	-	51.9	-	-	—
- 120	-	-	-	-	-	52	-	-	—
- 125	-	-	-	-	-	52.2	-	-	—
- 131	-	-	-	-	-	52.6	-	-	—
- 136	-	-	-	-	-	52.7	-	-	—
- 143	-	-	-	-	-	53	-	-	—
- 166	-	-	-	-	-	54	-	-	—
- 189	-	-	-	-	-	55	-	-	—
- 240	-	-	-	-	-	57. 3	-	-	—

Aurichalcum ergo initiali differentia inter temperiem eius et aeris exiſtente 30 grad. a gr. 32 ad gr. 51 incrementum caloris 19 graduum obtinuit, in aere eiusdem ferme temperiei 99 minutis primis.

EXPERIM XIII.

§. 28. Cuprum ſimili ratione examinaui, quod in temperie aeris 60 ½ gr. peruenit a gr. 28. 6.

		Temp.aër.			Temp.aër.
poſt 2 min.pr. ad gr.	30	60 ½	poſt 8 min.pr. ad gr.	32	60½
3 - - -	30.5	—	9 - -	32.3	—
6 - - -	31.5	—	15 - -	34.2	—

		Temp. aëris			Temp. aëris
poſt 23	36.4	60.5	poſt 89	48.6	61.5
28	38	—	97	49.	62
33	39.2	—	117	50.6	61.5
38	40.5	—	147	52.1	—
43	41.5	—	157	52.8	—
48	42.4	—	167	53.6	—
53	43.4	61	187	54.6	—
68	45.7	—	197	54.8	—
73	46.4	—	202	55	—
78	47	61			

Cuprum ergo initiali temperie exiſtente 30 ½ gr. in temperie aëris 60 ½ gr. quae parum poſtea creuit et incrementa caloris cupri hinc auxit, incrementum caloris 19 graduum 94 min. primis obtinuit.

EXPERIM. XIV.

§. 29. Ferrum in temperie aëris 61 gr. peruenit a gradu 25. 2.

		Temp. aër.			Temp. aër.
poſt 5 min. pr.	ad gr. 27. 7.	61.	poſt 20	ad gr. 34. 5	61
10	30.4	—	25	36.1	—
12	31.0	—	30	37.8	—
15	32.6	—	35	39.2	—

poſt

		Temp. aër.			Temp. aër.
poſt 40 min. pr. ad gr.	40.5.	61½	poſt 80 min. pr. ad gr.	48.0	62
45 - -	41.7	—	85 - -	48.5	—
50 - -	43.0	—	90 - -	49.1	—
55 - -	43.9	—	95 - -	49.6	—
60 - -	44.9	—	98 - -	50	—
65 - -	45.7	—	100 - -	50.2	—
70 - -	46.5	—	105 - -	50.5	—
75 - -	47.2.	62			

Ferrum igitur in temperie aeris 61 gr. a gradu 31, initiali differentia inter temperiem corporis et aëris exiſtente 30 gr. ad gradum 50 per 19 gradus incaluit 86 min. prim. acceleratum tamen parum eſt incrementum caloris temperie aëris creſcente.

EXPERIM. XV.

§. 30 Stannum in temperie aeris 61. gr. a gradu 31. peruenit initiali differentia inter temperiem ſtanni et aeris exiſtente 30. gr.

		Temp. aër.
Poſt 5 min. pr. ad gr.	34.7 - - -	61
- - 9 - - - -	26.4 - - -	—
- - 16 - - - -	40.0 - - -	—
- - 24 - - - -	43.3 - - -	—
- - 29 - - - -	45. - - -	61.5
- - 35 - - - -	46.7 - - -	—
- - 45 - - - -	48.8 - - -	—
- - 49 - - - -	49.4 - - -	62

Poſt

									Temp.aer.
poſt	52	min.	pr.	ad	gr.	50	-	-	61
-	55	-	-	-	-	50.4	-	-	—
-	60	-	-	-	-	51	-	-	—
-	70	-	-	-	-	52	-	-	61.5
-	80	-	-	-	-	52.6	-	-	—
-	90	-	-	-	-	53.1	-	-	62
-	100	-	-	-	-	53.8	-	-	—
-	125	-	-	-	-	55.6	-	-	—

Stannum ergo initiali temperie exiſtente 31. gr. in temperie aeris 61 gr. quae vero deinde aucta eſt et incrementum caloris ſtanni accelerauit, 52 min.prim. a gr. 31 ad 50 per 19 gradus acceſſit.

EXPERIM. XVI.

§. 31. Plumbum in temperie aeris 58 gr. peruenit a gradu 28

				Temp.aër.					Temp.aër.
Poſt 5 min. pr. ad gr.			31.8	58	Poſt 39 min. pr. ad gr.			46.6	59
- 10	-	-	346.	—	- 42	-	-	47.2	—
- 15	-	-	37.2	—	- 46	-	-	48.1	—
- 20	-	-	39.8	59	- 48	-	-	48.4	—
- 24	-	-	41.6	—	- 58	-	-	49.6	—
- 28	-	-	43.2	—	- 68	-	-	50.8	—

Plumbum ergo initiali temperie aeris exiſtente 58 gr. à gr. 28 ad gr. 47 per 19 gr. quadraginta duobus minutis primis acceſſit accelerato parum incremento caloris per temperiem aeris auctam.

§. 32.

§. 32. Vt perſpiciamus, vtrum haec conſpirent cum iis, quae de decrementis calorum oſtendi, ſecundum legem decrementi et incrementi caloris fluidorum has obſeruationes cum antecedentibus conferre iuuabit. Debent ſecundum hanc legem decrementa et incrementa caloris in aequalibus temporibus paruis eſſe in ratione compoſita incrementorum vel decrementorum initialium et differentiarum inter temperies reſiduas et temperiem aeris. Vel, ſi ſecundum inquiſitionem in legem incrementi et decrementi caloris, differentia inter temperiem corporis et aëris ponatur a, decrementum vel incrementum caloris tempore paruo (1) ſub hac differentia b, erit decrementum vel incrementum poſt tempus $n = \frac{b(a-b)^n}{a^{n-1}}$. Et pro alio metallo erit poſt tempus $m = \frac{B(a-B)^m}{a^{m-1}}$. Erunt ita decrementa et incrementa pro metallis diuerſis, vti $\frac{b(a-b)^n}{a^{n-1}} : \frac{B(-B)^m}{a^{m-1}}$ in genere. Re vera, ſecundum legem decrementi et incrementi caloris, debent eſſe decrementa et incrementa caloris, vti $\frac{b(a-b)^n}{a^n} : \frac{B(a-B)^m}{a^m}$, at ratio $\frac{(a-b)^n}{a^n} : \frac{(a-B)^m}{a^m}$ non differt a ratione $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ ad $\frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$. Cum nunc b:B denotent decrementa vel incrementa ſub aequalibus circumſtantiis, ſumamus ea ex Tabula §. 24. Ratio $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} : \frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$ vero exhibetur

 in

in Experimentis XII. XIII. XIV. XV. XVI. vbi differentiae inter temperiem corporis et aëris his formulis expreſſae poſſunt haberi.

Si Aurichalcum cum cupro confertur, eſt $b = B$ $= 6.2$ gr. Sumatur $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ pro aurichalco $62 - 32$ et $\frac{(a-b)^m}{a^{m-1}}$ pro cupro $60.5 - 28.6 = 31.9$, erit ergo decrementum vel incrementum caloris aurichalci, ad decrementum vel incrementum caloris cupri 5 min. pr. $= 300 : 319. = 1\frac{2}{3}$. gr. : $1\frac{23}{30}$. ſecundum obſeruationes eſt $= 1\frac{2}{3} : 2.4$, differentia inter obſeruationes et calculum eſt 0.64. gr.

Si aurichalcum cum ferro confertur, eſt $b : B = 6.2 : 6.8$. Sumatur $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ pro aurichalco, vt ante, $\frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$ pro ferro $61.0 - 25.2$. Eſt igitur incrementum caloris pro aurichalco ad incrementum caloris pro ferro quinque min. primis $= 1\frac{2}{3} : 2.18$. per obſeruationes eſt, vti $1\frac{2}{3}$ ad 2.5. differentia ergo inter calculum et obſeruationes eſt 0.32 gr.

Si aurichalcum cum ſtanno confertur, et pro aurichalco ponuntur omnia, vt ante, pro ſtanno vero $B = 10.4$, et $\frac{(a-B)^m}{a^{m-1}} = 30.0$, erit incrementum caloris aurichalci ad incrementum caloris ſtanni, vti $1\frac{2}{3} : 3.79$. et per obſeruationes eſt, vti $1\frac{2}{3} : 3.7$. differentia inter obſeruationes et calculum eſt 0.91. gr.

Si

Si aurichalcum tandem cum plumbo confertur et pro aurichalco ponuntur omnia, vti ante, et pro plumbo differentia inter temperiem plumbi et aëris, vti pro aurichalco 30.0, pro plumbo B = 15.6. erit hinc incrementum caloris aurichalci ad incrementum caloris plumbi, vti $1\frac{2}{3}$ ad 4.16, per obſeruationes eſt, vti $1\frac{2}{3}$: 3. 8. differentia hinc eſt 0. 36. gr.

Summam conuenientiam inter obſeruationes et calculum non videmus, quia ſtatus aëris non ſemper fuit idem. Aer ſiccus et tranquillus aliter calefacere debet corpora, ac humidus et agitatus.

§. 33. Collatis praemiſſis obſeruationibus omnibus luculenter patet, decrementa et incrementa caloris:

1.) Non ſequi rationem inuerſam denſitatum.

a) Plumbum inter examinata metalla denſiſſimum decrementa maiora paſſum eſt, quam reliqua.

b) Cuprum et aurichalcum aequalia exacte decrementa, et incrementa etiam ferme aequalia paſſa ſunt, aequalibus temporibus, licet denſitate differant.

c) Ferrum a cupro et aurichalco multo magis denſitate diſcrepat, quam a ſtanno, et nihilo ſecius decrementa et incrementa caloris ferri recedunt magis a decrementis et incrementis caloris ſtanni, quam a decrementis et incrementis caloris cupri et aurichalci, quibus tantum non aequalia obſeruantur.

2.) Non ſequi rationem inuerſam cohaerentiarum abſolutarum, quae ſecundum(*) P. van Muſchenbroek ſunt pro cupro, aurichalco, ferro, ſtanno, plumbo, vti 29925, 36000, 45000, 4900, 2925; decrementa et incrementa caloris vero ſunt, vti

62, 62, 68, 104, 156.

(*) vid. diſſertationes Phyſ. Exper.

3.) Neque rationem compoſitam, ex praedictis; deberent enim decrementa et incrementa tali ratione eſſe pro cupro, aurichalco, ferro, ſtanno, plumbo, vti $\frac{1}{2602475}$, $\frac{1}{2880000}$, $\frac{1}{3420000}$, $\frac{1}{3577000}$, $\frac{1}{328775}$. et ſunt re vera, vti $\frac{1}{2662475}$, $\frac{1}{2602475}$, $\frac{1}{2365886}$, $\frac{1}{1530867}$, $\frac{1}{131490}$.

a) Ergo decrementum et incrementum caloris aurichalci minus inuenitur decremento et incremento caloris cupri, cum per obſeruationes aequalitas inter decrementa et incrementa caloris in vtroque metallo adſit.

b) Decrementum et incrementum caloris cupri et aurichalci maius inuenitur decremento et incremento caloris ferri contra obſeruationes.

c) Decrementum et incrementum caloris ſtanni quadruplo maius inuenitur decremento et incremento caloris per obſeruationes.

d) Decrementum et incrementum caloris plumbi $2\frac{1}{2}$ vicibus minus inuenitur decremento et incremento per obſeruationes.

e) Comparatis duorum quorumcunque metallorum incrementis et decrementis caloris per calculum, cum decrementis et incrementis caloris per obſeruationes diſcrepantia inſignis apparet.

4.) Non ſequi rationem inuerſam duritierum; ferrum enim maiorem duritiem habet, quam cuprum et aurichalcum, et nihilo ſecius maiora decrementa et incrementa caloris patitur, quam cuprum et aurichalcum.

5) Neque tandem ſequi rationem compoſitam, ex omnibus recenſitis rationibus. Quodſi enim ſecundum Muſchenbroek (cit. loco) ponantur durities:
pro cupro, aurichalco, ferro, ſtanno, plumbo,
vti 11278, 39000, 80575, 4550, 2304,
erunt decrementa et incrementa caloris per calculum, pro cupro, aurichalco, ferro, ſtanno, plumbo, ferme
vti $\frac{1}{312}$, $\frac{1}{11232}$, $\frac{1}{27581}$, $\frac{1}{161}$, $\frac{1}{75}$, et ſunt per obſeruationes,
vti $\frac{1}{312}$, $\frac{1}{312}$, $\frac{1}{283}$, $\frac{1}{155}$, $\frac{1}{124}$.

a) Ergo cupri decrementum et incrementum caloris 36ies maius inuenitur, quam aurichalci, et 88ies maius, quam ferri.

b) Stanni decrementum et incrementum caloris invenitur duplo ferme maius, quam cupri, et 70ies fere maius, quam aurichalci, et 171ies maius, quam ferri.

c) Plumbum quadruplo maius decrementum et incrementum caloris pati deberet, quam cuprum, et 150ies ferme maius, quam aurichalcum, et 376ies maius, quam ferrum, et $2\frac{11}{75}$ vicibus maius, quam ſtannum. Haec omnia repugnant valde obſeruationibus, vnde apparet, nondum rationem virtutis maioris retinendi calorem ex hisce dari poſſe, propoſitionesque in ſcriptis non nullis phyſicis precario aſſumtas eſſe, quibus aſſeritur, vel denſitatem maiorem, vel cohaerentiam maiorem, vel vtramque ſimul, vel duritiem maiorem, vel omnes has proprietates ſimul, efficere virtutem retinendi calorem maiorem. Hoc adhuc magis patebit ex diſſertatione, in qua comparationem inſtituam

 inter

inter decrementa et incrementa caloris ſolidorum et fluidorum, quam proxime exhibebo, contentus, ſi phaenomenis accurate definitis, cauſis veris inueniendis occaſionem dedero.

TENTAMEN SOLVTIONEM IN DIVERSA TEMPERIE AD MENSVRAM REDVCENDI.

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

§. 1.

Inter tentamina rationem calorum graduum Thermometri definiendi, effectum ſolutionis contemplari cum circumſpectione conſtitui, vt experirer, an inde aliquid concludere liceret? Videbantur enim corpora homogeneae materiae, aequalia et ſimilia in ſoluente quodam conſtantis quantitatis, diuerſae tamen temperiei pati debere ſolutione decrementa ponderum in ratione celeritatum particularum ſoluentis a calore agitatarum.

§. 2. Hunc in finem fieri curaui ex ſale gemmae cubulos, quantum fieri potuit, exactos. Fruſta ſalis, ex quibus cubuli confecti erant, videbantur ſatis homogenea. Pondus vnius cubuli in bilance accuratiſſima, quae additis poſt aequilibrium $\frac{1}{48}$ partibus grani mobilis erat, ponderatum, erat 163. gran. et alterius $195\frac{1}{4}$ granorum. Cubi maioris latus erat 0,56 dig. Lond. circiter

et

et minoris 0.51 +. dig. L. Grauitate ſpecifica cubulorum in ſpiritu vini rectificato et ſale ſaturato, vt nihil ſalis ſolueret temperiei 62. grad. Therm. F cum cura examinata et cum grauitate ſpecifica aquae eiusdem temperiei comparata, inueni grauitatem ſpecificam vtriusque cubuli ad grauitatem ſpecificam aquae, vti 209:100.

EXPERIM. I.

§. 3. His praeparatis, in vas amplum decem libras aquae infudi et aquam ad temperiem 42. graduum reduxi. Deinde cubulum minorem argento viuo, in vitreo vaſe contento, immerſi et orificium vaſis bene clauſi, totumque vas aquae temperiei 42. graduum immiſi, vt argentum viuum et cubulus acquirerent temperiem quadraginta duorum graduum. Poſt dimidiae horae ſpatium cubulum ſeta equina bene ligatum ex argento viuo extraxi, confeſtimque ex bilance hydroſtatica ſuſpendi, cuius lanci alteri 163 grana impoſita erant et lanci, ex qua cubulus pendebat, 78 $\frac{1}{2}$ grana, quod decrementum cubulus ex grauitate ſua ſpecifica in aqua pati debebat, immiſique aquae temperiei 42. grad. in vaſe amplo ſtagnanti notato ſimul tempore. Addidi adhuc ponderi 78 $\frac{1}{2}$ grana in lance, ex qua cubulus pendebat impoſito 13 $\frac{1}{2}$ grana, et poſt ſex min. pr. aequilibrium ſublatum reſtitutum eſt: dein rurſus addidi pondus 10. granorum et aequilibrium ſublatum poſt 5. m. pr. reſtitutum. Ita continuaui, donec cubulus, ex aqua extractus, pondus 53. granorum haberet, et hinc decrementum 110 granorum paſſus eſſet. Erat pondus lanci, ex qua cubulus pendebat, impoſitum, vt aequilibrium obtineret inter vtramque lancem

poſt 6 m. pr.	92	gran.	poſt 20 m. pr.	122	gran.
- 11 - -	102	—	- 26 - -	132	—
- 15 - -	112	—			

§ 4. Per leges hydroſtaticas palam eſt, nominato decremento ponderis cubuli initiali in aqua ob grauitatem ſpecificam d, pondere ipſo a, ſummaque ponderum lanci impoſitorum ad aequilibrium inter pondera in vtraque lance obtinendum b, decrementoque, quod cubulus patitur ſolutione x, eſſe debere $b = \frac{(a-x)d}{a} + x$, et hinc $x = \frac{(b-d)a}{a-d}$. Inueni ergo decrementa ponderis ſolutione facta:

poſt 6 min. pr. decrem. pond.	26.	gran.
- 11 - - - - -	45.3	—
- 15 - - - - -	64.4	—
- 20 - - - - -	83 -	—
- 26 - - - - -	$103\frac{1}{3}$	—

§ 5. Vt comparatio commodius inſtitui poſſit, appoſuiſſe tabulam iuuat, in qua decrementa, tempore ſimplo, duplo, triplo, etc. ſiſtuntur, et decrementa ſingulis quinque minutis primis. Quia temperies ſoluentis non mutatur et ſuperficies cubuli mutationes ſolum ſubit et volumen, ſolutio deberet quidem naturaliter decreſcere, vti ſuperficies decreſcit, in paruis tamen temporum interuallis, vbi ſuperficies cubuli non valde mutatur, ſolutio ſine metu aequabilis ſupponi poteſt, eritque hinc:

poſt

poſt 5 min. prim. ſolut. 21 $\frac{2}{3}$ gran.

- 10	- - -	41.4	— ergo	5	min.	pr.	-	19 $\frac{22}{30}$
- 15	- - -	64.4	— ergo	5	min.	pr.	-	23 -
- 20	- · -	83 -	— ergo	5	min.	pr.	-	18.6
- 25	- - -	99 $\frac{2}{3}$	— ergo	5	min.	pr.	-	16. $\frac{2}{3}$

§. 6. Summa decrementorum ponderis ſolutione generatorum fuit per §. 4. 103 $\frac{1}{3}$ gran. 26. min. pr. quae reſiduo ponderato inuenta eſt 110. gr. § 3.

Sex $\frac{2}{3}$ ergo ſolum granis recedit decrementum obſeruatum a decremento computato integro ſolutionis tempore, quae diſcrepantia oriri potuit a mutata grauitate ſpecifica ſalis inter ſolutionem, cum propter cauitates quasdam non fuit perfectiſſime in omnibus portiunculis homogeneum. Pyramis enim initio accurata abiit tandem in deformem, parte ſuperiori ab vno latere profundius ſoluta, quam a reliquis lateribus, vnde grauitas ſpecifica aucta ob cauitatem quandam deſtructam, ſiue potius apertam, quam occupauit aqua. Quia enim $b < a$, fiet, poſita d minori, hinc grauitate ſpecifica ſalis maiori, $\frac{(b-d)a}{a-d}$ maior, quam antea.

§. 7. *Schol.* Figura pyramidalis, ſolutione orta, videtur oſtendere, ſoluens inferiorem cubi partem tangens ſaturatius eſſe ſoluente ſuperiorem cubi partem contingente, deorſum enim particulae omnes reſolutae initio tendunt; hinc lentius ſolui cubi inferiores partes, quam ſuperiores. Cur inclinata pyramidis latera et latus ſupremum laeuia fuerint, inferior vero cauitatibus inaequalis reddita ſit, ratio absque dubio fuit aer incarceratus ſale, qui particulis ſalis abraſis liber et ſeſe expandens,

ſuperioraque verſus ſecedere nitens a ſale impeditus cavitates effecit, quae effici haud potuerunt ab aëre ex ſuperiori parte et lateribus inclinatis libere aſcendente.

EXPERIM. II.

§. 8. In temperie aquae 84. gr. Therm. F. eiusdem quantitatis in eodem vaſe cubum alterum, ſimiliter in argento viuo ad temperiem 84. grad. redactum, examinaui. Similiter nempe ſuſpendi cubulum ex bilance et aquae immiſi, notato tempore, et 93½ granis lanci, ex qua cubulus pendebat antea impoſitis, quod decrementum ex grauitate ſpecifica pati debuit in aqua, alteri vero lanci 195½ granis. Addidi dein pondus 17½ granorum 93½ granis lanci, ex qua cubulus pendebat, impoſitis, atque aequilibrium poſt 3½ min pr. reſtitutum eſt: addidi rurſus 20 grana et ita continuaui. Decrementum ponderis cubuli interuallo 26 min. pr. fuit 174½ gran. reſiduum, cum ponderatum fuit, 21 granorum. Cubulus rurſus abibat in pyramidem truncatam ſuperficiei praeter baſin laeuis. Baſis, vt in primo experimento, cauitatibus inaequalis et pyramis tandem deformis reddita eſt. In ſequenti tabula ſiſto pondera lanci, ex qua cubulus pendebat, impoſita, et tempus, quo aequilibrium dictis ponderibus reſtitutum

pondera	tempus	pondera	tempus
111 grana	poſt 3½ m. pr.	171 grana	18¾
131	8	181	22
151	13	189	26

§. 9.

§. 9. Decrementa ſecundum §. 4. computata ergo ſunt, vti ſequens tabula exhibet:

poſt $3\frac{1}{2}$ min. pr. ſolutio	33.5	gran.	poſt $18\frac{3}{4}$ -	148.5	gr.
- 8 - - - -	71.8	—	- 22 -	167.7	—
- 13 - - -	110	- —	- 26 -	183	—

Solutio ergo 26 m. pr. computata recedit ab obſeruata (§. 8.) $8\frac{1}{2}$ granis ob grauitatem ſpecificam ſalis inter ſolutionem minutam, quia enim $b < a$, fiet, poſita d maiori, hinc grauitate ſpecifica ſalis minori, $\frac{(b-d)a}{a-d}$ minor, quam antea.

§. 10. Vt comparare poſſimus obſeruationes Experimenti II. cum obſeruationibus Exper. I, debemus ſolum ſolutionem interuallo iſto temporis contemplari, quo ſal Experim. II. habuit idem pondus cum ſale Experim. I. et cuius initio et fine cubuli aequales habuiſſent ſuperficies, ſi grauitas ſpecifica non mutata fuiſſet inter ſolutionem. Cum minoribus temporibus ſuperficies non mutetur valde ſolutione, ponatur Experim. II. ſuperficies cubuli initio per $3\frac{1}{2}$ min. pr. conſtans et ſolutiones erunt, vti tempora. Erit hinc 33.5 ad 32.5 = $3\frac{1}{2}$ min. pr. ad $3\frac{27}{66}$ m. pr. Poſt 3 min. pr. et 23 min. ſ. cubulus accepit pondus 163 gran. quod cubulus Experim. I initio habuit. Ab hoc tempore decrementum 103 gran. poſt $13\frac{5}{13}$ min. prima in temperie 84. grad. factum eſt. In primo Experimento idem decrementum 26. min. pr. ſub temperie 42 graduum generatum eſt. Tempora igitur ſolutionum aequalium ſub temperiebus 42. et 84 graduum fuerunt, vti 2 : 1. Tredecim nempe min. pr. cubus Exper. II. ferme idem paſſus eſt decrementum ponderis

deris, quod cubus Exper I. 26. min pr. Si ergo grauitas ſpecifica cubulorum conſtans manſiſſet, figura cubuli Experim. II. interuallo tredecim minut. pr. ſimiliter et aequaliter mutata fuiſſet ac figura cubuli Experim. I. interuallo 26. min pr. Solutio tali ratione fuiſſet conſtanter aequalis in temporibus minoribus dictam rationem habentibus. Hoc vero non obtinuit exactiſſime propter grauitatem ſpecificam forte diſpariter mutatam durante ſolutione et ob homogeneitatem cubulorum minus perfectam. Quinque enim min. pr. quidem cubulus Exp. II. decrementum 41. 4 gran. paſſus eſt, et cubulus Exp. I. idem decrem. 41. 4 gran decem minutis primis: ſequentibus tamen quinque minutis pr. cubulus Exper. II. decrementum 35. 6 gr. et cubulus Exper. I. reſpondentibus 10. min pr. 41.6 gran. paſſus eſt. Reſiduis tribus minutis cubulus Exper. II 22. granorum iacturam fecit, cubulus Experimenti I. vero 6. min. pr. reſpondentibus $20\frac{1}{3}$ gran.

§. 11. Diſcrepantia, §. praecedente indicata, non eſt tanta, vt non afferere liceat, ſolutiones ſub temperiebus 42. et 84. graduum Therm. F. ſub ſimilibus caeterum circumſtantiis et aequalibus temporibus fuiſſe, vt 1. ad 2. et conſequenter in ratione graduum Thermometri F. ſupra 0. Quid ſi idem obtineret in ſolutionibus ſub reliquis gradibus Thermometri? Nonne ita gradus Thermometri F. exprimerent celeritates ſolutionum, quae quidem maiores ſunt, ſi calores ſunt maiores, nondum tamen forte calores ipſos menſurare poterunt. Interim diuiſionis Thermometri F. praeſtantia prae reliquorum

Ther-

Thermometrorum diuiſionibus ex hisce elucet, qua neque Delilianum, neque Reaumuri, gaudet. Nam

42	gr.	Therm.	F.	reſpondent	$141\frac{2}{3}$	Del.
84	-	-	-	-	$106\frac{2}{3}$	Del.
42	-	-	-	-	$4\frac{4}{9}$	Reaum.
84	-	-	-	-	$23\frac{1}{9}$	Reaum.

Mirandum abſque conſilio, Thermometrum Fahrenheitianum ita conſtructum eſſe.

TENTAMEN RATIONEM CALORVM RESPECTIVORVM LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFINIENDI.

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

§. 1.

In cogitationibus meis (*) de ratione calorum et ratione denſitatis radiorum directorum ad denſitatem per lentem refractorum oſtendi, qua ratione in relatiuorum calorum rationem inquirendum ſit. Abſolutos enim calores comparare, et, in qua ratione ſint, definire, aeque ſupra noſtras vires poſitum eſt, ac motum abſolutum a motu relatiuo diſcernere.

 §. 2.

(*) Nou. Comm. Tom. III. p. 340. ſeq.

§. 2. Calor abſque dubio conſiſtit in certo motu certarum particularum corporearum, et quo pernicior eſt iſte motus, eo maior debet eſſe calor. Quodſi ergo innoteſceret, quae celeritas particularum requiratur, vt definitus calor generetur, abſolutus calor definiri poſſet. Hoc tamen exſpectare non licet. Hinc quomodo relatiui calores ſiue exceſſus caloris ſuper conſtantem calorem ex exceſſibus dilatationis argenti viui ſuper dilatationem ab eodem conſtanti calore aliquo modo definiri poſſint, inquiram.

§. 3. Rationem exceſſuum dilatationis ſuper dilatationem a certo calore, a ratione exceſſuum caloris ſuper eundem calorem, exceſſus dilatationis producentium differre non eſt dubium. Quodſi enim mercurius certo gradu iam dilatatus eſt, minor vis et minor calor ſine dubio requiritur ad aequalem dilatationem efficiendam, vi, qua particulae ad vnionem ſollicitantur, quam Philoſophi vim attrahentem nominare amant, dilatatione minuta. Debentque eſſe exceſſus dilatationis ſuper dilatationem a certo calore in ratione exceſſuum caloris ſuper calorem iſtum certum et inuerſa virium particulas argenti viui in Thermometris ad vnionem cogentium. Quodſi hinc exceſſus dilatationis accuratiſſime innoteſcerent, et exceſſus caloris reſpondentes, a quibus exceſſus dilatationis pendent, pariter accuratiſſime conſtarent, non ſolum vires, particulas argenti viui ad vnionem cogentes ſub diuerſo temperiei gradu, definiri poſſent; ſed etiam comparatis exceſſibus dilatationis cum exceſſibus caloris lex erui, ſecundum quam ex exceſſibus

dila-

dilatationis argenti viui ſuper dilatationem a calore conſtanti datis, exceſſus caloris reſpondentes ſuper eundem calorem inueniri poſſent.

§. 4. Vt haec ita repraeſententur, vt vnico obtutu pateſcant, liceat breuiſſimis formulis dicta comprehendere. Ponantur exceſſus dilatationis D : *d*, vires ad vnionem particulas cogentes, quae reſpondent A : *a*, exceſſus caloris reſpondentes C: *c*. Erit D : d $= \frac{C}{A}$: $\frac{c}{a}$; hinc A : *a* $=$ *d* C : D *c* et C : *c* $=$ A D : *a d*.

§. 5. Fingamus, duo Thermometra perfecte harmonica nullo affici calore et abſolute frigida eſſe, exponique radiis ſolaribus, quorum efficaciae ſint conſtanter in ratione data, calores, quos tempuſculo paruo radii in mercurio producent, erunt in eadem ratione data, et ita creſcet ſenſim calor Thermometrorum, donec oriantur calores, qui non augeri poſſunt vlterius efficacia radiorum ſolarium. Cum enim incrementa ſingula calorum ſint in ratione data, ſummae incrementorum in eadem ratione erunt, et calores in Thermometris producti erunt proportionales efficaciis radiorum ſolarium. Pone aequaliter, ſed relatiue frigida eſſe Thermometra, vt in umbra collocata eſſe ſolent, et exponi radiis ſolaribus, quarum efficaciae ſint in ratione data, eadem argumentatione patet, exceſſus caloris in Thermometris productos ſuper calorem, quem initio habuerunt, ſiue relatiuos calores eſſe debere in ratione efficaciarum radiorum ſolarium, quibus Thermometra afficiuntur.

§. 6. Efficacias radiorum per lentes refractorum in diſtantiis datis a foco eſſe in ratione denſitatum radiorum et has denſitates in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco ponere licebit. Easdem efficacias radiorum per lentem refractorum eſſe, vt exceſſus caloris ſuper calorem in vmbra, facile patet. Quodſi enim conſideratur, ſolos radios ſolis per lentem refractos afficere Thermometra, non directos, liquet, ſi radii refracti et directi non afficiant Thermometra, illa tantummodo affici debere illo calore, qui aëri vmbroſo communicatus eſt, et ſi lentes accedunt et augent calorem, calores lentibus productos eſſe exceſſus caloris ſuper calorem in vmbra. Erunt ergo hi exceſſus calorum pariter in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco.

§. 7. In hoc tentamine ergo ita proceſſi, vt ope machinae, in cogitationibus de ratione calorum etc. deſcriptae, 1) per Thermometra harmonica poſt lentes ſoli obiectas, in diuerſis diſtantiis a foco poſita, exceſſus dilatationis mercurii ſuper dilatationem mercurii a calore in vmbra definiuerim; et 2) per diſtantias Thermometrorum a foco lentium exceſſus caloris ſuper calorem in vmbra; et vt 3) ex comparatione exceſſuum dilatationis argenti viui ſuper dilatationem a calore in vmbra legem eruere tentauerim, ſecundum quam, exceſſibus dilatationis argenti viui ſuper dilatationem a calore conſtanti datis, exceſſus caloris reſpondentes definiri poſſint.

§. 8. Antequam vero rem aggrediebar, expediebat prius apparatum, quem ad experimenta inſtituenda com-

comparare licuit, examinare; vtrum nimirum lentes requiſitas proprietates haberent, aequaliter nempe interciperent et colligerent radios? Hunc in finem Thermometra aeque velocia A et B in aequalibus a foco diſtantiis locaui in axe coni radiantis et obſeruaui praeter omnem ſpem, ſemper Thermometrum poſt lentem vnam maiorem oſtendiſſe calorem, quam poſt lentem alteram. Apparebat ergo, lentem vnam plures radios intercepiſſe, quam alteram, quod, vel a diuerſa pelluciditate, vel inaequalitate diſtantiarum focalium, vel ab vtraque cauſa ſimul pendere potuit.

§. 9. Re vera diſtantiae focales lentium diſcrepabant, quod apparebat poſt examen cum ſolertia inſtitutum, licet artifex omnem ſolertiam adhibuiſſe faſſus eſſet, cui iniunxeram, vt ſi in patina unam lentem poliiſſet per vnum atque alterum momentum, alteram lentem per idem interuallum temporis poliret in eadem patina, et deinde primam rurſus etc. ſperans, alterna tali et aequaliter facta politura lentes exacte easdem diſtantias focales nacturas eſſe. Euentus ſpei minus reſpondit, vel ob artificis minorem ſolertiam, vel ob rei difficultatem, quod vltimum tamen credere nolim. Cum diſtantiae focales diſcrepabant et hinc etiam craſſities lentium, non mirandum erat, lentes diuerſimode intercepiſſe radios, vt in diſtantiis a foco inaequalibus efficaciam diuerſam producere debuerint.

§. 10. Thermometra ipſa aeque velocia obſeruaui poſt multa examina; hinc ex diuerſitate Thermometrorum

 nulla

nulla metuenda erat diſcrepantia, quae certe a diverſitate Thermometrorum oriri potuiſſet caeteris omnibus paribus. Quodſi enim bulbi Thermometrorum ita calefacti ſint, vt exceſſus caloris ſuper calorem in vmbra ſint in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco, vel ratione denſitatum radiorum in dictis diſtantiis, et ob maiorem vel minorem interpoſitionem vaporum mutatio oriatur, denſitates radiorum quidem mutari debent, ſeruent tamen ſemper neceſſe eſt rationem inuerſam quadratorum diſtantiarum a foco. Erunt ergo incrementa vel decrementa calorum initialia in eadem ratione, et etiam in eadem ratione omnia ſequentia. Si enim ſimiles rationes ſimilibus augentur vel minuuntur, rationes non mutantur, et hoc tamdiu continuari debet, donec mercurius in Thermometris quieſcat. Quies haec vero ſolum obtineri poteſt, ſi bulbi Thermometrorum ſunt aequales et ſimiles, vel ſuperficies in ratione voluminum. Quodſi vero contrarium obtinet, incrementa et decrementa erunt in ratione compoſita directa differentiarum inter efficacias radiorum ſolarium ſibi ſuccedentes, i. e. in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco et directa ſuperficierum bulborum Thermometricorum et inuerſa voluminum eorumdem. Hinc fieri poteſt, vt mercurius in vno Thermometro citius ad quietem perducatur, quam in altero, et hinc gradus non reſpondentes notentur, quod tamen a nobis non fieri potuit, quia Thermometra aeque velocia adhibuimus.

§. 11. Vt appareret, vtrum poſt eandem lentem aequaliter diſtribuerentur radii per ſectiones coni radiantis ad axin nor-

normales, vnum Thermometrum in axe coni radiantis et alterum in certa diſtantia ab axe, vtrumque vero in aequali diſtantia a ſoco locaui, et vidi diſcrepantiam quamdam, caloremque prope axin eſſe minorem, quam in diſtantia ab axi, quod etiam obtinere debuit ob maiorem craſſitiem lentis in medio, quam prope peripheriam, vbi minus radiorum intercipi debet. Discrimen tamen iſtud non fuit alicuius momenti, nempe non ſuperabat tres ad quatuor gradus ſecundum ſcalam F. vt hinc, radios aequaliter diſtributos fuiſſe, ſine ſenſibili errore adſumere licuerit, inprimis reſpectu radiorum, qui in eadem diſtantia ab axe coni radiantis et eadem diſtantia a foco in Thermometra incidebant, vbi ſemper Thermometra eundem ferme gradum oſtendebant per ſaepius repetitas obſeruationes.

§. 12. Cum per §. 8. et 9. lentes in machina noſtra non haberent requiſitas proprietates, vel lentes erant aequales reddendae et ſimiles, vel vtrumque Thermometrum erat ponendum poſt vnam eamdemque lentem ita, vt vmbrae Thermometrorum in aequalibus a circuli luminoſi in planum vltimum machinae proiecti centro diſtantiis ſitae eſſent. Primum tam cito expectare non licebat, hinc alterum modum elegi. Vt tamen appareat, quantum diſcrepauerint obſeruationes duabus lentibus captae ab obſeruationibus vna lente inſtitutis, et quomodo exceſſus dilatationis mercurii ſupra conſtantem gradum Thermometri in vmbra poſiti ab inuerſa ratione quadratorum diſtantiarum a ſoco vtroque caſu receſſerint, obſeruationes duabus lentibus inſtitutas ſequentibus

 com-

communicabo. Iuuat enim interdum erronea et imperfecta experimenta adducere, vt cum perfectioribus comparari poſſint, et tali ratione criteria perfectiorum melius eluceſcant. Menſibus Aprilis, Iunii et Iulii anni 1752. obſeruationes has inſtitui:

EXPERIM. 1.

Nou. Comm. Tom. III. Tab. VII. Fig. 1.

§. 13. 1) Machinam oppoſui radiis ſolaribus ita, vt circuli luminoſi in vltima tabula apparerent, et peripheriis in illa deſcriptis continerentur.

2) Thermometrum A in diſtantia 12 digitorum Lond. a foco locaui et alterum harmonicum B in diſtantia 24 digitorum, vtrumque vero ita, vt vmbrae bulborum in centris circulorum luminoſorum apparerent.

3) Thermometrum tertium harmonicum C in vmbra ſuspendi ita, vt non a radiis ſolaribus directis nec reflexis affici potuerit. His factis et Thermometris per aliquod temporis interuallum calefactis notaui gradum Thermometri A, ad quem mercurius adſcendit, et pariter gradus reliquorum Thermometrorum vnius poſt alterum tam celeriter, quam fieri potuit. Obſeruationes ſequenti tabula exhibeo. In vltima columna exhibetur ratio exceſſuum dilatationis argenti viui ſupra dilatationem a calore in vmbra, exceſſu minori dilatationis vnitate expreſſa.

1.)

1) Num. obſ.	2) Therm. A.	3) Therm. B.	4) Therm. C.	5) Exceſſ. Dilat.
1)	120	90	80	4 : 1
2)	111	87	79	4 : 1
3)	120	90	80	4 : 1
4)	121	91	83	$4\frac{3}{4}$: 1
5)	122	92	83	$4\frac{1}{3}$: 1
6)	122	91	84	$5\frac{3}{7}$: 1
7)	121	90	83	$5\frac{3}{7}$: 1
8)	107	84.5	77	4 : 1
9)	108	85	77	$3\frac{7}{8}$: 1
10)	108	84	76	4 : 1
11)	106	82	75.5	$4\frac{7}{13}$: 1
12)	109	83	74.5	$4\frac{1}{17}$: 1
13)	102	80	74	$4\frac{2}{3}$: 1
14)	106	82	74.5	$4\frac{1}{5}$: 1
15)	105	80.5	74	$4\frac{10}{13}$: 1
16)	98	80	73	$3\frac{4}{7}$: 1
17)	102	80	73	$4\frac{1}{7}$: 1
18)	110	82	73	$4\frac{1}{9}$: 1
19)	107	83	73.5	$3\frac{10}{19}$: 1
20)	106	83	73.5	$3\frac{8}{19}$: 1
21)	102	80	73.5	$4\frac{5}{13}$: 1
22)	104	80	73	$4\frac{3}{7}$: 1
23)	103	80	72	$3\frac{7}{8}$: 1
24)	103	80	72	$3\frac{7}{8}$: 1
25)	104	82	72	$3\frac{1}{5}$: 1
26)	104	80	72	4 : 1
27)	103	80	72	$3\frac{7}{8}$: 1
28)	97	77	71	$4\frac{1}{3}$: 1
29)	95	75	70.5	$5\frac{4}{9}$: 1

1)Num obſ.		2)Therm. A		3)Therm. B.		4)Therm. C.		5)Exceſſ. Dilat.
30)	-	96	-	79	-	71	-	$3\frac{1}{8}$: 1
31)	-	100	-	80	-	71	-	$3\frac{2}{9}$: 1
32)	-	98	-	78	-	70.5	-	$3\frac{2}{3}$: 1
33)	-	100	-	78	-	70.5	-	$3\frac{14}{15}$: 1
34)	-	98	-	77	-	70	-	4 : 1
35)	-	97	-	77	-	70	-	$3\frac{6}{7}$: 1
36)	-	97	-	77	-	69	-	$3\frac{1}{2}$: 1
		Sum. 3812.		S. 2960.		S. 2680.5.		
		med. $105\frac{8}{9}$.		$82\frac{2}{9}$.		$74\frac{4}{9}$.		$4\frac{5}{70}$: 1

In iisdem diſtantiis obſeruationes ſimiles captae, Studioſo vno Thermometrum A, et Studioſo altero ſimul Thermometrum B, et me ipſo Thermometrum C obſeruante.

(37	-	138	-	95.5	-	80
(38	-	137	-	95	-	80
(39	-	134	-	95	-	80
(40	-	135	-	94	-	80
(41	-	131	-	93	-	80
(42	-	132	-	94	-	80
(43	-	140	-	94.5	-	80
(44	-	138	-	95	-	80
(45	-	129	-	96	-	80
(46	-	137	-	96.5	-	80
(47	-	135	-	96.5	-	80
(48	-	137	-	97	-	80.4
(49	-	133	-	96.5	-	80.4
(50	-	132	-	96	-	81

51)

51)	-	134	-	96.5	-	81
52)	-	137	-	96	-	81
53)	-	138	-	97	-	81
54)	-	139	-	97.5	-	81
55)	-	138	-	97	-	81
56)	-	136	-	95	-	81
57)	-	137	-	96.5	-	81
		S. 6669		4970		4368
		med. 117		$87\frac{11}{57}$		76.6. - $3\frac{140}{1084}:1$

EXPERIM. II.

§. 14. Vnus Studioſorum obſeruauit in diſtantia 8 digitorum a foco Thermometrum A, alter in diſtantia 24 digitorum a foco ſimul Thermometrum B, et ipſe attendi ad Thermometrum C in vmbra.

1)Num.obſ.		2)Therm.A.		3)Therm.B.		4)Therm.C.		5)Exceſſ. Dilat.
1)	-	212	-	93.5	-	78	-	$8\frac{100}{155}:1$
2)	-	217	-	94	-	78	-	$8\frac{11}{16}:1$
3)	-	220	-	94.5	-	78	-	$8\frac{110}{155}:1$
4)	-	221	-	94.5	-	78	-	$8\frac{110}{165}:1$
5)	-	222	-	95	-	78	-	$8\frac{8}{17}:1$
6)	-	214	-	96	-	78	-	$7\frac{10}{18}:1$
7)	-	219	-	95	-	78	-	$8\frac{5}{17}:1$
8)	-	222	-	94.5	-	78	-	$8\frac{120}{165}:1$
9)	-	217	-	94	-	78	-	$8\frac{138}{156}:1$
10)	-	216	-	93.5	-	78	-	$9\frac{17}{151}:1$
11)	-	213	-	93	-	78	-	$9\frac{32}{146}:1$
12)	-	208	-	93.5	-	78	-	$8\frac{88}{151}:1$

13)

13)	207	94	78.8	$8\frac{66}{152}$: 1
14)	204	94.5	79	$8\frac{10}{155}$: 1
15)	203	94.5	79	8 : 1
16)	206	94.5	79	$8\frac{30}{155}$: 1
17)	219	94.5	79	$9\frac{5}{155}$: 1
18)	222	94.5	79	$9\frac{85}{155}$: 1
19)	223	96	79	$8\frac{8}{17}$: 1
20)	217	96.5	79	$7\frac{151}{175}$: 1
Sum.	4302	1890.5	1569	
med.	215.1	94.5	78.47	$8\frac{839}{1003}$: 1

E X P E R I M. III.

§. 15. Vnus *S*tudioſorum obſeruabat Thermometrum A in diſtantia 6 digitorum a foco, et alter ſimul Thermometrum B in diſtantia 24 digitorum a foco, ipſe attendi ad Thermometrum C in vmbra.

1)Num.obſ.	2)Therm.A.	3)Therm.B.	4)Therm. C.	5)Exceſſ. Dilat.
1)	302	91	76	$15\frac{1}{5}$: 1
2)	297	91	76	$14\frac{11}{15}$: 1
3)	282	90	76	$14\frac{10}{14}$: 1
4)	292	89	76	$16\frac{8}{13}$: 1
5)	297	90	76	$15\frac{11}{14}$: 1
6)	292	91	76	$14\frac{6}{15}$: 1
7)	302	89.5	76	$16\frac{20}{31}$: 1
8)	312	91.5	76	$15\frac{7}{31}$: 1
9)	307	92	76	$14\frac{7}{16}$: 1
10)	302	93	77	$14\frac{3}{16}$: 1
11)	312	94	77	$13\frac{14}{17}$: 1

12)

1)Num.obſ.	2)Therm.A	3)Therm.B	4)Therm.C	5)Exceſſ. Dilat
12)	- 317	- 95.5	- 77	13 : 1
13)	- 332	- 96	77	13 $\frac{8}{19}$: 1
14)	- 328	- 94	77	14 $\frac{13}{17}$: 1
15)	- 322	- 93.5	77	14 $\frac{14}{16}$: 1
16)	- 317	- 92.5	77	15 $\frac{15}{21}$: 1
17)	- 313	- 92	- 77	15 $\frac{11}{15}$: 1
18)	- 320	- 92	- 77	16 $\frac{3}{15}$: 1
19)	- 342	- 94.5	- 77	15 $\frac{1}{7}$: 1
	S. 5888	S. 1752	S. 1454	
	med. 309 $\frac{17}{19}$	92 $\frac{4}{19}$	76 $\frac{10}{19}$	14 $\frac{1485}{1500}$: 1

§. 16. Ex his obſeruationibus videre eſt:

1) Exceſſus dilatationis mercurii ſuper dilatationem eius a calore in vmbra non prorſus abludere a ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco; et

2) Exceſſum dilatationis a calore maiori eſſe ad exceſſum dilatationis a calore minori:

1) modo exacte in ratione quadrati diſtantiae a foco, vbi dilatatio minor producitur, ad quadratum diſtantiae a foco, vbi dilatatio maior producitur, vid. Exp. I. obſ. 1. 2. 3. 8. 26. Exp. II. obſer. 10. 16. Exp. III. obſ. 5. 17.

2) modo exceſſum dilatationis a maiori calore eſſe minorem, quam ſecundum praedictam rationem eſſe deberet,

3) modo maiorem.

3) Quo minor eſt calor, eo minus exceſſus dilatationis ad rationem inuerſam qnadratorum diſtantiarum accedere, et quo minor eſt calor, eo propius

exceſſus dilatationis ad rationem inuerſam quadratorum diſtantiarum appropinquare.

§. 17. Poſſemus facile oſtendere, paruos errores in obſeruatione commiſſos poſſe efficere, vt recedant exceſſus dilatationis a ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco, cum quinque gradus in Thermometris noſtris A et B non excedant 1 $\frac{3}{4}$ lin. Lond, ſi experimenta cum lentibus noſtris inſtituta principiorum loco ponere liceret. Ipſa conuenientia rationis exceſſuum dilatationis cum ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco non minus, quam quod exceſſus dilatationis a maiori calore ſaepiſſime minor obſeruetur, quam ſecundum rationem inuerſam quadratorum diſtantiarum eſſe deberet, exhibet certum criterium, non veros exceſſus calorum pro dilatationibus obſeruatis aſſumtos fuiſſe, cum ratio ſuadeat, exceſſum dilatationis mercurii a maiori calore maiorem eſſe debere, quam praedicta ratio exceſſuum caloris aſſumtorum ſupra calorem in vmbra, vel inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco requirit.

§. 18. Ex experimentis et obſeruationibus allatis nihil certi colligere licere ex ſequentibus adhuc diſtinctius patebit.

Exp. I. Sunt exceſſus dilatationis medii ſupra dilatationem in vmbra vti - - 1 ad 3.797
exceſſus caloris reſpondentes aſſumti 1 ad 4.
hinc vires attrahentes mercurii
reſpondentes per §. 4. - - 3.797 ad 4.

Exp.

Exp. II. Sunt iidem exceſſus dilatationis vti 1 ad 8.523 exceſſus caloris reſpondentes aſſumti, vti 1 ad 9. hinc vires attrahentes mercurii reſpondentes vti - - 8.523 ad 9.

Exp. III. Sunt exceſſus dilatationis iidem 1 ad 14.947 exceſſus caloris reſpondentes aſſumti 1 ad 1600; hinc vires attrahentes reſpondentes 14.947 ad 16 vt omnia complectar, ſunt

pro exceſſibus caloris aſſumtis	1	4	9	16
exceſſus dilatationis reſpondentes	1	3,797	8,523	14,947
et vires attrahentes reſpondentes	14,945	15,744	15,781	16,000.

Pro dilatatione ergo minima vis attrahens minima et pro dilatatione maxima vis attrahens maxima inuenitur. Pro dilatatione 3.797 deberet eſſe vis attrahens minor, quam pro 1 et inuenitur maior; pro dilatatione 8.523 deberet eſſe vis attrahens minor, quam pro dilatationibus 1 et 3.797 et inuenitur maior, haec omnia valde repugnant et oſtendunt exceſſus caloris aſſumtos non reſpondere dilatationibus obſeruatis.

§. 19. Propter imperfectionem hanc videre volui, an obſeruationes cum vna lente inſtitutae magis cum iis, quae ratio ſuadet, conſpirent et criterium prodant, exceſſus caloris veris magis adpropinquantes aſſumtos eſſe.

EXPERIM. IV.

§. 20. Poſt lentem iſtam, quae in camera obſcura diſtinctius repraeſentabat obiecta in diſtantia 12 digitorum a foco, poſui Thermometrum A in diſtantia 24

digitorum Thermometrum B , vtrumque vero ita , vt lentibus ſoli obuerſis vmbrae bulborum a centro circuli luminoſi tabulae vltimae machinae aequaliter diſtarent et in eadem peripheria circuli terminascantur , obſeruaui que conſueto more Thermometra A. B. C.

1)Num.obſ.	2)Therm.A	3)Therm.B	4)Therm.C	5)Excesſ. Dilat.
1)	- 106	- 77.5	- 70	- 4.80 : 1
2)	- 104	- 77	- 70	- 4.85 : 1
3)	- 101	- 77.5	- 70	- 4.13 : 1
4)	- 99	- 77	- 70	- 4.14 : 1
5)	- 99	- 77	- 70	- 4.14 : 1
6)	- 99.5	- 77.5	- 70	- 3.93 : 1
7)	- 99	- 77.5	- 70	- 3.87 : 1
8)	- 97	- 77	- 70	- 3.86 : 1
9)	- 95	- 76	- 70	- 4.16 : 1
10)	- 95	- 76	- 70	- 4.16 : 1

In ſequentibns obſeruationibus vnus Studioſorum obſeruabat Thermometrum A , alter obſeruabat Thermometrum B , ipſe attendi ad Thermometrum C.

11)	- 104	- 74	- 66½	- 5 : 1
12)	- 109	- 75	- 66½	- 4.47 : 1
13)	- 109	- 76	- 66½	- 4.47 : 1
14)	- 105	- 75	- 67	- 4.75 : 1
15)	- 103	- 74	- 66½	- 4.86 : 1
16)	- 105	- 74	- 66½	- 5.13 : 1
17)	- 111	- 76	- 66½	- 4.68 : 1
18)	- 105	- 75	- 66½	- 4.53 : 1

19)	106	75	66 ½	4.65 : 1
20)	109	76	67.5	4.88 : 1
21)	111	77	67.5	4.58 : 1
22)	114	78	67.5	4.42 : 1
23)	111	77	67.5	4.58 : 1
24)	111	77	67.5	4.58 : 1
25)	109	76	68.5	5.40 : 1
26)	109	76	68.5	5.40 : 1
27)	107	77	68	4.33 : 1
28)	106	76	68	4.75 : 1
29)	99	73	68	6.20 : 1
30)	102.5	74	67.5	5.38 : 1
31)	102	75	66.5	4.17 : 1
32)	101	74	66.5	4.60 : 1
33)	107	77	66.5	3.86 : 1
34)	110	78	67.5	4.05 : 1
35)	109	77	67.5	4.36 : 1
36)	107	77	67.5	4.15 : 1
37)	110	78	68.5	4.36 : 1
38)	112	79	68.5	4.14 : 1
39)	108	79	69.5	4.05 : 1
40)	109	80	70.5	4.05 : 1
41)	111	80.5	71.5	4.39 : 1
42)	110	81	72.5	4.41 : 1
S.	34360	32175	2868	
med.	105.60	76.60	68.28.	4.485 : 1

EXPERIM. V.

§. 21. Poſt eandem lentem in diſtantia 8 dig. a foco Thermometrum A et 24 dig. a foco Thermome-

 trum

trum B locaui et Thermometrum C in vmbra ſuspendi, obſeruauique ſucceſſiue Thermometra.

1)Num.obſ.	2)Therm.A	3)Therm.B	4)Therm.C	5)Exceſſ.	Dilat.
1)	152	81	72	8.89	: 1
2)	152	81	72	8.89	: 1
3)	147	80.5	72	8.82	: 1
4)	137	78	71	9.43	: 1
5)	133	77 $\frac{1}{3}$	71.5	10.54	: 1
6)	128	76	71	11.40	: 1
7)	131	76.5	71	10,91	: 1
8)	131	77	71	10.	: 1
9)	132	77	71	10.16	: 1
10)	132	77	71	10.16	: 1

In ſequentibus obſeruationibus vnus Studioſorum obſeruauit Thermometrum A, alter Thermometrum B, ipſe attendi ad Thermometrum C.

11)	138	67	59	9.87	: 1
12)	137	67	59	9.75	: 1
13)	142	67	59	10.37	: 1
14)	140	67	59	10.12	: 1
15)	141	67	60	11.57	: 1
16)	132	67	60	10.28	: 1
17)	146	67	60	12.28	: 1
18)	147	68.5	60	10.23	: 1
19)	148	68,5	60	10.35	: 1
20)	145	68.5	60	10.	: 1
21)	150	68.5	60	10.59	: 1

22)

22)	- 138	- 68.5	- 60	- 9.17 : 1
23)	- 146	- 68.5	- 60	- 10.11 : 1
24)	- 148	- 68.5	- 60	- 10.35 : 1
25)	- 136	- 67.5	- 60	- 10.13 . 1
26)	- 142	- 67.5	- 60	- 10.56 : 1
27)	- 137	- 67.5	- 60	- 10 62 : 1
28)	- 140	- 67.5	- 60	- 10.66 : 1
29)	- 143	- 67.5	- 60	- 11.06 : 1
30)	- 150	- 68.5	- 60	- 10.59 : 1
31)	- 145	- 68.5	- 60	- 10. : 1
32)	- 142	- 68.5	- 60	- 9.64 : 1
33)	- 133	- 67.5	- 60	- 9.73 : 1
34)	- 128	- 65.5	- 60	- 12.36 : 1
35)	- 130	- 66.5	- 59	- 9.46 : 1
36)	- 142	- 67.5	- 59	- 9.76 : 1
	S. 5041	2539	2268	10.25 : 1
	med. 140.02	7052	63.00	

EXPERIM. VI.

§. 22. Poſt eandem lentem in diſtantia 6 digitorum a foco Thermometrum A et 24. digitorum Thermometrum B locaui, Thermometro C in vmbroſo loco ſuſpenſo et obſeruaui, vti antea.

1)Num.obſ.	2)Therm.A.	3)Therm.B.	4)Therm.C	5)Exceſſ.Dilat.
1)	- 257	- 82	- 72	- 18.5 : 1
2)	- 263	- 82	- 71.5	- 18.24 : 2
3)	- 270	- 83	- 72	- 18 : 1
4)	- 253	- 82	- 72	- 18.1 : 1

5)

1) Num.obſ.	2(Therm.A.	3)Therm.B.	4)Therm.C.	5)Exceſſ.Dilat.
5)	250	81	72	19.78 : 1
6)	241	80.5	71	17.89 : 1
7)	240	80.75	71	17.33 : 1
8)	242	81	71.5	18 : 1
9)	237	81	71.5	17.42 : 1
10)	234	81	72	18 : 1

In ſequentibus Studioſi obſeruarunt A et B, ipſe obſervaui Thermometrum C.

11)	192	67	59	16.63 : 1
12)	201	67	59.5	18.87 : 1
13)	207	67	59.5	19.66 : 1
14)	199	67	59	17.50 : 1
15)	202	67	59	17.78 : 1
16)	199	67	59	17.50 : 1
17)	204	67	59	18.13 : 1
18)	207	67	58.5	17.47 : 1
19)	198	67	58.5	16.41 : 1
20)	200	67	58.5	16.65 : 1
21)	204	67	58.5	17.12 : 1
22)	202	67	58.5	16.88 : 1
23)	206	67	59	18.37 : 1
24)	213	67	59	19.25 : 1
25)	211	67	59	19. : 1
26)	213	67	59	19.25 : 1
27)	197	67	59	17.25 : 1
28)	197	67	59	17.25 : 1
29)	198	66	59	19.86 : 1

30) -	202 -	66 -	59 -	20.43 : 1
31) -	211 -	66 -	59 -	21.71 : 1
32) -	205 -	66 -	59 -	20.86 : 1
33) -	183 -	66 -	59 -	17.71 : 1
34) -	218 -	67 -	59 -	19.88 : 1
35) -	211 -	67 -	59 -	19 : 1
	7567	2484.25	2190.	
med.	216.2	70.98	62.57	18.28 : 1

§. 23. Videmus ergo ex obſeruationibus cum vna lente inſtitutis

1.) Semper ferme a calore maiori maiores exceſſus dilatationis prodire, quam ſecundum rationem inverſam quadratorum diſtantiarum a foco prodire deberent.

2.) Eo magis recedere dilatationes a lege, quo magis creſcunt calores. Haec rationi valde conformia ſunt et prorſus contraria iis, quae § 16. ex obſervationibus cum duabus lentibus captis deducta ſunt.

§. 24. Vt diſtinctius omnia pateant, obſeruationes in compendium mittam.

Exp. IV. Sunt exceſſus dilatationis medii ſupra dilatationem in vmbra vti - - - 1 : 4. 485.
Exceſſus caloris reſpondentes aſſumti vti 1 : 4.
hinc vires attrahentes mercurii reſp. 4.485:4.000.

Exp. V. ſunt iidem exceſſus dilat. 1 : 10.25.
exceſſus caloris reſpondentes vti 1 : 9.
hinc vires attrahentes reſpond. vti 10.25 : 9.00

Exp. VI. Sunt iidem exceſſ. dilat. vti			1 : 18. 27.		
exceſſus caloris reſp. vti			1 : 16.		
hinc vires attrahentes vti			18.27:16.00.		
Vt omnia complectar, ſunt					
pro exceſſibus caloris	1	- 4	- 9	- 16.	
exceſſus dilatationis	4	- 4.485	- 10.25	- 18.27.	
et vires attrahentes vti	18.27	- 16. 34	- 16.04	- 16.00.	

§. 25. Pro dilatatione ergo minima vis attrahens maxima et pro dilatatione maxima vis attrahens minima invenitur; pro dilatatione 4. 485 inuenitur vis attrahens maior, quam pro dilatatione 1. et pro dilatatione 10.25 inuenitur vis attrahens minor, quam pro dilatatione 4.485. haec omnia rationi conuenientiſſima ſunt.

Eſt porro inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt vti 1 ad 4, differentia vti 0.193.; inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt vti 4 ad 9, eſt differentia 0.30. inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt 9 ad 16, eſt differentia vti 0,04. Sit differentia inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt vti 4 ad 16=0.34. Eſt ergo differentia praedicta inter exceſſum caloris 1 et 4 ferme ſextuplo maior, quam inter exceſſum caloris 4 et 16. Hoc rurſus rationi valde conforme eſt, et vires attrahentes in maioribus dilatationibus tandem euaneſcere debent.

§. 26. Imo exceſſus dilatationis viſi ſunt ſecundum certam legem creſcere; Oritur ferme in quolibet caſu

caſu exceſſus dilatationis calore maiori productus, ſi $\frac{1}{7}$ pars exceſſus ſimplicis dilatationis addatur integrae ſimplici dilatationi et per numerum exceſſum caloris maiorem exprimentem multiplicetur.

Ita 4. 485 eſt ferme $= \frac{8000}{7}. 4 =$ 4. 57.
et 10. 25 eſt ferme $= \frac{8000}{7}. 9 =$ 10. 28.
et 18. 27 eſt ferme $= \frac{8000}{7}. 16 =$ 18. 000.

§. 27. Legem tamen nondum inuentam iudico, ſecundum quam ex dilatationibus mercurii quilibet calores relatiui definiri poſſint, et vires argentum viuum diverſimode calidum ad vnionem ſollicitantes inueniantur. Obſeruationes hae paucae huic rei ſufficere non videntur, multiplicentur obſeruationes neceſſe eſt, et pro aliis diſtantiis a foco adhuc ſimili ratione inueniantur dilatationes, vt lex tandem erui poſſit.

§. 28. Iis, quae §. 26. continentur rem nondum abſolui, facile patet; fingamus enim hac noſtra inquiſitione rem eſſe ad finem perductam, et definiendam eſſe rationem caloris gradus a Therm. ad gradum b, erunt exceſſ. dilatationum vti a ad $b = 1$ ad $\frac{b}{a}$. Erit ergo per §. 26 $\frac{b}{a} = (1 + \frac{1}{7})x$; ſi x maiorem caloris exceſſum exprimere ponatur, qui producit exceſſum dilatationis 1, erit $x = \frac{7b}{8a}$. Erunt ergo relatiui calores pro 1 et $\frac{b}{a}$ vti $1 : \frac{7b}{8a} = 8a : 7b$. Erunt ergo vires attrahentes pro a et b, vti $7ab : 8ba = 7 : 8$ (§. 4.). i. e. in conſtanti ratione, quod eſt abſurdum.

 §. 29.

§. 29. In obſeruationibus adductis vires mercurium ad vnionem ſollicitantes forte non multum receſſerunt ab hac ratione. Receſſerunt tamen re vera per §. 24. Ponamus etiam ſimplici dilatationi primo Experimento addendam quantitatem x, 2do y et 3tio z, erit

Exp. I. $(1.00 + x)4 = 4.845$
et hinc $x = 0.12.$

Exp. II. $(1.00 + y)9 = 10.25$
hinc $y = 0.1389.$

Exp. III. $(1.00 + z)16 = 18.27$
hinc $z = 0.1418.$

Primo experimento ergo minor, quam octaua pars ſimplici exceſſui dilatationis eſt addenda, nimirum $\frac{1}{8\frac{1}{3}}$, et ſecundo maior, quam vna octaua pars, nimirum $\frac{1}{8\frac{1}{3}}$ pars, et tertio maior, quam $\frac{1}{7\frac{1}{5}}$, ſcil. $\frac{1}{7}$ pars.

§. 30. Quo magis ergo maior exceſſus caloris ſimplicem exceſſum caloris ſuperat, eo maior pars ſimplicis exceſſus dilatationis ſimplici exceſſui dilatationis eſt addenda, vt ſumma oriatur, quae per exceſſum caloris maiorem multiplicata det dilatationem maiorem, calore minore multiplicatam. Hoc rurſus criterium ſuppeditat exceſſus caloris propinquos veris pro dilatationibus argenti viui definitis aſſumtos fuiſſe. Si Deus viuere ſinat, ex pluribus impoſterum obſeruationibus aptioribus et ſcalae maioris thermometris experimenta repetiturus et continuaturus, pro exceſſibus caloris, qui in alia ratione ſunt exceſſus dilatationis reſpondentes, eruere laborabo.

DE

DE INDICE ELECTRICITATIS ET DE EIVS VSV IN DEFINIENDIS ARTIFICIALIS ET NATVRALIS ELECTRICITATIS PHAENOMENIS

DISSERTATIO

G. W. RICHMANNI.

Officium meum in leges naturae inquirendi effecit, vt octo ab hinc annis in electricitatis phaenomena inquirere, inter alios labores Academicos, inceperim. Cum perfectum electrometrum, ſiue inſtrumentum, quo virtus electrica definitur, ad electricitatis doctrinam perficiendam absque omni dubio multum faciat; initio ſtatim cogitaui de commoda ratione definiendi virtutis electricae intenſionem. Mihi tamen nondum ita felici eſſe licuit, vt electrometrum perfectum nactus fuerim, neſcio vtrum alii? Relatum mihi quidem eſt, quendam le Roy in Gallia et d'Arcy adiunctum Mechanices, corpus aquae innatans, per communicationem electrificatum in vaſe vitreo, et vicino alio corpore deriuatiuae electricitatis attractum et eleuatum, adhibuiſſe ad electricitatem menſurandam, ſpatio adſcenſus gradum electricitatis notante, vtque ſcala redderetur amplior, corporis electrificati extremitatem acutam ita luce illuminare docuiſſe, vt vmbra acutae extremitatis proiiceretur in tabulam diſtantem, in qua ſcala, pro electricitatis gradu menſurando, delineata erat. Deinde Fräncklin primus electricitatis per acuta corpo-

ra ex atmoſphaera, fulminea materia grauida, prouocandae auctor, machinulam ex rotulis compoſitam leuiſſimis, ex charta craſſiori, inſtar molendini alati, electricitate ad motum concitauit, ad materiae electricae motum oſtendendum. Haec forte machina, celeritate circumvolutionis indicis cuiusdam, vim electricitatis menſurare poterit. Nihil tamen de imperfectione et perfectione harum machinarum mihi dicere licet, cum eas nondum adhibere et ne accuratas quidem earum deſcriptiones videre licuerit. Eo ergo ſolum indice electricitatis vſus ſum, qui in Commentariorum Tomo XIV. a me deſcriptus eſt, et quem poſtea emendaui. Mentionem quidem etiam feci, ex percuſſionum campanulae, electricitate factarum, frequentia iudicium ferri poſſe de virtutis electricae intenſione; campanula tali tamen non vſus ſum, ad phaenomena electrica definienda, ſed ſolo filo lineo, ad regulam pendulo, de quo nunc quaedam phaenomena electricitatis tam artificalis, quam naturalis, quatenus indice praedicto definita ſunt, exponere, phaenomenaque electricitatis explicare conſtitui.

Indicem electricitatis voco tale inſtrumentum, cuius ope electricitas cuiuslibet corporis, in diuerſis circumſtantiis, cognoſci poteſt ita, vt appareat, vtrum nunc ſit maior, quam alias? et quod inſeruit legibus electricitatis commode definiendis. Probabile eſt in vna regione maiorem electricitatem excitari poſſe, quam in altera. Cel. Muſchenbrockio non imitari licuit in Belgio quaedam experimenta electrica, nec mihi hic Petropoli, quae in Germania, Gallia, Italia capta ſunt feliciſſime. De magno autem experimentatore Muſchenbrockio perſuaſus

ſuaſus ſum, ipſum ſatis aſſuetum eſſe experimentis cum cura et circumſpectione inſtituendis, et occaſionem etiam habuiſſe, machinam idoneam et perfectiſſimam electricam ſibi comparandi. Neque dubitandum eſt, electricitatem naturalem, in atmoſphaera ſponte generatam, in vna regione maiorem eſſe, quam in alia: e re igitur vtique erit, inſtrumentum aliquod adhibere, quod diſcrimen eiusmodi prodit.

Vtrum meus index aliqualem vtilitatem habeat? ex ſequentibus iudicandum eſt. Ex Tomo XIV. Commentariorum perſpicitur, illum nihil aliud eſſe, niſi filum lineum AB 1 ½ pedis Lond. et dimidii grani medici prope regulam latam verticalem AC, adplicatum et ex ſuprema regulae parte ad latus anguſtius pendulum, ſub quo quadrans ligneus DEFGH paulo maioris radii, quam longitudo fili eſt, ita locatur, vt punctum ſuſpenſionis fili ſit centrum quadrantis et planum quadrantis cum ſectione regulae verticali, eaque ampliori, ſit in eodem plano. Si talis regula cum maſſa electrificata eſt connexa, ipſa electrificata repellit filum electrificatum, quod etiam quadrante ligneo non electrificato attrahitur. Tali ratione, quo magis recedit filum a regula, eo maior electricitas excitata ſit neceſſe eſt. TAB. VIII. Fig. 1.

Cauendum etiam eſt, ne pinguedo et cera regulae metallicae adhaereat, quae efficit, vt filum a regula electrificata in eo puncto, vbi cera adhaeret, non repellatur, ſed potius retineatur quam tenaciſſime, indicio certiſſimo, materiae electricae agitationem in hoc puncto non ſolum impediri, ſed etiam ceram aliam electrici-

cita-

citatem obtinere , quae loco repulſionis filum attrahit. Quodſi vero electricitas fortior excitetur ita, vt vis repellens reliquarum partium regulae vim attrahentem cerae ſuperet, tandem filum a regula recedit. Imo vaſculum vitreum, quo regula excipitur, pariter retinet filum, ſi ab eo contingitur, vt non niſi electricitate fortius excitata filum a vaſculo vitreo ſeparetur.

In praedicto indice fili receſſus a regula maior, quam antea, filo manente eiusdem longitudinis et ponderis et maſſa electrificata eadem, indicat, vti dictum, maiorem electricitatem, quam antea excitatam fuiſſe; variique indices ſibi ſimiles et aequales, quorum fila ſunt eiusdem longitudinis et ponderis, in diuerſis locis ad eandem maſſam electrificatam adplicati, oſtendunt eundem gradum. Quodſi maſſae vni electrificatae index adplicatus prodit certum gradum, ſimilisque index, aeque longo et aeque graui filo inſtructus, alteri maſſae electrificatae, et poſt electrificationem a priori ſeparatae, iunctus, eundem oſtendit gradum, maſſae electrificatae ſeſe mutuo contingentes nullam ſcintillam exhibent, et vterque index etiam poſt contactum eundem reſpicit gradum, indicio certo aequaliter electrificatas eſſe. Adplicatas tandem indicibus aeque longorum et grauium filorum maſſis diuerſis electrificatis et poſt electrificationem ſeparatis, debilitataque vnius maſſae electricitate quomodocunque, ita vt filum minorem gradum oſtendat, quam filum alterius indicis, maſſae dum ſeſe contingunt, ſcintillam exhibent electricam, et poſt contactum maſſarum index vterque oſtendit eundem gradum. Quodſi haec conſiderentur, patebit, indicem talem idoneum

neum eſſe inſtrumentum, cognoſcendi cuiusque maſſae electrificatae gradum electricitatis vel maiorem vel minorem. Obſeruandum tamen eſt, ſemper eiusdem longitudinis et ponderis filum adhibendum eſſe. Aliter electricitatis virtus male definitur, et nulla comparatio inſtitui poterit, vnumque filum hunc, et alterum alium, gradum oſtendere poterit, virtute electrica eadem cum vtraque maſſa communicata. Rationem rei non difficile intelligere eſt: Materiam electricam circa corpus motu quodam agitatam ad certam diſtantiam cingere debere corpus neceſſe eſt, et in minori diſtantia a ſuperficie corporis maioris efficaciae eſſe, conſeqnenter creſcente diſtantia certa lege et nobis nondum cognita, decreſcere virtutem. Quodſi ergo filum eiusdem longitudinis et ponderis a ſuperficie vnius corporis remoueatur ad eandem diſtantiam, ad quam remouetur ab alio corpore, indicium erit certum, materiam electricam agitatam in aequalibus his diſtantiis efficaciae aequalis eſſe, et in aliis diſtantiis minoribus aequalibus aequaliter pariter ſe habere, virtutemque electricam in vtroque corpore eſſe aequalem. Quodſi vero filum a ſuperficie vnius corporis electrificati remoueatur ad diſtantiam maiorem, quam filum eiusdem longitudinis et ponderis a ſuperficie alterius corporis electrificati, indicium ſimiliter certum erit, efficaciam materiae electricae agitatae in corpore priori in diſtantia minori et aequali diſtantiae, ad quam filum a ſuperficie alterius corporis remouetur, maiorem eſſe, hinc etiam eius virtutem electricam maiorem eſſe debere.

Fac nunc requiſitum boni indicis nihil aliud eſſe, quam vt oſtendat maiorem vel minorem electricitatis

gradum, nil deſiderari videtur amplius. Sed nemo forte negabit vſum indicis ampliorem reddi, ſi (1) index adplicatus corpori electrificato non efficit, vt electricitas excitata cito pereat, vt nempe lex decrementi electricitatis et conſtitutio materiae electricae agitatae detegi tandem poſſit, et ſi (2) cuilibet maſſae commode poſſit adplicari ad electricitatis gradum examinandum, quod interdum valde neceſſarium. Neutrum requiſitum in indice deſcripto inuenitur, electricitas enim excitata valde diminuitur ob arcum ligneum angulis ſolidis regulae vicinum, quibus forti electricitate excitata in tenebris conus coeruleus electricus cum ſuſurro ex ſcintilla electrica, in angulis ſolidis regulae ſponte orta, generatus adhaeret: remedium tamen inueniri poterit, vti ex ſequentibus adparebit.

Notiſſimum eſt phaenomenon electricum, quod modo deſcripſi, et attente conſideranti videtur eſſe reuera eiaculatio continua radiorum diuergentium ex corpuſculis lucidis conſtantium, qui quidem ex angulis ſolidis corporum, quae deriuatiuae electricitatis capacia ſunt, electrificatorum, oriuntur; inprimis aliis corporibus deriuatiuae electricitatis infinitis non electrificatis ita admotis, vt anguli ſolidi adpropinquatorum non reſpiciant angulos ſolidos electrificatorum corporum. Quodſi vero anguli ſolidi acuti corporum ſibi obuertantur, in diſtantia 5 vel 6 digitorum ex angulo ſolido vtriusque, electrificati nimirum et non electrificati, conus multo minor, quam praedictus, cum ſibilo erumpit, debiliorique electricitate excitata, lumen extinguitur.

Hic filum ſermonis, quod mihi ſequendum propoſui, parumper relinquam, illuc mox reuerſurus; inprimis

primis cum dicenda, ad quaedam, quae ſub finem addere animus eſt, melius intelligenda, facere videantur. Quaeritur, cur lumen conicum in angulis ſolidis acutis potius et prominentibus corporum partibus oriatur? cur non in ſuperficie plana et curua? cur non in angulis planis? cur ex acuto corpore electrificato, obtuſo corpore infinito oppoſito, erumpat conus magnus electricus, acuto vero obuerſo multo minor? Certe quae a nonnullis allata ſunt obſcuritatem redolent, neque ego nunc rem ita explanare in promtu habeo, vt nihil deſiderari poſſit, ſat contentus, ſi occaſionem iis, qui ingenio praeſtant, dedero aliqualem, rem rite explicandi, conditiones, ſub quibus phaenomenon oritur, definiendo.

Verum quidem eſt, cingi debere corpora electrica, ad certam diſtantiam, materia quadam ſubtili agitata: nihil dicam de iis phaenomenis, quae talis materia in ipſis intimis receſſibus et porulis corporum, omni ſagacitati ſeſe ſubducens, efficere poteſt, et ponere fortaſſe licebit, materiam electricam agitatam occupare ſpatium circa corpus electrificatum tale, vt extendatur a quolibet puncto ſuperficiei ad aequalem diſtantiam. Quodſi ergo corpora figuris differunt, et magnitudine etiam, volumina materiae electricae agitatae valde discrepabunt. Nonne etiam discrepantibus his voluminibus actiones corporum electrificatorum, ſub eodem electricitatis gradu, discrepabunt? Hoc ex ſequentibus experimentis cum magna veri ſpecie concludi poſſe credidi. Maſſam ferream ſuperficiei 10″ □torum priſmaticam impoſitam vitro adplicui ad maſſam electrificatam et oriebatur ſcintilla maſſa electrificata tacta. Deinde tu-

bum ferreum aequalis maſſae cum maſſa priſmatica, ſed cuius ſuperficies erat 130 digitorum □torum eodem modo adplicui ad eandem maſſam, cuius electricitas diminuta erat adplicatione priſmatis et maior oriebatur concrepatio et ſcintilla, et maior etiam indicis mutatio. Etiam per maſſam aurichalceam ponderis $\frac{3}{4}$ librae et ſuperficiei 700″□, magis concrepantem ſcintillam elicui ex maſſa minus electrificata, quam per maſſam aurichalceam duarum librarum, et ſuperficiei 50″□ ex maſſa magis electrificata eadem. Certe ſcintilla poſteriori caſu efficacior non erat, quam priori caſu.

Ampliſſimus ſeſe hic offert campus, quo ſtereometriae amatores ſeſe exercere poſſunt. In priſmatibus omnibus rectis, conſequenter etiam infinitangulari ſiue cylindro et etiam ſphaera, facile volumen materiae electricae excitatae definiri poteſt, radio actiuitatis cognito. Eſt enim iſtud in priſmate recto ſumma (1) *ex parallelepipedo*, cuius baſis integra ſuperficies priſmatis, altitudo vero aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, (2) *ex prismate*, cuius baſis quarta pars circuli, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati et altitudo duplum perimetri baſeos prismatis, atque (3) ex *cylindro* cuius baſis circulus, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, et altitudo aequalis altitudini priſmatis, et (4) ex *ſphaera*, cuius radius aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. In cubo in ſpecie eſt volumen materiae electricae agitatae ſumma 1) ex *parallelepipedo*, cuius baſis ſextuplum quadratum lateris, et altitudo aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. 2) Ex *cylindro*, cuius baſeos radius, aequa-

lis

lis radio actiuitatis corporis electrificati, et altitudo triplum latus cubi; et tandem. 3) Ex *ſphaera* radii aequalis radio actiuitatis cubi electrificati. Vltima pars ſummae, nimirum ſphaera, inprimis venit conſideranda.

Ad angulos ſolidos prismatum continentur ſectores ſphaerae, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, tribus planis, in quibus ſectoribus materia electrica agitata continetur, et ſumma omnium talium ſectorum in priſmate eſt aequalis ſphaerae integrae, eiusdem radii. In prismate triangulari recto, eſt hinc volumen materiae electricae, vni angulo ſolido adhaerentis, ſexta pars praedictae ſphaerae, in priſmate quadrangulari octaua pars eiusdem, in prismate quinquangulari $\frac{1}{10}$ pars etc. conſeqnenter in priſmate infinitangulari ſiue cylindro infiniteſima pars.

Conſiderari meretur, eo maius eſſe volumen materiae electricae agitatae, angulo ſolido incluſum, quo acutior eſt angulus baſeos priſmatis, lateribus baſeos incluſus, eo minus vero eſſe praedictum volumen, quo obtuſior eſt angulus praedictus, ſi radius actiuitatis ponitur idem. Quodſi nunc ponatur materiam electricam agitatam a corporibus eo difficilius ſeparari, quo in pluribus punctis materia haec corpus contingit, et eo facilius, quo in paucioribus punctis hoc fit, adhaeſionem nempe hanc ſi iuſto maior eſt, impedire, quominus materia agitata a corporibus ſeparetur, et in aliam ſimilem materiam extra corpus incurrat, vt colliſione lux oriatur, ſi vero minor eſt, ſeparationem et colliſionem praedictam non impediri, et hinc lucem per ſatis notabile interuallum exhiberi, non difficulter videtur conci-

pi poſſe, cur lux continua generetur, ſi corpus non electrificatum ad corporis electrificati angulum adpropinquet. Materia enim electrica corporis non electrificati quieſcens, in locum materiae agitatae et a corpore electrificato expulſae ſecedere debere videtur, hinc tritus oriri et lux: praeſertim ſi angulo ſolido corporis electrificati obiiciatur corpus obtuſum non electrificatum, quo caſu ſeparatio materiae facilis, et acceſſus nouae materiae largus eſſe videtur.

In ſuperficiebus corporum planis materia electrica agitata adhaeret in pluribus punctis corpori, ita, vt non ſeparetur facile: haec fortaſſe eſt ratio, cur hoc caſu lumen, praedictum, continuum, non oriatur in eiusmodi ſuperficiebus. In omnibus angulis planis materia electrica, quae vni puncto adhaeret, eſt ita parua, vt priſma infinite paruae altitudinis conſtituat, cuius baſis eſt ſector circuli, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, hinc probabiliter ob paucitatem materiae, talis angulus, lumini praedicto praebendo, par non eſt. In ſuperficie incuruata cylindri, qui inſtar priſmatis infinitangularis, conſiderari poteſt, latera baſeos faciunt angulum planum, hinc idem, quod in praecedente caſu fieri debet. In angulis ſolidis priſmatum, ſi adhaeret materia electrica agitata angulis baſeos priſmatis obtuſis valde, volumen materiae electricae agitatae debet eſſe paruum, hinc per ſupradicta lumen praedictum non oritur, quod experientiae eſt. In angulis ſolidis priſmatum acutis aliter ſe res habet, vt ibi lumen praedictum exhibeatur experientia teſte. Quia angulus ſolidus electricae materiae in cylindris eſt infinite paruus, pro-

pterea

pterea in angulis ſolidis cylindri non licet ſperare lumen praedictum continuum, quod experientia ſatis notum eſt. In pyramidibus, quo acutior eſt angulus ſolidus pyramidis, eo obtuſior eſt angulus ſolidus materiae electricae, vertici pyramidis adhaerentis, et eo maius eſt volumen materiae electricae ibi agitatae; hinc experientia teſte, ex eiusmodi angulis e. g. extremitate ſiue cuſpide gladii electrificati, et extremitatibus foliorum, plantarum electrificatarum, hoc lumen exit. Quodſi guttulae aqueae parallelepipedo horizontali electrificato incumbunt, et admovetur corpus non electrificatum, guttulae eleuantur et figuram conicam induunt, verticibus ſurſum ſpectantibus, debet ergo per modo dicta lumen praedictum in verticibus exhiberi, quod experientia comprobatur.

Nolim tamem dicere nullo gradu electricitatis excitato non niſi in angulis ſolidis corporum et partibus procumbentibus lumen praedictum oriri. Ea electricitate, quam ego producere potui, lumen conicum in his tantum exhibere licuit, in aliis non item. Electricitas vero mea, quam Petropoli producere potui, filum indicis deſcripti vltra 50 gradum hyeme nunquam et aeſtate vix ad gradum quadrageſimum eleuauit. Forte, ſi eleuari poſſet multo magis filum, etiam lumen in aliis partibus corporum exhiberetur et totum corpus lumine circumdaretur, quod a Cel. *Boſio* obſeruatum in eius Commentariis legimus, vbi ei hoc phaenomenon beatificationis nomine inſignire collibitum eſt. Neque audeo dicere ex acutiſſimo angulo ſolido lumen conicum maximum oriri, quia ei obtuſiſſimus angulus ſolidus, electricam materiam agitatam continens, obiicitur, et quia volu-

men

men huius materiae ferme aequale eſt dimidiae ſphaerae, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. Priſmatis enim quadrangularis angulus ſolidus mihi viſus eſt maius lumen praebuiſſe, quam acutiſſimus pes circini. Fortaſſe ex maiori angulo ſolido etiam largius materia electrica, vel materiam electricam ex parte conſtituens, erumpit et reſarcit decrementum electricitatis magis in hoc loco, quam materia ex angulo ſolido minori eiaculata, adeſtque forte hic quaedam compoſitio rationum ex ratione magnitudinum angulorum ſolidorum corporis electrificati et angulorum ſolidorum, qui materiam electricam agitatam continent; vbi ex principiis arithmeticis patet, factum oriri maximum, ſi factores ſint aequales, ſumma manente eadem, quod in dicto caſu obtinet.

Conſideratio luminis conici electrici forte nos iuſto diutius a propoſito noſtro perſequendo detinuit, ad quod nos nunc rurſus accingimus.

Dixi cum lumine praedicto decrementum electricitatis eximium coniunctum eſſe, quod edoctus ſum, dum tempus, quo deſcendebat filum indicis electrificati, per certum arcum, annotarem, deinde extremitatem regulae vaſculo vitreo exciperem et interuallum inter vaſculum et regulam limatura martis vel raſura alius metalli explerem, denuoque excitata electricitate, vt filum eundem gradum oſtenderet, quem initio in primo caſu, tempus, quo electricitas decreſcebat per eundem arcum obſeruarem. Tempus enim vltimo caſu ſemper multo maius erat, quam primo, certo indicio electricitatem priori caſu decreuiſſe citius, quam altero. Priori caſu etiam filum nunqnam ad tantam altitudinem eleuare potui

ac

ac altero caſu. Iuuat hic monuiſſe, non neceſſarivm eſſe limaturae martis, vel raſurae alius metalli vſum. Quodſi enim regula fundum vaſis vitrei tangit, idem fit; quin absque contactu fundi decrementum electricitatis minuitur. Auro etiam obduci poteſt interior vaſculi ſuperficies et regula demitti, donec aurum tangat. Ex dictis ſimul ſatis intelligitur, qua ratione index emendandus ſit, ne electricitas cito decreſcat.

Obſeruatio decrementi electricitatis, ob angulum ſolidum corporis electrificati corpori non electrificato vicinum, occaſionem dat variis cautelis in experimentis electricis adhibendis, ad quas in vſu indicis cum induſtria attendendum eſt, ſi phaenomena comparare volumus.

1.) Cum cura cauendum, ne in maſſa electrificata anguli ſolidi praeſertim acuti occurrant, lumina conica exhibentes in tenebris: hinc extremitates filorum metallicorum, lucem hanc eiaculantes, cera obturaui; qua re effeci, vt lux in extremitatibus euaneſceret. In catena ferrea adhibita hinc et inde lux illa adparebat in tenebris, et cum catenam examinarem, in locis illis procumbentes lamellas acutas offendebam, quibus abraſis lux ceſſabat et decrementum electricitatis minuebatur. Dum circinum maſſae electrificandae imponebam, ita vt pedes ex vtraque parte prominerent, vix electricitas excitabatur ea, vt ad gradum quadrageſimum filum indicis motu, certa lege retardato, eleuaretur, et a gradu 40 ad 35 ceſſante tritu vitri electrificatorii 86 minutis ſecundis deſcendebat, remoto vero circino et electricitate denuo excitata promte filum, motu, certa lege retardato,

ad 50 gradum aſcendebat, et a gradu 40 ad 35 centum minutis ſecundis peruenit.

2) Nonſolum electricitas decreſcit cito ob acuta corpora maſſae electrificatae adplicata, ſed etiam ſi corpora deriuatiuae electricitatis capacia, inprimis infinitae connexionis cum aliis ſimilibus et obtuſa, vicina ſint angulis ſolidis corporum electrificatorum, vel acutis extremitatibus maſſae electrificatae, et hoc quidem caſu citius etiam electricitas decreſcit. Quodſi enim circini pedi admouetur manus in diſtantia 5 vel 6 digitorum, maſſa ad gradum e. g. 40 electrificata, filum admodum celeri motu regulam verſus deſcendere incipit.

3) Poſſunt duo diuerſa corpora aequalia et ſimilia aequaliter electrificata in eodem medio inaequaliter virtutem electricam perdere, vnum citius, alterum tardius; ſi nimirum vnum verſus corpus reſpiciant admodum acuta corpora, deriuatiuae electricitatis, infinita, in diſtantia 6 et plurimum digitorum, alterum verſus vero non ſimiliter. Ad hoc maxime attendendum eſt, et omni cura cauendum, ne maſſae electrificandae corpora acuta, deriuatiuae electricitatis, infinita, vicina ſint. Quodſi enim pes circini teneatur in diſtantia 6 digitorum a maſſa ad gradum e. g. quadrageſimum electrificata, filum indicis continuo et celeriter deſcendere incipit. Quodſi vero caput circini, vel aliud quodcunque corpus obtuſum maſſam electrificatam verſus dirigatur, tardior fili acceſſus ad regulam obſeruabitur, licet corpus obtuſum propinquius admoveatur, quam acutum admotum erat. Eadem res curioſo ſpectaculo confirmatur, ſi ſuberis fruſtum ex filo ſerico ſuſpendatur prope maſſam electrificatam. Notum eſt, illud repelli debere

debere, attractione praecedente. Hoc facto, teneatur in diſtantia quinque vel ſex digitorum a ſubere circini pes, et accedet ſtatim ad maſſam electrificatam ſuber, euidenti indicio, illud electricitatis iacturam paſſum eſſe, et adhaerebit maſſae electrificatae ſimiliter: ponatur dein digitus inter pedem circini et fruſtum ſuberis, digitusque adpropinquetur ſuberi, et accedet ſuber ad digitum, nempe corpus electrificatum ad non electrificatum. Hoc repetitis vicibus fieri poteſt.

4.) In medio ſicciſſimo, quantum poteſt, experimenta electrica ſunt inſtituenda: humidum aerem electricitati officere ab omnibus ferme notatum eſt, neque dubito genuinam rationem, cur fiat, allatam fuiſſe, licet mihi non innotuit, ſi quis fuerit. Si medium eſt humidum, humiditates a maſſa electrificata attrahuntur, et non facile ſeparantur, nec repelluntur ob cohaeſionem. Quatenus tamen humiditates maſſae electrificatae adhaerent, nullum decrementum electricitatis oritur, niſi guttulae illapſae aqueae, admotis aliis corporibus obtuſis infinitis, conicam figuram nanciscantur, et conos lucidos emittant. Decrementum iſtud oritur potius ob fulcimenta humectata, quae electrificata per communicationem eodem attrahunt humiditates, ac corpora deriuatiuae electricitatis electrificata. Iſta humectatio eo promtius fit, quo electricitas efficacior excitatur, et haec eſt ratio, cur electricitas in frigido conclaui ſpectatoribus multis praeſentibus initio ſat valida ſit, mox tamen decreſcat et interdum ceſſet. Humiditates enim ex ſpectatoribus praeſentibus per tranſpirationem inſenſibilem emiſſae attrahuntur a fulcimentis corporum electrificatis, quae mutantur in corpora deriuatiuae electricitatis infinita.

Confirmatum fuit hoc egregie experimento, cui occaſionem dedit Collega honoratiſſimus Vir Ampliſſimus Lomonoſſow, dum tres portiones vitri, in puluerem diuerſae ſubtilitatis triti, ſumſi eum in finem, vt examinarem, vtrum pulueres triti mutarentur in corpora deriuatiuae electricitatis? an ſuam indolem etiam triti retinerent? Examinaui rem, et vidi corpora iis ſuffulta electrificari nullo modo potuiſſe, ne vero humiditates forte adhaerentes in culpa eſſent, in fornace caleſeci valde, et repetito experimento obſeruaui, pulueres hos indolem ſuam retinuiſſe, et originariae electricitatis manſiſſe. Continuata tamen electrificatione, puluis ſubtilior breuiori tempore in corpus deriuatiuae electricitatis mutabatur, quam puluis craſſior, indicio probabili, puluerem ſubtiliorem ob ſuperficiem maiorem plus humiditatis eodem tempore attrahere, quam puluerem craſſiorem. Ne vero aliquis obiiceret, calorem in culpa eſſe, non humorum abſentiam, cur vitrum in puluerem tritum originariae electricitatis ſit, et frigidum forte perpetuo deriuatiuam electricitatem habere, ſequenti ratione rem extra omnem dubitationis aleam poſui. Vitri puluerem in phiala vitrea caleſeci, et obturaui bene ſubere collum: ſuberem perforaui binis in locis, per foramina transmiſi tubulos vitreos: per tubulos vitreos traieci fila metallica, donec contingerent puluerem vitri in duobus diuerſis locis. Alteram extremitatem vnius fili metallici cum maſſa electrificata coniunxi, alteram alterius fili mettallici extremitatem ligaui cum corpore infinito deriuatiuae electricitatis, et electrificaui maſſam, calida etiam phiala et puluere, et poſtea phiala et puluere frigidis: electricitas

vtro-

vtroque caſu inſignis excitabatur, quod non fieri potuiſſet, ſi puluis frigefactus deriuatiuae electricitatis euaſiſſet. Quo tardius ergo electricitas lagenae Muſchenbrockianae decreſcit, caeteris paribus, eo ſiccius debet eſſe medium, quo lagena circumdata eſt.

5) Diminuitur electricitas inſigniter, regula vel filo metallico lagenae praedictae Muſchenbrockianae adplicato ad maſſam electrificatam, et lagena in corporibus originariae electricitatis poſita; conſeruatur vero, ſi imponitur corporibus deriuatiuae electricitatis valde capacibus infinitis: filum indicis enim multo celerius deſcendit priori caſu, quam poſteriori. Quodſi lagena fundo eius vaſe metallico armato ponatur in fulcimento ſicco vitreo et regula lagenae maſſam electrificatam contingente, gradus electricitatis obſeruetur, et deinde tangatur vas, fundum lagenae cingens, continuo electricitas per multos gradus augetur. An hic ex corporibus deriuatiuae electricitatis infinitis materia electrica noua per parietes lagenae electricitate affectos accedat, et decrementum materiae electricae corporis electrificati compenſet? an vitri craſſities impediat acceſſum huius materiae? an potius motus in lagena praedicta productus vel potius in particulis eius minimis conſeruetur, ſi lagena in metallo collocetur, et citius retardetur, ſi in vitro ponatur, vel alio corpore originariae electricitatis? dicere non audeo. In ſequentibus electricitatem, adplicata lagena Muſchenbrockiana productam, vocabo compoſitam, et ſine ea ſimplicem. In electricitate ſimplici perpetuo obtinet, corpus electrificandum eſſe ſuffulciendum corpore originariae electricitatis, ſi electricitatem ſuam per notabile tempus

ſine motu et tritu vitri electrificatorii conſeruare debeat. Infinitum ſiue non ſuffultum corpus per breuiſſimum ſolum momentum temporis electrificatur. Quodſi enim maſſa vehementer electrificata eſt, et ceruix, e. g. hominis, non ſuffulti corporibus originariae electricitatis, et percutientis ferrea virga maſſam electrificatam, tangitur leuiter ab alio corpore, deriuatiuae electricitatis, infinito, ictum quendam tangens ſentit, et inter digitum et ceruicem lumen in tenebris cernere licet, indicio ſatis certo, electricitatem communicatam eſſe cum corpore, quod percuſſerat maſſam electrificatam. In electricitate compoſita, ſi metallum, cum lagenae fundo armato filo metallico iunctum, ſcintillis electricis percutitur, et metallum iſtud vel filum tangitur, tremor ſentitur et concuſſio, licet metallum corpus infinitae connexionis ſit cum aliis deriuatiuae electricitatis corporibus. Et filum metallicum, dum metallum prouocat ſcintillam ex corpore electrificato, ipſum reddit ſcintillam, ſi tangatur.

Decreſcit ergo electricitas maſſae finitae

1) Ob angulos ſolidos maſſae electrificatae.
2) Ob corpora deriuatiuae electricitatis alia infinita inprimis acuta vicina.
3) Ob humiditates ad fulcimenta attractas.
4) Ob lagenam Muſchenbrockianam in corporibus originariae electricitatis poſitam et regulam eius ad maſſam electrificatam adplicatam.

Quaeri hic poteſt: an non etiam ab inaequalitate ſuperficiei, maſſarum, denſitatum et conſtitutiuarum partium corporum electrificatorum decrementi electricitatis diuerſitas ori-

oriatur? Ad has quaeſtiones tamen ob penuriam experimentorum reſpondere nondum licet. Decreſcente vero electricitate minuitur volumen materiae electricae agitatae, dum filum indicis deſcendit, donec corpus iam nulla materia electrica agitata cingatur amplius, tempusque deſcenſus fili per ſpatia diuerſa definiet forte tandem legem decrementi electricitatis, ſi modo curua, quam filum facit, et ex curua ratio efficacitatis materiae electricae in diuerſis a ſuperficie corporis diſtantiis definiri poſſit. Neque difficile eſt intellectu, hac ratione cognita, indicem mutari in perfectum electrometrum.

Dixi ad perfectionem indicis facere, vt electricitas, eo adplicato ad corpus, quantum poteſt, conſeruetur, et oſtendi, quomodo hoc, adhibito indice deſcripto, obtineatur. Nec ſilentio praetereundum credo alterum indicis requiſitum, vti nimirum commode tolli poſſit a corporibus electrificatis, et quibuscunque aliis electrificatis adplicari ad gradum electricitatis cognoſcendum. Hoc requiſito caret, vti facile patet, index deſcriptus, non tamen ita, vt nullum rei remedium afferri poſſit. Paucis nunc exponam, qua ratione huic incommodo obviam iri poſſit.

Lagenula parua vitrea ABC, colli anguſtioris et cylindrica, tenuium parietum, cum limatura martis, raſura cuiuslibet metalli, vel globulis plumbeis minimis ad dimidiam altitudinem impleatur, deinde regula metallica KN immittatur in lagenulam, donec fundum tangat, ita vt circumdata ſit limatura martis, et obtineat verticalem ſitum, atque in collo lagenae bene firmetur ſubere, Tab. VIII. Fig. 2.

ſubere, ne vacillet. Ad extremitatem partis regulae prominentis ex lagena, quae 12 digitorum ſit, ligetur filum tenuiſſimum KM, certi ponderis, e. g. dimidii grani medici, quod tantum non tangat collum lagenulae. Lagenula immitatur vaſi metallico FGBC tenui, arctiſſime lagenulam contingenti. Vaſis metallici altitudo non ſuperet dimidiam altitudinem lagenulae. Cum vaſe metallico connexa ſit anſa GCDE, ſuſtinens arcum circuli ligneum HEI, in 170 gradus diuiſum, ita locatum, vt (1) centrum arcus coincidat cum puncto regulae, vbi filum eſt ligatum, (2) regula continuata ſupremam arcus extremitatem ſtringat, et (3) fili linei extremitas inferior lineam vnam ab arcu diſtet. Vt regula metallica adplicari poſſit quibuscunque corporibus electrificatis, firmetur ad extremitatem lamella metallica incuruata LK. Quodſi hoc inſtrumentum prehenſa anſa ad maſſam electrificatam adplicetur, lamella incuruata maſſam tangente, regula electrificabitur, et ob paruam regulae maſſam, electricitas maſſae maioris electrificatae vix inde electricitatis decrementum patietur, filum a regula repelletur, et gradus arcus circuli, quem verſus dirigitur, gradum electricitatis notabit. Remoueatur inſtrumentum et tangatur digito regula ex lagenula prominens, vix aliquid electricitatis reſiduum erit: adplicetur alii maſſae electrificatae examinandae, quae electricitatem maiorem vel minorem habet, quam prior maſſa habebat, et filum regulae reſpiciet alium gradum maiorem vel minorem. Hoc indice mihi nondum quidem vti licuit, attamen minime dubito, illum in multis occaſionibus in experimentis electricis commode adhiberi poſſe; praeſertim cum lagena Muſchenbrockiana

ele-

electricitatem per aliquot horas conſeruet. Quaecunque ergo phaenomena definire licuit, ea definita ſunt indice priori.

Propero nunc ad alteram diſſertationis partem, in qua phaenomena praecipua, quae indice deſcripto aliqua ex parte definiui, recenſere conſtitui. Docuit me index deſcriptus

1.) Corpus tritu excitans electricitatem diuerſum eſſe debere et ſeparatum a corpore recipiente electricitatem, ſi notabilis electricitas eſt producenda. Quodſi enim ex vna parte vitri electrificatorii homo in reſina ſtans, corpus recipiens electricitatem ex altera parte vitri recte ſuffultum tangit, ſiue machina et homo rotam agitans in reſina ſtent, ſiue non, vix paucorum graduum electricitas in maſſa electrificanda produci poteſt, ſi ſimplex electricitas excitatur, et ſi compoſita electricitas eſt impertienda maſſae, nulla electricitas tritu vitri electrificatorii producitur. Aliter ſe res habet, ſi corpus recipiens electricitatem ab eo, quod excitat electricitatem, ſeparatum eſt, et ab hoc non contingitur. Sic enim filum indicis cito eleuatur et ſcintilla vehemens oritur, ſi corpora ſeſe mutuo tangunt, neque tali tactu omnis electricitas ceſſat, ſed tantum debilitatur: plurium graduum electricitas reſidua obſeruatur, quae ſenſim decreſcit. Hoc fit ſiue machina et homo rotam agitans in reſina ſtent, quo caſu tamen electricitas difficilius excitatur, ſiue minus. Vehementia ſcintillae hic non augetur cum differentia electricitatum, vti alias, ſed potius maior eſſe videtur, ſi ſumma electricitatum eſt maior. An ergo hoc caſu particulae electricae materiae

magis ad corpora originariae electricitatis accedere debere facile intelligitur. Hinc etiam cognoſci poteſt ex indice, quae vitra ſint optima ad electricitatem producendam. Quodſi enim electricitas excitatur in maſſa quadam, et notetur tempus, quo a gradu certo ad gradum alium filum indicis deſcendit, et dein electricitate denuo excitata, et vitro examinando ſicco ad maſſam electrificatam adplicato, ita, vt ex vna parte maſſa electrificata, ex altera parte maſſa non electrificata infinita vitrum contingat examinandum; ſi notetur rurſus tempus, quo ab eodem gradu, quo in priori caſu, ad eundem gradum accedit filum indicis, inueniaturque tempus prius aequale eſſe poſteriori, vitrum deprehendetur ad electricitatem producendam idoneum; quodſi vero maius obſeruetur temporis ſpatium, ſaltem non ita bonae notae erit ac vitrum, quo excitata eſt electricitas. Hinc Celeb. *Ialabert* detexit, vitra electricitati tritu producendae inepta per communicationem electrificata dare lumen fulgentius, quam ea, quae electricitati tritu producendae aptiſſima ſunt. Facile etiam patet, ea vitra maximo cum ſucceſſu fulcimentis corporum electrificandorum inſeruire, quae per communicationem difficulter et parum electrificantur.

6.) Supra iam monui, indicem oſtendere, cum differentia electricitatum vehementiam ſcintillae augeri, ſi nempe homogeneae electricitatis ſint corpora; aliter enim ſatis vehementem ſcintillam produci monui, ſi nulla electricitatum differentia prodatur indicibus, nempe ſi excitans electricitatem in reſina ſtet, et non connexum ſit cum recipiente electricitatem. Cum differentia electricitatum vehementiam ſcintillae augeri, ſequenti ratione experiri

experiri licet. Electrificetur maſſa electricitate compoſita, et inſiſtat aliquis reſinae, tangatque maſſam electrificatam, ſcintilla vehemens orietur, et homo ipſe electrificabitur, filo parum ad regulam accedente. Remoueat manum idem homo, et rurſus adplicet, nulla mutatio indicis neque ſcintilla obſeruabitur, quia corpora aequali gradu electrificata concurrunt. Quo facto, excitetur maſſae electricitas rurſus, donec filum oſtendat priorem gradum, et dem homo reſinae inſiſtens et minori electricitate praeditus, quam maſſa electrificata, tangat maſſam electrificatam, ſcintilla erit debilior, quam primo caſu, vbi homo non electrificatus maſſam electrificatam tangebat et homo electricitatem maiorem nanciſcetur, quam priori caſu habebat. Excitetur tertio electricitas maſſae, donec idem gradus, qui initio erat, filo notetur, et idem homo reſinae inſiſtens, minori gradu electricitatis praeditus, tangat maſſam electrificatam, aliquanto minor ſcintilla orietur, quam praecedentibus caſibus, et homo maiorem rurſus electricitatem habebit, quam antea, differentiaque electricitatum inter electricitatem maſſae initio excitatam et hominis minor minorque euadet; hoc continuari poteſt, donec differentia electricitatum fiat aequalis nihilo, quo caſu nulla ſcintilla oritur. Tali ergo ratione ſatis patet cum differentia electricitatum ſcintillae vehementiam decreſcere. Vltimae enim ſcintillae ita paruae et debiles ſunt, vt non niſi in tenebris attente conſideranti appareant.

7.) Simplici electricitate fluida inflammabilia non niſi calefacta accendere potui; compoſita vero electricitate, ſi filum oſtendebat gradum trigeſimum, ſpiritum vini re-

lagenae, in reſina ſuſtentatae, et vibrationes electricas exercentis, materiae ſubtilis particulae contrario motu agitantur? et hinc, quando ſeſe contingunt, colliduntur aequalibus ferme celeritatibus, directionibus directe oppoſitis, et ita vehementem concuſſionem cum totali ferme electricitatis exſtinctione producunt?

Tab. VIII. Fig. 3. 3.) Edoctus ſum indice, alternatim ex vno corpore quaſi extrudi poſſe electricitatem in aliud corpus. Quodſi enim ex vtraque parte lagenae Muchenbroeckianae A B C, cuius fundi externa ſuperficies vaſe metallico B C D E armata eſt, in vitreo plano F G H I poſitae maſſae recte ex corporibus originariae electricitatis ſuſpenſae K L et M N adſint, indicibus ſimilibus et aequalibus O Q X R ac S V U W, et vna maſſa tangat regulam Z A lagenae Muſchenbroeckianae, et altera vas metallicum D E B C lagenam cingens, excitata in vna maſſa electricitate tritu vitri electrificatorii, eadem excitatur etiam in altera, quod indices produnt. Quo facto, ſi tangatur maſſa K L a vitro electrificatorio immediate electrificata, perit eius electricitas, et filum O P ſeſe regulae adplicat, et per momentum etiam filum indicis alterius S T ſe adplicat regulae ſuae, mox tamen reſtituitur electricitas in maſſa vltima M N, quod repulſio fili oſtendit. Quodſi nunc rurſus haec maſſa tangatur, filum indicis ſeſe adplicat regulae, et maſſa ex altera parte lagenae electricitatem nanciſcitur, quod filum repulſum oſtendit. Hoc ſine motu machinae, ſi electricitas eſt vehemens, alternatim vel decies fit ſine totali electricitatis extinctione. An hic infinitum corpus tollit motum particulis vitri, vel particulis electricae materiae, particulis

particulis vitri adhaerentis, impreſſum ab vna parte ſuperficiei lagenae, et facit, vt ex altera tantum parte ſuperficiei fiat? An reuera conceditur materiae cuidam tranſitus ex infinito corpore in corpus finitum per lagenae parietes electricitate affectos?

4.) Obſeruaui, maſſae maioris electricitatem durare diutius, quam maſſae minoris, ſi eodem filo metallico cum vitro electrificatorio iungantur: diuerſis enim temporibus filum ad regulam reuertitur. Tempora vero haec nulla ratione obſeruata ſunt in ratione maſſarum. Deinde cognoui, maſſae maiori electrificatae certam maſſam ſaepius adplicari poſſe, antequam tota electricitas exſtinguatur, quam minori maſſae eodem gradu electrificatae, ſummam tamen maſſarum, quae maioris maſſae electricitatem tollit, non eſſe multo maiorem, quam ſummam maſſarum, quae minoris maſſae electricitatem auffert, conſequenter ſummas has prorſus non eſſe in ratione maſſarum electrificatarum. An ergo, ob volumen materiae electricae agitatae in maiori maſſa maius, electricitatis decrementum tardius fit? hoc tum demum inquirere animus eſt, quando corpora magnae ſuperficiei adhibere licebit eiusmodi, quorum volumina materiae electricae agitatae facile definiri poterunt.

5.) Cognoui hoc indice, commode inueniri poſſe, quae corpora deriuatiuae electricitatis capacia ſint gradu vel maiori, vel minori; ſi adplicatis iis ad maſſam electrificatam et per corpora deriuatiuae electricitatis infinita ſuffultis, tempora acceſſus fili ad regulam notentur: quo enim minus eſt hoc tempus, eo magis ea ad corpora deriuatiuae electricitatis, et quo maius eſt tempus, eo

corpori excitanti electricitatem adhaerentes contrarium et directe oppoſitum motum nanciscuntur ei, quem particulae electricae materiae corporis recipientis electricitatem habent, vt actio mutuo occurſu particularum fiat vehemens et ſcintilla concrepans efficax. Idem confirmatur, ſi lagenae vitreae, cylindricae, tenuiſſimorum parietum, qualem Fig. 2. exhibet, ſicciſſimae ab homine reſina ſuffulto, vel non ſuffulto, ſicciſſima manu leuiſſimo ductu demulceantur quaſi. Virgae enim ferreae, ad quarum extremitates fila linea ſunt ligata, lagenis exceptae, electrificantur ita, vt fila ab iis repellantur, et ſcintillae ex iis concrepantes eliciantur.

Tab. VIII. Fig. 2.

Obtulit ſe mihi tamen phaenomenon, quod modo dictis repugnare videtur. Particulae argenti viui ſicci, per vitrei infundibuli pariter ſicci paruum foraminulum in lagenam vitream ſiccam tenuium parietum illapſae, et etiam a fundo vel ipſo argento viuo reflexae in parietes lagenae impingentes, producunt colliſione ad vitrum electricitatem, quae deriuatur in argentum viuum in fundo lagenae collectum et in regulam ferream, remoto infundibulo ope funiculi ſerici, in argentum viuum per orificium lagenae immerſam: filum enim lineum ex regula pendens repellitur, tactaque regula ſcintillae concrepantes oriuntur. Quodſi vero res bene conſideretur, guttulae argenti viui impingentes in parietes vitreos minime contingunt argentum viuum in fundo lagenae ſtagnans; hinc momento colliſionis particulae argenti viui, excitantes electricitatem, a particulis argenti viui, quae recipiunt electricitatem, ſeparatae ſunt. Simul intelligitur in atmoſphaera allapſu et colliſione par-

particularum deriuatiuae electricitatis ad particulas originariae electricitatis, has electrificari, et electricitatem ab iisdem cum aliis deriuatiuae electricitatis, ad eas attractis, communicari poſſe. Minime enim dubitandum, originariae et deriuatiuae electricitatis corpuſcula in atmoſphaera interdum magna copia et ita adeſſe, vt electricitas produci poſſit, cum reuera in ea electricitas cum maſſis rite ſuffultis communicetur, vti ex ſequentibus videbimus.

2.) Deprehendi regula lagenae Muchenbroeckianae indice inſtructa et electrificata imaque parte lagenae vaſe metallico armata, ſi aliquis in reſina ſtans lagenam manu ſuſtentet, et deinde ad regulam alteram manum adplicet, vehementem oriri ſcintillam et concuſſionem in vtroque brachio, fere nullam tamen electricitatem poſt concuſſionem in regula et in homine obſeruari. Filum enim prope regulam ferme ignauum pendet. Phaenomenon detexit *Franclinus*, naturalis electricitatis inuentor, absque indice adhibito, et totalem electricitatis poſt concuſſionem exſtinctionem fieri aſſeruit, quod ego non obſeruaui, ſed perpetuo in regula ſenſibilem electricitatem inueni, manu a regula remota, et lagena armata in corporibus deriuatiuae electricitatis poſita. *Franclinus* hic ſtatuit negatiuam electricitatem et poſitiuam, ſuperficiem lagenae e. g. externam negatiua electricitate et internam poſitiua electricitate gaudere, et ſi virtutes tales contrariae aequales concurrant, electricatatem fieri nihilo aequalem. Difficillimus mihi tamen videtur conceptus electricitatis negatiuae, niſi ſtatuatur, vti in mechanicis, motum materiae electricae, contraria directione factum, eſſe motum negatiuum. An ergo ex vtraque parte

 lagenae

rectificatum et Petroleum temperiei 75 graduum Therm. Far. vnica ſcintilla accendere licuit; vaſe nimirum metallico, cui infuſus erat liquor accendendus, iuncto cum fundo lagenae armato per filum metallicum, et corporis electrificati accendentis electricitate a ſuperficie liquoris duas lineas diſtante. Poterunt hinc particulae inflammabiles in atmoſphaera telluris natantes, ſcintillis electricis, ſi quae in illa generentur, accendi.

8.) Vapores aqueos ſubtiliſſimos non deriuare electricitatem ſenſibiliter, ſequenti ratione expertus ſum: Vapores aqueos ex Aeolipila emiſſos in maſſam electrificatam direxi, Aeolipila cum aliis deriuatiuae electricitatis corporibus, non ſuffultis corporibus originariae electricitatis, connexa, et fili directio non mutabatur ſenſibiliter. Neque vapores ex Aeolipila electrificata emiſſi electricitatem cum aliis in reſina poſitis ſenſibiliter communicarunt. Limatura martis mixta cum maſſa aequalis ponderis ex cera et reſina facta, et maſſa hinc formata cylindriformi, adplicata ad maſſam electrificatam manu, filum indicis non vidi notabiliter deſcendere; vnde iudicaui, corpora deriuatiuae electricitatis, niſi ſint contigua, non tollere electricitatem maſſae electrificatae ſenſibiliter; vnde nec vapores ſubtiliſſimi in aere hoc efficere poterunt. Intelligi ergo poteſt, cur corpora deriuatiuae electricitatis, originariae electricitatis corporibus ſuffulta in atmoſphaera, vaporibus grauida, electrificari poſſint.

9.) Inter plura corpora vna ſerie ſeſe excipientia ſucceſſiue interuallo temporis breuiſſimo ſcintillas concrepantes plures generari, ſequenti experimento edoctus ſum: Impreſſi maſſae ex cera cum reſina mixta clauu-

clauulos cum capitulis aurichalceis in diſtantiis a ſe mutuo minimis e. g. vnius quartae partis lineae, arbitraria ſerie, literam quandam vel aliam figuram repraeſentante diſpoſitos, et cum altero extremorum clauulorum ligaui filum metallicum tenuiſſimum cum fundo lagenae armato iunctum, cum altero vero filum metallicum ſimile cum maſſa electrificata connexum. Electricitate deinde excitata tanta, vt filum quadrageſimum gradum oſtenderet, iucundo ſpectaculo inter quemlibet clauulum ſcintilla cum concrepatione exhibebatur. Dum enim clauuli omnes ſibi mutuo vicini electrificantur praeter vltimum, qui corpus deriuatiuae electricitatis infinitae connexionis eſt, inter clauulum hunc vltimum et ei vicinum debet oriri ſcintilla; ita vero clauuli vltimo proximi electricitas perit: oriri ergo debet inter hunc et ipſi vicinum noua ſcintilla, et rurſus noua inter hunc et ſequentem, etc. donec omnes ſcintillae vsque ad clauulum vltimum generentur. Abſoluitur vero hic ſucceſſiuus ſcintillarum ortus breuiſſimo temporis ſpatio; hinc non mirum eſt, vt figura ex punctis lucidis ea ſerie ſe excipientibus, qua clauuli diſpoſiti ſunt, conſtans, repraeſentetur. Quodſi continua lux deſideretur: aliud quodcunque corpus deriuatiuae electricitatis infinitum clauulo adplicetur filo metallico, a fundo lagenae Muſchenbrockianae ducto, remoto. Serpentinum fulminis ductum ſimili ratione variis nubibus electrificatis concurrentibus generari concipi poterit, Index oſtendit

10) Vacuum ab aere ſpatium in tenebris lumine electrico facile impleri, quod ſequenti ratione obſeruari poterit. Tubum Torricellianum phoſphoreſcentem tabulae

ligneae adplicatum, quae ex ſerico funiculo ſuſpenſa erat, electricitate compoſita electrificaui, argento viuo cum maſſa electrificata, per filum ferreum, per lumen inferius tubi ſurſum hians mercurio immerſum, iuncto, ita vt filum ferreum ibi, vbi ingrediebatur tubum, lineam a tabula lignea diſtaret. Dum electricitas excitabatur, continua in vacuo tubi fulgura et mutum lumen abſque omni mercurii oſcillatione oriebantur in tenebris, ceſſanteque vitri electrificatorii motu, tacta tabula, quae inter tangendum lumen praebebat, aliquoties adhuc provocabantur. Quodſi vero non tangebatur tabula, interdum ſponte vel centies oriebantur fulgura in vacuo, interuallo temporis inter duo fulgura interdum centum minuta ſecunda ſuperante. Quin tacta maſſa compoſite electrificata, et indice gradum nullum oſtendente, lumen interdum in vacuo tubi ſiſtitur, indicio certo, nondum electricitatem maſſae prorſus exſtinctam, ſed reſiduam eſſe, quae vacuo tubi Torricelliani illuminando ſufficiat. Simplici electricitate fulgura in vacuo pariter producuntur, ſponte tamen finito vitri electrificatorii motu rarius apparent. Nonne etiam fulgura in rariori aeris regione abſque inſequenti Tonitru debili electricitate oriri poterunt? nonne item aurorae boreales? Index docuit porro

11.) Electricitatem catenae Longit. 66 pedum Lond. et ponderis 9 librarum hyeme decreuiſſe a gradu 45. ad gradum 0 quatuor horis, aeſtate vero electricitatem celerius exſtingui. Speraui etiam, me aliquam legem decrementi electricitatis ope huius indicis ſtabilire poſſe. Hunc in finem obſeruaui tempora deſcenſus fili maſſae ele-

electrificatae certo gradu et gradus deſcenſus. Initio videbar mihi obſeruare egregiam harmoniam, aſt poſtea repetito ſaepius experimento minime. Hoc ſolum animaduerti, filum motu, certa lege retardato, accedere ad regulam. Docuit index

12.) Maſſam quandam cum acuta extremitate rite ſuffultam in vicinitate corporis a globo electrificatorio immediate electrificati, ita, vt acuta extremitas corpus electrificatum verſus dirigatur, et ab eo plures digitos diſtet, electrificari. Senſim ſenſimque enim filum indicis tali maſſae adplicati aſcendit. Quodſi tollitur electricitas corporis immediate a globo electrificati, etiam ſenſim maſſae cum acuta extremitate electricitas langueſcit. Phaenomenon hocce et varia praecedentia ducunt nos ad naturalem electricitatem conſiderandam, quae phaenomenis allatis perpenſis, quomodo generetur, non difficulter intelligitur.

Electricitas haec naturalis nouiſſime detecta noſtra contemplatione digniſſima eſt. Oriri videtur in atmoſphaera colliſione particularum deriuatiuae electricitatis in corpuſcula originariae electricitatis, quae hac ratione electrificata cum aliis deriuatiuae electricitatis corpuſculis, nubes multitudine conſtituentibus, electricitatem communicant. Philadelphiae in America praedictus *Francklinus* ſagaciſſimus inexpectati phaenomeni proditor fuit, et nunc de rei veritate obſeruationibus paſſim in Europa euulgatis prorſus non dubitare licet, quilibetque, qui ferrum acutum ex ſerico funiculo ſuſpendere valet, vel vitro et reſina fulcire, de illa conuinci poterit. Suspicatus quidem erat iam anno 1735. Cl. *Gray*, qui inter primos

et praecipuos Phaenomenorum electricitatis inueſtigatores locum habet, lumen et ignem electricum naturam fulminis et tonitru habere, et Cel. Vinckler Lipſienſis tractatum edidit anno 1746, in quo idem demonſtrare laborauit. Imo obſeruationes quaedam remotiſſimis abhinc temporibus ſagacitatem naturalis ſcientiae cultorum praeceſſerunt. *Iulius Caeſar* de bello Africano Cap 47. deſcribit tempeſtatem quandam, *nimbum cum ſaxea grandine ſubito eſſe exortum*, *et pilorum cacumina arſiſſe* referens. Veriſimile admodum videtur, atmoſphaeram electrificatam cum cacuminibus pilorum communicaſſe electricitatem, vt iis lumen conicum caeruleum continuum adhaeſerit, quare ardere viſa ſunt. Huc etiam pertinere videtur locus *Liuii* Lib. XXII. Cap. 1. vbi dicitur, in Sicilia militibus aliquot ſpicula, et in Sardinia in muro circumeunti vigilias, equiti ſcipionem, quem manu tenuerat, arſiſſe. Principem locum, qui huc pertinet legimus in *Senecae* Naturalium quaeſtionum L. 1. vbi ſcribitur: *In tempeſtate magna apparent quaſi ſtellae velo inſidentes*, *adiuuari ſe tunc periclitantes exiſtimant Caſtoris et Pollucis numine.* Deinde: *Gylippo Syracuſas petenti viſa eſt ſtella ſuper ipſam lanceam conſtitiſſe. In Romanorum caſtris viſa ſunt ardere pila ignibus ſcilicet in illa delapſis, quae ſaepe fulminum modo animalia ferire ſolent et arbuſta, et ſi minore vi mittuntur defluunt tantum et inſidunt, non feriunt nec vulnerant.* Hic ignis forte concrepans electricus ab igne continuo cum ſuſurro diſcernitur, ille enim percutit et vulnerat, hic nullo modo.

Si-

Similis obſeruationis noſtris temporibus mentio facta eſt in nouis publicis: nimirum Academiae Pariſinae relatum eſſe, crucem turri templi Plauzatenſis in Gallia impoſitam ferream, cuius finis repraeſentant flores lilii extremitatibus acutiſſimis, tempeſtate denſiſſimis nubibus et frequentia fulminum terribili conſpicuam eſſe ita, vt iuxta quamuis extremitatem lux appareat, traditioneque bene longa 27 annorum conſtare, rariſſime fulmine damnum afferri vrbi et locis vicinis, ſi prope crucem lumen praedictum appareat. Idem ergo, quod remotiſſimis temporibus obſeruatum eſt, etiam recentiſſimis confirmatum videmus. Simili etiam confidentia praediti eſſe videntur ciues Plauzatenſes, ac nautae remotiſſimis temporibus, erant, qui, dum in tempeſtate lumina velis inſidentia obſeruabant, adiutos ſe exiſtimarunt. Nullum eſt dubium, ſi obſeruatio ciuium Plauzatenſium haec eſt vera, crucem turris Plauzatenſis ab atmoſphaera electrificatam corporibus originariae electricitatis ſuffultam eſſe.

Non minus afferri huc meretur illud, quod Cel. *Muſchenbrockius* Exp. 166. in Diſſ. de magnete ſcribit; nimirum aliquoties annotatum eſſe, fulmen prope Verſorium delatum huius directionem prorſus immutaſſe, ita vt polus ſeptentrionalis euaſerit auſtralis. Anno 1736 die 24 Iulii Vltraiecti Batauorum obſeruatum erat declinationem auctam fuiſſe 10. minutis, et a Cel. *Kraffstio* Tubingae an. 1745 die 31. Aug. obſeruatio notata confirmata, dum declinatio acus inter tonitrua et fulmina 15 min. diminuta fuit. Quantum mihi conſtat, ſcientiae naturalis amatoribus tunc temporis defuit

ſagacitas perſpiciendi, vel potius nondum auſi ſunt aſſerere, eiusmodi variationem acus magneticae electricitati in atmoſphaera productae deberi, quod mihi quidem nunc veriſimillimum eſt. Acus enim magnetica ordinarie fulcitur theca lignea ſicca, et lignum ſiccum inter corpora originariae electricitatis, ſaltem inter corpora deriuatiuae electricitatis minori gradu capacia, locum habet. Dum ergo inter fulmina, obſeruator declinationis acus ſe adpropinquare debet acui, fulmine electrificatae, attrahere debet acus extremitatem viciniorem; hinc acus directionem naturalem deſerere debet, niſi obſeruator exacte in plano iſto ſtet, in quo acus naturaliter quieſcit. Hic boni publici cauſa ſubiungere liceat, quomodo effici poſſit, vt acus magneticae directio in naui, inter fulmina et tonitrua vel electricitate naturali, non turbetur. Filum metallicum quodlibet praeter ferreum connectatur cum ſtylo acuminato, qui ſuſtentat capitellum aurichalceum acus, et ducatur ita, vt altera extremitas fili metallici contingat aquam. Tali ratione acus mutatur in corpus deriuatiuae electicitatis capax infinitae connexionis cum aliis ſimilibus, et electrificari haud poteſt ita, vt electricitas per notabile tempus conſeruetur, conſequenter nec directionem ſuam relinquere poterit, corpore non electrificato alio accedente.

Electricitas haec naturalis certe ita comparata eſt, vt non mirandum eſſet, ſi nonnulli attoniti magis et ancipites inſolitum hoc phaenomenon comtemplarentur, quam vt de circumſtantiis phaenomeni definiendis ſolliciti eſſent. Poſſet enim alios horror quidam naturalis, alios metus ab educatione generatus, ab alteriori inquiſitione deter-

deterrere. Hinc illae quaeſtiones oriuntur: vtrum obſeruationes eiusmodi abſque periculo inſtitui poſſint? et annon a corporibus materia fulminea electrificatis tremendus fulminis effectus produci, et periculum imprudentiſſima arte adduci poſſit? Iſte horror et metus, ſi auferri poteſt, certe non aliter fiet, niſi vt oſtendatur, obſeruationes eiusmodi abſque periculo inſtitui poſſe, et remedium afferri, ſi periculum adſit. Hoc vero, ſi remedio res non careat, efficere nemo poterit, niſi qui multis antea obſeruationibus et experientiis edoctus fuerit, cur et quibus ſub circumſtantiis fulmen periculoſum euadat. Patet ergo dari his nouiſſimis temporibus etiam Phyſicis occaſionem, qua fortitudinem quandam oſtendant, et in re ancipiti audaciam. Hinc cum mei officii ſit in res naturales, quantum in me eſt, inquirere, nihil me ab obſeruationibus eiusmodi abduxit; hinc nullam occaſionem omiſi, qua electricitatis naturalis phaenomena non ſolum obſeruare, ſed etiam aliquatenus definire liceret. Iam anno ſuperiori expertus eram ſine indice idoneo, effectum electricitatis naturalis. Hoc anno vero omnia praeparaui, vt ſub determinatis circumſtantiis phaenomena contemplari poſſem.

Elegi catenas duas ferreas longitudine 66 ped. Lond. et ponderis 9 librarum. Vtriusque catenae extremitatem alteram ex fune ſerico ad altitudinem 40 circiter pedum Lond. ſuper ſuperficiem fluuii Neuae ſuspendi, et omnia ita inſtruxi, ne pluuia humectarentur funes ſerici, et vti catenas commode dimittere et eleuare poſſem: alteram extremitatem debita cautione in conclaue, vbi obſeruationes inſtituere volebam, duxi, et fune ſerico cum clauo parieti

parieti infixo iunxi. Catenae vtrique adplicui indicem aequalem. Vnius catenae extremitati virgam ferream cum acuta extremitate coniunxi, obſeruauique

1) Electricitatem maiorem communicatam cum catena, cui virga cum acuta extremitate erat coniuncta, quam cum altera. Catena abſque virga acuta propter domicilium, ſuper cuius tegmine ex palo ſuſpenſa erat, in variis aedificii partibus ad funiculos ſericos alligata erat, vt hinc et inde anguli orirentur. Ne ergo obiici poſſet, non obtuſam extremitatem in culpa eſſe, ſed directionis multiplicem mutationem, cur hoc caſu electricitas debilior orta ſit, quam eo, cum catenae ſuperioris extremitas cum virga ferrea acutae extremitatis coniuncta erat, alia occaſione virgam cum acuta extremitate a catena, cui adplicata erat, remoui, et cum altera coniunxi, cuius extremitas antea obtuſa erat. Euentus autem obſeruationis erat idem, qui ante, et rurſus catena cum obtuſa extremitate electricitatem debiliorem nanciscebatur. Suborta eſt ſuſpicio noua, nimirum differentiam altitudinum paruam in culpa eſſe poſſe, cur diſcrimen praedictum adſit; hinc catenam cum virga acuta de induſtria ad paulo minorem altitudinem dimiſi, et nihilominus electricitas huius catenae maior obſeruabatur, quam alterius. Acutum corpus citius electrificari, quam obtuſum ex artificialis electricitatis phaenomenis ſatis intelligitur. Quodſi enim corpus acutum recte ſuſſultum voluminі materiae electricae agitatae corporis arte electrificati immerſum eſt, et cum acuta extremitate corpus electrificatum verſus dirigitur, electricitas corporis electrificati decreſcit, et corpus acutum propinquum electrificatur.

Quodſi

Quodſi cum obtuſo corpore idem fit, electricitas corporis electrificati tardius decreſcit, et corpus obtuſum difficilius electrificatur. Hinc non dubitandum, virgam ferream acutam recte ſuffultam corporibus originariae electricitatis et atmoſphaerae electrificatae expoſitam immerſam eſſe volumini materiae electricae agitatae, quae nubem electrificatam virgae vicinam cingit.

2) Obſeruaui catenae electricitatem non augeri ob eius longitudinem. Adhibui 130 pedum Lond. catenam; electricitas tamen non erat maior, quam catenae 66 pedum.

3) Vidi, electricitatem naturalem manere interdum integram per quartam ferme horae partem, licet ſaepius interea temporis tangeretur catena; et Vir Ampliſſimus Lomonoſow obſeruauit ſine omni tonitru et fulmine electricitatem inſignem communicatam eſſe cum ferro recte ſuffulto.

4) Dum tonaret, electricitatem productam vidi diminui et interdum ceſſare, ita, vt filum indicis regulae adhaereret. Hoc etiam Berolini a Cel. Ludolffo obſervatum eſt praecedenti anno, et quidem electricitatem proxime ante fulmen fuiſſe maximam et fulmine producto diminutam, interdumque prorſus exſtinctam. Obſeruaui

5) cum ipſo fulmine et tonitru electricitatem catenae ortam eſſe, et poſt fulmen et tonitru ſubito minutam: dum hoc fieret ſimul notaui, decreſcere electricitatem catenae creſcente numero minutorum ſecundorum inter fulmen et tonitru. Cum enim numerus minutorum ſecundorum erat 6, filum reſpiciebat 30. gradum, cum

erat 9; filum notabat 25. gradum, cum erat 11. filum prope 20. gradum erat, et cum tandem erat 14, filum haerebat circa 10. gradum.

6) Electricitatem cum ipſo fulmine et tonitru productam poſt fulmen et tonitru auctam eſſe.

7) Inter fulmina ſplendidiſſima absque tonitru, quae ſpatio duarum horarum ſat frequenter ſeſe excipiebant, nullam electricitatem cum catena communicatam eſſe, et filum indicis iners regulae adpenſum manſiſſe. Simulac vero tonare incipiebat, eo ipſo momento filum indicis ad gr. 25 eleuari, et deinde ſenſim rurſus deſcendere.

8) Maximum gradum, ad quem naturalis electricitas filum indicis eleuauit, fuiſſe 30 graduum.

Poteſt ergo 1) absque omni tonitru et fulmine catena electrificari, et electricitas haec per multa minuta eadem virtute manere. Poteſt 2) cum ipſo fulmine et tonitru electricitas catenae minui vel ceſſare, et proxime ante fulmen maxima eſſe. Poteſt 3) cum fulmine et tonitru electricitas catenae oriri, et deinde vel per multa minuta in eadem virtute perſiſtere, vel fulmine facto ſubito rurſus diminui, vel ceſſare. Tandem 4) non videtur repugnare inter fulmina et tonitrua ſaepius nullam electricitatem produci. (*)

Ponas enim catenam nondum eſſe electrificatam, poteſt 1) virga ferrea cum acuta extremitate nubis electri-

(*) Poſt diſſertationem hanc Academiae traditam contigit mihi electricitatem naturalem die 11 Iulii obſeruare; et ſuſpicionem notatam ipſa experientia confirmatam videre. Dum enim inter fulmen et tonitru 8 min. ſec. numerarem, filum indicis reſpiciebat gradum 25, dum numerarem 24 min. ſec. debilis valde electricitas erat, et dum 40 min. ſec. numerarem, electricitas nulla obſeruabatur.

electrificatae volumini materiae electricae agitatae immerſa eſſe; quo caſu neceſſe eſt, vt virga ferrea absque omni fulmine et tonitru electrificetur, ſi nimirum nulla nubes maiori vel minori gradu electrificata ad nubem illam accedit, cuius volumini materiae electricae agitatae virga ferrea immerſa eſt, quo facto ſcintilla concrepans et inflammabilibus materiis praeſentibus inflammatio, et interdum etiam tonitru obſeruari deberet. Ita enim artificiali electricitate electrificatur virga ferrea, ſi recte ſuffulta eſt et ſphaerae actiuitatis corporis electrificati immerſa, ſine omni ſcintilla concrepante praecedente: neque mirandum eſt hoc caſu filum indicis per inſigne temporis interuallum oſtendere eundem gradum.

Poteſt 2) eadem virga ferrea extra ſphaeram actiuitatis nubis electrificatae exiſtere; quo caſu nullam electricitatem filum indicabit. Ponatur autem

3) adpropinquatione diuerſarum nubium inaequaliter electrificatarum oriri ſcintillam concrepantem, et inde fulmen et tonitru, poteſt hinc ſubito augeri radius ſphaerae actiuitatis nubis, vti virga ferrea eius ſphaerae actiuitatis immergatur, et ita ſubito poteſt electricitas oriri. Hoc poſito ſi medium eſt ſiccum et originariae electricitatis, quod catena electrificanda contingit, poteſt electricitas per aliquod temporis ſpatium in eadem intenſione perſiſtere. Quodſi vero medium eſt humidum, et ita adpropinquat ad indolem corporum deriuatiuae electricitatis, poſſunt fulcimenta catenae facile humectari, et ita tota catena breui in corpus deriuatiuae electricitatis infinitum mutari; vnde non mirum, ſi electricitas catenae ſubito decreſcit. Poteſt vero etiam radius

ſphaerae actiuitatis minui, ſi nimirum ad nubem certo gradu electrificatam virgae viciniorem altera minoris electricitatis accedit; ita enim ſphaera actiuitatis contrahi debet. Tantum ergo abeſt, vt virga tali ratione electrificetur, vt potius magis recedat a virga cauſa electricitatis.

4) Tandem poteſt fortaſſe ſcintilla electrica in atmoſphaera fulmen et tonitru generare, et ſphaera actiuitatis nubis electrificatae tamen virgam non contingere, quo caſu inter fulmina et tonitrua nulla electricitas obſeruari poterit. An hoc interdum eueniat, aſſerere nondum audeo.(*)

(*) Poſt obſeruationes d. 11. Iulii aſſerere audeo: dum 40. min. ſec. inter fulmen et tonitru numerarem, et electricitas nulla obſeruaretur, nubes electrificata tantum diſtare debuit a catena, vt radius eius actiuitatis ad catenam non pertingeret.

PHYSICA

PHYSICA.

ABRAHAMI KAAU BOERHAAVE

DISSERTATIO
DE
COHAESIONE SOLIDORVM
IN CORPORE ANIMALI.

Dum viuimus, partes corporis noſtri ſunt in ſtatu ſemper violento, contractae quippe firmae extendi debent, extenſae vero ſunt iterum contrahendae; vnde illis contentae fluidae comprimuntur et relaxantur alternatim. Firmat hoc cordis ſyſtole et diaſtole, vaſorum omnium oſcillatio perpetua, motus deinde humorum atque horum, prius permiſtorum, ſeparatio ſubtilis. Habet haec viciſſitudo rationem, momentanea in partibus, reſpectu actionum, ad propriam ſtructuram. Hinc minima vaſcula, dum extenduntur a ſubtiliſſimo fluido, determinata vi impulſo, renituntur, ratione inuerſa diſtendentis, per virtutem ſibi, vti in maioribus, appropriatam. Quo ergo momento vis extendens minuitur, augetur contractilis, et illud, quod vaſa dilatat, haec reprimendo pellunt et propellunt, iterum momento ſubſequenti extendenda per fluidum, vi emboli cordis impulſum. Actio haec a principio motus, per vitam, durat alternatim, et, ratione aetatis, valida; vt, quantum ſit, corpus vix maneat

oculi

oculi nictu plane in ſtatu eodem. Hoc ita ſpeculatus Hippocrates, ideo actuoſum circulo ſimile, in quo idem principium et finis eſt vnus (*a*), pronunciauit conſtare continentibus, contentis, et eo, quod in haec facit impetum (*b*). Sunt ſolida, fluida, eorumque motus in ſe inuicem. Et certe qui, praeter haec tria memorata, quaerit in illo quartum, laborabit fruſtra. Eſt etenim determinata ſolidorum cohaerentia, cum oſcillatione definita, cauſa vitae ſola, eſt eadem ratio vnica ſanitatis non modo, ſed certi cuique proprii temperamenti et longaeuitatis: dum quippe debito tono et iuſto ordine agit in humores, haud alia poteſt in ſingulis operari, quam vt ſint ſuo quaeque loco praeſentia talia liquida, quae in certum vſum a Creatore praefinita, neceſſaria, eaque ſana ſecreta, in ſolida reagunt. Natura etenim a nemine edocta efficit omnia, quae conueniunt, abſque vlla diſciplina (*c*).

Ita interim minorum partium, quae iunctae maiores compoſitas conſtituunt, elementa prima cohaerent in fluidis aeque, ac in firmis, vt ad certam diſtantiam recedere, et ad ſe inuicem accedere iterum, valeant. Eſt haec in variis conditio diuerſa, vt patet comparanti in oculo expanſam nerui optici ſubſtantiam medullarem, pulpoſam nempe retinam, cum aortae initio, vbi corde egreditur, cuius tamen illa, ſicuti reliqui nerui, continuatio eſt et finis. Eſt eadem res in fluidis euidens ex ſpeculatione ſanguinis, qui in maximis vaſis et corde permiſcetur, atque contemplatione laticis illius, qui, ex eo ſecretus tenuiſſimus, de corpore exhalat.

Prima

(*a*) De locis in Homine, in principio. (*b*) Epidem. Lib. VI. Sect. 8.
(*c*) Hippocrates de alimento.

Prima interim elementa, quae partes ſolidorum et fluidorum omnium minima conſtituunt, videntur, quousque ſenſus percipiunt, plane immutabilia, ſimpliciſſima, adeoque in hominibus non modo, in cunctis animalibus et plantis, ſed in omnibus forſitan ſemel creatis, prorſus eadem. Corporum omnium generatio, incrementum, horum in partibus ſolutio, et in toto cohaeſionis deſtructio, eorumque in alia tranſitus, denique rerum Vniverſi per ſex mille et vltra annos, immutata et conſtans, ſed toties renouata, facies hoc firmant argumentum. Ex vnoquoque vegetabili, ex omnis animalis quacunque corporis parte, combuſtis, collapſi cineres, lege artis vexati, vt ab omni omnino adhaerente alieno liberentur, dant meram Terram, Chemiſtis Virginem dictam, nullo ſenſuum inter ſe, vel ab alia, diſtinguendam. Haec nec aqua ſoluitur, nec fluit ad ignem, ſed fixa perſtat prorſus et immutabilis: id norunt Docimaſtae, qui absque notabili vlla omnino differentia, ex vtraque cupellas, ad aurum et argentum explorandum, conficiunt, ſummam ignis torturam perferentes. Haec ſingulis plantis, omnibus animalibus, cuique homini, omnibus forſan creatis corporibus, denique et horum partibus diuerſis, fulcrum dat et rei ſtabile principium. Quae ergo in ſtructura, fabrica, et actione ſolidorum, tanta obſeruatur, diuerſitas pendet vnice ab alia elementorum ſimpliciſſimorum adunatione. Quo etenim in corpore animali vel vegetabili partes ſunt firmiores, eo plus ſolidi exhibent ſub eodem volumine. Os vnius librae, combuſtum, dat longe maiorem copiam purae Terrae, quam muſculus eiusdem ponderis. Molle

 cere-

cerebrum, tantae in homine molis, a membranis liberum, fere totum diffluit. Quo ponderoſius et dure magis compactum lignum eſt, eo plus cinerum exhibet ſub forma cum leuiori ſimili. Quo ergo partes ſunt in corpore magis ſtabiles, eo propius ſibi iuncta habent elementa prima, ita tamen, vt vnum alterum directe non tangat, ne rigiditas perfecta oriatur, ſed remota ad certam diſtantiam, quam implet molle vinculum interpoſitum, quod Gluten vocamus, in ipſis ſicciſſimis partibus aquoſum vel oleoſum deprehendendum, licet non ſtatim ſenſibus occurrat. Oſſa, cornua, vngulae, dentes, pili, ſericum, animalium, a longo tempore exſiccata; pudibundae herbae aridi ſtipites per annos ſeruati, dant in deſtillatione copiam aquae, copiam olei, cuius vtriusque adeo in adunandis ſicciſſimis et ſubtiliſſimis particulis vis eſt ſtupenda: hisce orbata priſtinam formam quidem retinent, ſed libero aëri expoſita diutius, vel igne aperto combuſta, collabuntur in cineres albos, qui meram terram deſcriptam ſuppeditant. Et latet eadem in fluidis mira adeo, vt animalium limpidiſſimi et tenues, ignis vi de humoribus expreſſi, ſpiritus alcalini, terram gerant elementalem, eorumque et vegetantium olea, ſaepius de puro vitro repetita deſtillatione cohobata, eandem in fundo deponant, facta ipſa volatilia (*a*).
Interim

(*a*) H. Boerhaave El. Chem. Part., I. pag. 637. et Boyleus de Mutabil. Princip. Interim an omnis illa terra, quae puriſſima, poſt tot deſtillationes, colligitur, primo permiſta haeſerit in oleis ſtillatitiis et animalium ſpiritibus alcalinis, dubito. Nonne potius aliqua pars ex puluere aëris accedit, dum toties vaſa et excipula mutantur? Conferantur ea, quae ſcripſit H. Boerhaave de aqua pluuia, coelo delapſa et cautiſſime recepta, deſtillata deinde. Loc. citat. pag. 627 et ſeq.

Interim prima haec ſolidorum elementa, aeque ac gluten, quod illa iungit intermedium, prius haeſerunt in liquidis, cum illis mota fuerunt, tandemque ex iisdem ſubtiliſſimis ſunt ſecreta. Id incremento patet. Ex dactyli ſemine foecundae terrae commiſſo, per ſenſim allabens hauſtumque pabulum extenſo, ſurculus, ex ſurculo annoſa producitur quercus. Homo adultus athleticus fuit vix viſibile ſtamen, quod, niſi a liquido, cui innatat, ſuſtentetur, in mucum informem collabitur. Stamen hoc vtero materno conceptum, de momento in momentum increſcit, vt poſt nouem menſes foetus naſcatur, duodecim et plurium quandoque librarum. Ex ouo, a gallo foecundato, ex ſimili principio, vix ſemigrani ponderis, intra viginti et vnum dies, pullus procedit, oſſibus et ſolidis partibus firmus. Fit tale continuum augmentum, dum atomus ſenſim alteri, iam ſecretae et cohaerenti, apponitur, illique per intermedium, eodemque apparatu elaboratum, gluten adnectitur. Liquidum autem ſecernenda vehens, a corpore matris prius praeparatum, datur foetui, atque per eiusdem corpusculi vascula, omnem non modo ſenſum, ſed omnem conceptum humanum, ſubtilitate ſua ſuperantia, vlterius perficitur ante ſecretionem. Fit idem in pullo, dum, dato tempore, albumen per incubatum attenuatum, intra corpusculum in ſolida et fluida conſumitur. Idem in inſectorum ouis, vnde minimae erucae prodeunt, exilitate ſtupendae, obtinet. Pergit eadem actio poſt natiuitatem, peregrina ingeſta commutans in naturam propriam, per incrementum ad ſtatum, et ab hoc per decrementum ad mortem, apponendo nutriens, augens,

inſtaurans, irrorans, dum in locum illorum, quae omni momento per vim vitae et humorum impetum abraſa vehuntur eliminanturque, noua ſecreta reponit.

Varietas interim, quae in diuerſis corporibus, et partibus eiusdem aliis, aliaque aetate in iisdem, tam notabilis obſeruatur, non ipſa dependet ab his ſecretis ſolidis, quae in omni videntur corpore prorſus eadem: ſed eſt gluten coniungens, quod laxiori, vel ſtrictiori, vinculo elementa prima adunans, in infantia mollitiem, in ſtatu robur, in ſenio rigiditatem, facit. Quo etenim hoc tenuius et magis extenſile partes conſtituentibus elementis interponitur, eo facilius haec a ſe inuicem recedunt, ſuperata, ratione extenſionis, vi vitae adunante, oriturque mollities maior, flexibilitas, laxitas et debilitas, in compoſitis. Quo idem facile compingendum, craſſius, tenacius, et magis plaſticum eſt, eo robur, rigiditas, et elaſticitas, notabiliora ſunt. Hinc partes molles et tenaces facile, prius extenſae, contrahuntur, oſſa duriora vix elongantur aut flectuntur ſine diſſolutione. Differentia haec euidentiſſima eſt inter muſculi eiusdem partem carnoſam et tendineam, quarum ſunt fibrae non modo numero eaedem, ſed et aliis continuae.

Videtur autem gluten hoc (vti poſtea apparebit clarius) in omnibus idem, ſed in diuerſis partibus, et in iisdem alia aetate, per variam ſolidorum oſcillationem, et ab aucta ſenſim reſiſtentia eorumdem, diuerſimode compactum. In infantia tenue, firmius in iuuentute, in ſtatu corporis magis validum, tenax in ſenio, ex ſubtili allabente liquido conficitur ope partium, quae firmae reagunt, ſeparatae prius ex ſimili fluido, ſimilique

glutine

glutine iunctae. Hiſce interpoſitum illud retinet indolem, quam in maximis, et per decrescentiam variam inde in minimis, quae ſub ſenſus noſtros cadunt, plaſticam notamus, glutinoſam, mucoſam, ductilem, ſaponaceam, oleoſo-aquoſam, hinc mora et motu compingendam, adeoque in piceam quodammodo naturam mutabilem: ſicuti hoc in reliquis oleis obtinet, ſiue preſſa fuerint ex vegetabilibus, ſiue deſtillata ex iisdem, vel animalium humoribus. In plantis, quae tantam cum corpore animali analogiam habent, res euidentiſſima eſt. Sol quippe, calore et motu, in his olea limpidiſſima, ſpiritu rectore ſubtiliſſimo ſuaue-olentia ita inſpiſſat, vt in terebinthinam tranſeant, quae, aeſtu magis excocta, mutatur in reſinam: vnde Bohnius(*a*) aliique putauerunt, hanc ex oleo condenſato componi, rurſumque eandem liquefactam oleum conſtituere. Phaenomena porro, quae obſeruantur, dum vltimum vinculum in parte quacunque animalis vel vegetantis deſtruitur, reliquis, quae interpoſita prius eandem retinent et conſtituunt, coctione prius ablatis, dicta vlterius firmant. Dum quippe in aëre libero illa comburitur, primo nigreſcit, tumque ex illa exſurgit ſimul fumus ater, deinde piceus, foetens magis et denſior, quo flamma ipſi propior eſt, quae, vno ictu profiliens, foetorem minuit et fumum tollit, ſolo tamen in apice eiusdem ſuperſtite fumulo, qui chartam ſuprapoſitam atra, pingui, inflammabili fuligine inquinat, claro documento, quod flamma ſit fumus accenſus, fuligo vero fumi pars non accenſa, auolans de flamma, quae conſumendo pabulum phlogiſton

 ſenſim

(*a*) Diſſert. Chemic. pag. 29. 319. 326.

ſenſim minor fit, et tandem extincta quiescit. Tum pars combuſta albeſcit, quodque ſupereſt adhuc de nigro, ſcintillae corruſcantes, lambendo fauillas, et circumambulando conſumunt, dum illa priſtinam formam retinet et figuram, ad minimum tamen attactum collapſa in cineres albos, inodoros, fere inſipidos, qui ſalini, aquoſi, vel oleoſi, nihil exhibent, aſt calcis quaſi exuſtae leuiſſimum ſaporem imprimunt aquae incocti, atque exſiccati terram ſuppeditant virginem, iam ſupra notatam in omnibus eandem. Fumus interim et flamma, dum de corpore combuſtili exhalant, ſecum rapiunt aeque materiam terreſtrem ignis actione aperta in aëre libero volatilem factam, quam ſpiritum, aquam, oleum et ſal. Docet id fuliginis analyſis(*a*). Blandiſſimos interim oleoſo-aquoſos in corpore animali humores, motu et calore ita condenſandos, tandemque in ſolida mutabiles, horum contemplatio docet, et euidentiſſimum eſt ex conſideratione Lactis, quod in ſe habet materiem omnium partium firmarum et fluidarum, quae corpus humanum, ſucceſſiue ab ortu ad interitum, conſtituunt; adeo quidem, vt eo nutriatur non modo Infans, ſed increſcat et ſuſtineatur omne animal galactophorum, per pro-

(*a*) H. Boerhaave Elem. Chem. Part. 2. Proceſſ LXXXVIII. Sed eadem, quae mox notaui de terra in humoribus animalium poſt repetitas deſtillationes deprehendenda, hic etiam locum habent. Flamma etenim, dum adſcendit, et Fumus dum aterrimus voluitur ad ſupremum elati camini cacumen, multum inuoluit de puluere aëreo, illum tranſiens. Dumque Fuligo affigitur lateribus camini, rapit flocculenta ex aëre, et ſuſtinet, iisdem affixa, particulas terreſtres volitantes, a quibus ante deſtillationem non prius depuratur.

proprium corpus confecto, mas ſit vel foemina, virgo aeque et ſterilis, nunquam puerpera (*a*), quam mater nutrix. Hoc recens mulctum, blandiſſimum, in calore hominis ſani breui aceſcit, et, ſponte ſua, ipſum quieſcens, partem pinguiorem, cremorem dictum, reiicit ſurſum, qui ſubactus condenſatur in butyrum ranceſcens. Certo caloris gradu idem exhalando format in ſuperficie ſua pelliculam, toties renanſcentem ſolidam, dum auſertur: cui non illepide Veteres renaſcentem in corpore humano cuticulam comparant. Si vero eidem lacti coagulum, de ſucco ventriculi ruminantium paratum, aut acidum quodcunque, commiſcetur, tum abit in vnam, aequabilem, ſciſſilem, maſſam, quae in ſerum ſecedit et coloſtrum, quod vltimum ſumma vi intra denſum linteum compreſſum, caſeum format pinguem et blandum, qui tractu temporis acerrimus fit et alcaleſcens. Si vero prius a cremore ſuo, ſurſum reiecto, lac priuatur, atque defloratum eadem deinde ratione tractatur, tum caſeum dat, qui ſciſſilis, aetate, cornu inſtar, dureſcit, atque igni admotus, perfecte ac illud lenteſcit, vſtulatur, et cum ſimili foetore comburitur. Sic ex liquidiſſima et blanda adeo lactis materie, vt oculo inſtillata nullum dolorem imprimat, contra eundem leniat, fit coagulo et motu durum, ſolidum, aetate acre adeo, vt linguam, os, et fauces, inflammet. Vti hoc in mulcto extra corpus obtinet, idem fere fit in viui corporis humani vaſis mammae galactophoris, quoties ibi-

(*a*) H. Boerhaave Elem. Chem. Part. 2. Pag. 297. No. 9. et Inſtitut. Medic. § 690. Ad quem vide compilationem Auctorum affirmantium in notis Halleri.

ibidem lac a cauſa qualicunque coagulatur, abeuns cum ſtillicidio ſeri tenuioris per papillam, vel et eiusdem reſorptione per venas inbibentes, in craſſamentum, ex quo durities naſcitur et tumor; vnde inflammatio, ſuppuratio, vel ſcirrhus oritur et cancer, quod, vlceratum et apertum, virus fundit horrende adeo corrodens, vt omnia, quae attingit, exedat. Notamus inſuper, tenuiſſimos corporis noſtri humores, ex vltimis arteriolarum, forſitan et neruorum, oſculis ſecretos, dum ſtagnant quocunque loco in cryptis, inſpiſſari ſenſim calore ipſius corporis, et breui fieri glutinoſos et gelatinoſos, tandemque ſolideſcere. Narium mucus, oculorum externus et palpebrarum humor, aurium cerumen, adeo ſubtiliter ſecreta, craſſeſcunt non modo, ſed in lemas coriaceas ductiles concreſcunt. Calculi ſolidi naſcuntur vbique in corpore, appoſitione particularum, quae ſenſim ex humoribus, prius de ſero et lympha ſanguinis ſeparatis, ſecernuntur.

Conſtat ergo, fluida in corpore animali per motum et calorem, reſorptu et difflatu tenuiſſimi laticis, fieri ſolida, ſiue externum aërem attingant, ſiue ab eodem occulta arceantur, idque fieri naturaliter et citius, quo ſunt ſubtiliora ſecreta de prius commiſtis. Secundo patet; prius ita ſecreta ipſa inorganica, partes organicas componere, vt iterum de tenuiſſimis humoribus ſibi ſimillima ſolida ſecernant, et ſecretis prius apponant. Docet hoc nutritio et incrementum, vnde roboris et rigiditatis cauſa patula eſt. Affirmatur inſuper incubatu oui, eiusque ſeri analyſi chemica.

Obſeruamus autem, quod firma quaecunque, organica, quousque in illa ſenſus penetrant, conſlentur

fibris

Fibris. Firmas voco in corpore animali partes organicas, quae ex vltimis ſolidis, ratione modo dicta ſecretis, glutine intermedio connexis, cum debita flexibilitate conſtituuntur, quaeque, poſtea iunctae, caua continentia efficiunt coërcentia, *τὰ ἔχοντα* Hippocratica. Ex elementis terreſtribus, antea notatis, iuxta longitudinis directionem glutine adunatis, fit Fibra ſimpliciſſima, conſideranda vti linea geometrica latitudinis expers. Eiusmodi fibrae plures, iuxta ſe inuicem molliter iunctae, faciunt Membranam ſimpliſſimam, quae conuoluta, vt linea ordine vltima, concurrens cum prima, eidem iungatur per longitudinem, efficit Canalem minimum, ex quo cum ſimilibus agglutinato Membrana, et ex hac, eadem ratione conuoluta et concreta, Vas ſecundi ordinis exſurgit.

Eſt in maioribus, quae partes inter ſe molliter ita connectit, vt accedere, recedere, et ſupra ſe inuicem lubricae moueri poſſint, Tela Celluloſa. Eſt eadem, quae in minoribus ſenſim ſubtilior, ſubtiliſſima deprehenditur in iſtis, quas ſenſus noſtri minimas diſſolubiles notant, partibus; vnde eandem in vltimis obtineri, concludimus; quoniam ex minimis maiores, et ex his maximae partes, illis ſimillimae, vbique in corpore, conſtant, ſimili ratione actuoſae. Sententiam hanc firmat ortus huius telae, qualem deſcripſi (*a*), ſuſpicatus, fieri hanc ex gelatinoſo et plaſtico humore agitato, quae placuit et aliis recipitur (*b*): cumque illud, quod continetur huius telae cellulis, omnium minimis per ſenſus

(*a*) Nouor. Comment. Petropol. Tom. I. pag. 372. (*b*) Haller Prim. Lin. Phyſiolog. §. XV.

noſtros, artis adminiculis adiutos, perceptis, ratione partium nectendarum extenuatum, apparet ſimillimum illi, quod copia in maioribus et maximis aggregatur, motu magis valido condenſatum, non adeo vana eſt concluſio, quod hiſce ſimillimum, aſt longe iterum ſubtilius, continuo, ſed debiliori et appropriato, motu elaboratum ſimpliciſſimas omnium fibrillas, imo et harum elementa ad ſe inuicem retineat, quo partes, nobis nulla diſſolutione diſtinguendae, ſenſim decreſcunt. Certe notamus, quod omnia minima, aeque ac maxima, absque vlla confuſione, diſtincta ordinantur ita, vt nusquam in corpore, alteri impedimento ſint. Fibra, quae noſtris ſenſibus apparet minima diſſoluenda, deprehenditur cum ſimili ſocia iungi iuxta longitudinem ſolam, interventu celluloſae dictae telae tenuiſſimae. Hoc accuratiſſima ſpecilla attento demonſtrant. Sed vltima haec diſſoluta nobis fibrilla, capillo humano decies et vltra tenuior, iterum conſtat fibrillis longe ſubtilioribus, non facile arte diſſoluendis, ſed, ope acuti microſcopii, viſus acie diſtinguendis, inprimis quando, vel leniter dilacerando, vel ſiccitate obiecti, diſſiliunt, crispantur; et ita in arcum ſolutae flectuntur; tum quippe in his, ac in maioribus compoſitis, eadem apparet coniunctionis directio longitudinalis: ſuntque inſuper leuiter hirtae. Vnde concludere auſim, quod minimae omnium non diſſolubiles, quae memoratas vltimas, non diſſolutas, iterum conſtituunt, ſeſe habeant eadem ratione directionis, ſimili vinculo retinente coniunctae. Interim in oſſium ſtructura (quod obiter moneo) aliquid mihi obſcuri manet, cum pro certo definire non poſſim vllo

artificio

artificio, vel ope acutiſſimi ſpecilli, vtrum fibrae, quae iunctae membranas oſſeas componunt, nectantur cum vicinis interuentu lamellarum, quae diſtinctae et peculiares ſunt, an vero fibrae ipſae, in longitudine ex diuerſis interruptis adunatae, retundantur inflexae, ſicque ſtratum oſſeum ſuperius cum ſuppoſito agglutinantes, interſtitia celluloſa forment; etſi hoc, quam illud, potius apparere videatur. Affirmo tamen, et in diuerſimode praeparatis animalium variae aetatis oſſibus demonſtrare poſſum, quod lamellulae, quae transuerſae in cranio tabulas iungunt, et ita inter has diplöen vulgo dictam conſtituunt, vti et illae, quae in oblongis oſſium extremis fibras a ſe inuicem diſtantes nectunt, et cum his ſpongioſitatem latam efficiunt, nunquam easdem perreptent; ſed quod inflexae vtroque ſuo extremo nectente cum lateribus oppoſitis fibrarum longitudinalium confluant, atque ita cellulas diſtinctas, ſingulares, fornicatas, faciant. In cartilaginibus res eſt obſcurior: videtur tamen eadem eſſe in illis, quae poſtea, dum partes conſtituentes magis indurantur, in os tranſeunt. In mollibus vero partibus, vti muſculi ſunt et membranae, in ſtrato eiusdem ſuperficiei, vnicam modo, vt antea monui, iuxta ſolam longitudinem ſemper obſeruo directionem, magis minusue compactam, rectam vel inflexam; nec vnquam vidi, fibram cum ſimili, funis inſtar, contorqueri, aut ab hac diuerſa directione decuſſari; neque notare vsquam potui, quod fibrae neruoſae vel carneae, obliquae aut transuerſae, ambiant longitudinales, vel ita easdem interrepant, vt cum his intertextae reticulum forment, etſi per trigiuta fere annos,

a prima nempe iuuentute, partes animalium inquirendo incumbens, nullam fere neglexerim occaſionem indagandi muſculorum imprimis fabricam, ardua hac in re incitatus, oſtenſo fructu laborum laetiſſimo, ab iſtis Viris, quos ſummos in arte dedit bonum fortunatum Praeceptores. Horum memor monitorum cum dudum autopſia edoctus forem, deſiderari in muſculis decantatas fibrillas transuerſas, iam ante viginti annos explicui, quid ſit illud, quod errorem imponit (*a*). Deinde, toties repetita indagine certior de ſtructura, expoſui actionem muſculorum ſimpliciſſimam (*b*). Iam vero tot experimentis de nouo in diuerſis animalibus inſtitutis, aliorumque mecum conſenſu (*c*) iterum firmior, aio, eſſe non modo fibrarum in vno eodemque muſculi et membranae ſtrato decurſum vnum, ſimpliciſſimum, parallelum; ſed dari nihil, quod has vltimas ſolubiles et viſibiles cum ſimilibus directe iungit, niſi, iuxta longitudinem ſolam, telam celluloſam, quae euadit ſubtilior, et ſubtilius elaboratum, caeterum ſimillimum, continet humidum, quo ſenſim fiunt fibrae tenuiores. Secundo: arteriae et venae, diuiſae in minores minoresque ramulos, perreptant in omni puncto ſtrata fibrarum, pauciores in parte tendinea, quam carnea, notandae. Inter ſe rami et ramuli arteriarum per anaſtomoſes innumeras iterum confluunt et retia formant. Idem in venis obtinet. Deinde arteriae cum venis iunguntur per innumeras inſertiones, dum omnium minimae viden-

(*a*) Perſpirat. Hippocr. dict. §. 780. (*b*) Impetum Fac. Hippocr. dict. §. 294. (*c*) Haller. Not. c. in Comment. ad Inſtit. Boerhaauii §. 396.

videntur in ipſas fibras muſculoſas implantari. Tertio: nerui accedunt diſtributi in ramulos tenaces, qui cito oculum optime armatum prae ſubtilitate ſugiunt, vnde horum indagatio obſcurior et difficilior eſt, nec anaſtomoſin inter ramulos notandam praebet, ſed coniunctionem in faſciculos maiores, et diſſolutionem in minores. Quarto: omnia haec vaſa viſibilia laxe inuoluuntur tela celluloſa et huius ope fibris adhaerent, intra illam fulcita. Haec vti vidi, ſaepius aliis exhibui, lubens demonſtro in muſculis, muſculorum faſciculis, et horum fibrillis diſſoluendis, per adhibitam et toties repetitam, in variis animalibus, diuerſam encheireſin. Scilicet ad hoc opus impleui quandoquidem in parte ſolas arterias, in alia ſolas venas, materie, quae liquefacta in minima vaſcula penetrat, et frigefacta deinde in illis conſiſtit colorata. Repleui in eodem obiecto arterias et venas diſtincte per ſimilem materiem, ſed diuerſimode coloratam, vnde tamen in minimis fere ſemper quaedam confuſio oritur, quoniam vix caueri poteſt, vt materies in oppoſita vaſa non tranſeat. Adegi denique materiam per arterias ita, vt venas ex his intret, et contra. Partes iam ita praeparatas exſiccaui, alias maceraui aqua raro renouata, vt leuis putrefactio laxet, non penitus ſoluat aut deſtruat, cohaeſionem; alias leniter ſale, alias ſale prius, deinde fumo, alias denique alcohole induraui, vt fibrae ſicciores, et pro examine fierent fortiores. Similia praeſtiti, non impletis prius in parte vaſis, deinde in tenuiſſima, quae potui, filamenta diſcerptas fibrillas optimis microſcopiis perluſtraui, ſed nec in his, nec in recentiſſimis, ſine vlla praeuia praeparatione, deprehendere potui vsquam aliud, niſi memorata

de fibrarum cohaeſione iuxta longitudinis directionem ſolam. In proprie dicti muſculi parte carnea et tendinea vti hoc eſt euidens, diſtinctius idem et pulchrius apparet in illis membranis ex fibris conflatis, quae ſunt veri muſculi caui, qualis in arteria, vena, oeſophago, ventriculo, inteſtinis, veſica vrinaria, veſica fellis, eſt tunica dicta muſculoſa. Eſt quidem eadem in tenui membrana cognitio; obſcurior tamen propter eiusdem pelluciditatem, quam obſeruo in fibris muſculoſis maiorem, quo magis ſubtiles et tenuiores diſſoluuntur vlterius, idque in maximis aeque, quam minoribus animalibus. Diſſecui bis Petropoli Elephantem, partesque diuerſimode praeparatae ſeruantur eo aſpectu iucundiores, quo ſunt magnitudine notabiliores, vtpote in quibus nudo oculo apparent, quae in minoribus animalibus per microſcopia diſtinguuntur, tam ad reptatum vltimorum vasculorum, quae per coloratam materiem iniectam rigeſcunt, quam ad fabricam telae celluloſae ſubtiliſſime ſolutam, ſed inprimis ad fibrarum muſcularium decurſum, quas arte mea vltimas diſſolubiles, nec craſſiores, nec magis opacas, compertus ſum, quam quae in hominibus, et diuerſae magnitudinis animalibus, inter ſe ſunt ſimillimae. Vnde didici, robur in muſculis non pendere a craſſitie vniuscuiusque et ſingularis fibrae, ſed a multitudine illarum, dum plures ſimul iunctae ex faſciculis adunatis craſſioribus, toroſiores muſculos conſtituunt, in actione ſynchronae, adiuuante forſitan longitudine in directione partis mouendae, ex pluribus elementis conflata. Sed et in hoc animali lamella tenuiſſima demta de oſſe, et microſcopio examinata, fibras viſu

vltimas

vltimas diſtinguendas exhibuit , quam in alio animali haud craſſiores , ita quidem vt hic iterum copia robur efficiat. Quae in muſculis et oſſibus , eadem apparent in membranis, dummodo ab omni alieno adhaerente liberentur. Peritonaeum in elephante tenue eſt, ac in homine. Et ſeruo ex eodem animali omenti portionem in liquore ſpirituoſo ſuſpenſam , amoeniſſima ſubtilitate pellucidam , aliamque exſiccatam , quae ex tenuiſſimo quaſi ſerico eleganter contexta apparet. Sunt in eadem bellua nerui validiſſimi et craſſiſſimi (*a*): aſt arte et patientia diſſoluti in fibrillas, plures quidem et longiores, non vero, quam in alio animali, robuſtiores eaſdem exhibent. Omnia haec affirmauit nuperrima perluſtratio viſcerum omnium, quae in Teſtudine maritima maxima maſculina artificio ſupra memorato tractaui, robuſtiora, lacertisque muſculoſis validiora, quam in vllo animalium, quorum copiam, diuerſam adeo, diſſecui, hucusque compertus fui. Nec mirum! Propria ſua energia agere ſola debent in contenta, intra duas vix mobiles teſtas tuto depoſita, adeoque deſtituuntur ope muſculorum abdominalium, pectoris, et reſpirationi inſeruientium, qua caeterum plurima animalia gaudent. Inquirendae ergo in his fibroſae fabricae opportunitas eſt pulcherrima, quae, in aliis toties reperta et ſupra memorata, fidelior confirmauit.

Cadit ergo tota, aliisque diuerſa adeo explicata, doctrina, tam variis hypotheſibus ſuperba, de actione muſculorum, fibris horum obliquis vel transuerſis, longi-

(*a*) Vid. Tabul. I. Deſcriptionis noſtrae Infantis monſtroſ; manu dextra retentam nerui quinti paris portionem.

longitudinales comprimentibus, ſuperſtructa, ob illarum abſentiam. Addunt quidem in arte celebres Viri, patere easdem neruoſas ex demonſtratione anatomica, ſed qualis illa foret, non percipio. Demonſtrationem Anatomicam puto Mathematicae ſimilem, qua mens per ſenſus corporeos rem demonſtratam ita percipit, vt nulla de veritate eius et exiſtentia, vti definitur, ſuperſit dubitatio. Per talem ſi exhibentur fibrae in muſculis et membranis, funis inſtar inter ſe intortae, vel neruoſae, quae longitudinales carneas obliquae vel transuerſae ambiunt, aut easdem decuſſant, denique ſi elucidantur ſimiles inter has ita decurrere, vt intertextae reticulum forment, labores meos tot annorum in his fruſtraneos perditosque ipſe pronunciabo, et lubens candidusque mutabo ſententiam, quam ſimpliciſſimam expoſui, ſimplici quidem, ſed ideo in vltimis obſcurae, partium ſtructurae maxime congruam, adeoque veritati proximam (*a*). Sit modo talis demonſtratio in ipſa corporis humani, vel cuiuscunque animalis, recenti vel arte praeparato muſculo aut membrana, non vero in nitide delineata figura, prout illa per fingendi libertatem in muſeo concipitur. Et, quaeſo? quid fiet de fibris ita fictis transverſis, ſi adeſſent, quoties muſculi craſſities notabile augetur, vt fit breui ſaepe temporis ſpatio in homine, ex macilento ſubito obeſo, et in animali intra paucos menſes, vel intra aliquot dies, vti in auibus obtinet, ſaginato? Tum nihil ex ſuperaddito elongatur, ſed tela celluloſa magis impletur pingui copioſiore et largius ſecreto.

(*a*) Impet. Fac. Hippocrat. dict. §. 286.

ſecreto. Quatenus ergo fibras longitudinales ambiens, iisdem intertexta has coniungit, plus diſtenditur, atque ita easdem a ſe inuicem remouet, et faſciculos muſculares a faſciculis magis abducit. Ergo, quae forent obliquae vel transuerſae longitudinales has interreptantes, fibrae extendendae ſunt, et tamen, vti prius, aeque promto actuoſae. Sed ſupponuntur eſſe neruoſae, ideo hoc illarum actioni contrarium eſt. Neruus quippe praeter modum vel minime, inprimis ſubito, extenſus excitat dolorem, quo ipſe minor eſt, maiorem: vti patet in podagra, atque ibi, vbi agit, vel ab obiectis afficitur, prius liberandus eſt ab illa membrana, qua, vti theca, inuolutus inter partes deſertur ad locum deſtinatum, vel maxime ab origine in corpore diſtantem. Erit itaque mollior et nimis pulpoſus, quam vt maiori repletione ſpirituum tumens, fibras musculoſas cauas quidem, ſed a contento proprio fluido diſtentas et reſiſtentes, vbi has interreptat, comprimeret, adeoque vim ſemet ipſo maiorem exerceret. Neque ibi, vbi neruus muſculum intrat, tunicas ſuas, quantum ego deprehendere poſſum ſubtili indagine, deponit; quousque etenim in minores ramulos, reſpectu trunci, ad angulos internos ſatis acutos illum diſperſum, et muſculum perreptantem, proſequor, longe tenacior eſt, quam ibi, vbi in initio ex medulla oblongata vel ſpinali oritur, antequam vaginulam a dura matre datam, iam piae matris inuolucro velatus, ingreditur. Vnde ſuſpicor, tum demum fibrillas neruoſas thecula depoſita egredi, quando ſingulis fibris cauis muſculoſis ſingulares inſeruntur, ad actionem diſtinctam, ſine vlla confuſione, in omnibus exercendam. Erit ita

vnaquaeque fibra muſcularis organum ad motum diſtinctum, ſolitarium actione, cum reliquis in eodem muſculo ſynchrona, conſpirans (*a*). Haec cylindrica apparet, creditur caua, gaudetque ſua arteriola (*b*), quae nondum vnica et ſimplex, ſed in minores ramos diſperſa, videtur, quorum demum ſubtiliſſimi in omni fibrillae ſuperficiei puncto rorem oſculis apertis inter minima conſtituentia effundunt, pro nutrimento, lenitate, incremento, flexibilitate. His reſpondent venularum ramuli vltimi (*c*), in penultimos, ex his in maiores, inde in trunculum coëuntes. Nec forſan ſolitaria eſt fibrilla neruea, quae fibram in muſculo diſtinctam facit moueri, potius inſeruntur plures eodem momento actuoſae. Nonne hoc firmat longitudo fibrae in musculis diuerſa, diuerſa in animalibus, dum ſubtilitas huius, et diſſoluti nerui teneritudo, in omnibus interim notatur eadem? Nutritio certe fibrae musculoſae in omni puncto, partium minimarum hanc conſtituentium cohaeſio per vltimum elaboratum vinculum, ſenſus vbique aequalis, actio denique ſubtilis, argumento pondus addunt. Ita in his praeſens ſemper eſt ſpiritus ſubtiliſſimus, replens neruorum tenuiſſima et ſimul di-

---

(*a*) §. 197 Impetum facient: Hippocrati dict: explicui, qua ratione omnium neruorum fibrillae minimae ſine vlla coniunctione, vel vllo commercio, diſtinctae ſolitariae decurrunt, iunctae, vel potius leuiter colligatae inter ſe, per membranam tenuiſſimam celluloſam intra thecam datam a dura matre. Qua porro ratione, a ſe inuicem ſecedunt fibrillae hae, non proprie in ramos diſperſae, vti in theca inuoluente obtinet: et quomodo ſine conſenſu agant.

(*b*) Ibid: §. 263.

(*c*) Ibid: §. 267. 268.

diſtinctiſſima fila caua aequabiliter ab origine ad mouenda; a cauſa minima incitandus, quae videtur, vix definienda, latitis incomprehenſibilis tantilla copia aucta. Praeſens eſt humor arterioſus, cuius partes minimae ſeruant fibram muſculoſam, et hanc conſtituentia minima fila, apta et idonea, vt a ſpiritu neruoſo promtiſſime moueri queant. Haec patent per experimenta zoötomica (*a*) Vterque vero hic humor ſubtilis, ab actione et nutritione ſuperfluus, reducitur ad cor.

Ex his omnibus patet, quod quoties agit muſculus, id eſt, longitudine minuta, in latitudinem extenditur, toties fibrae eiusdem accedunt ex cylindrica ad figuram ſphaericam, ſiue vno tractu cauae, ſeu potius per interſtitia in veſiculas communicantes diuiſae, exporriguntur. Simpliciſſimae ergo, quae illas conſtituunt, fibrillae mutantur ratione cohaeſionis propriae, et ratione cohaeſionis cum aliis ſimilibus. Iuxta longitudinem quippe iunctae recedunt a ſe inuicem, inprimis in media veſiculae parte, vbi extenſio maxima eſt. Deinde cum latera fibrae muſcularis ſimul ſupponuntur elongari, dum magis haec impletur, atomi, quae fibras ſimplices conſtituunt, magis ab altera remouentur, et quod has intermedium iungit, ductile gluten plus extenditur. Deſinente vero hac actione, muſculus iterum elongatur reſtitutione fibrarum, adeo que atomi ad ſe inuicem accedunt et gluten iterum magis compingunt. Sic fibra muſculoſa non modo capacitate minuitur, ſed ſimul accurtatur, dum muſculus extenditur. Haec autem contractionis inſita vis, eſt conamen illud, quo minimae rem conſtituentes particulae tentant ad ſe

 in-

(*a*) Ibit: §. 287.

inuicem, prius remotae, iterum accedere per mutuum, vix explicandum, amorem, quem Vim dicunt Attrahentem: cuius cauſa licet lateat, phaenomena tamen illius in ſolidis et in fluidis, vti extra nos, in nobis facile obſeruantur.

Fibra ergo quaecunque ſimpliciſſima, adeoque quae ex his adunatis componitur, eſt in muſculo et membrana robuſtiſſima, quando contracta eſt, et manet ſemper in eodem ſtatu, niſi accedat cauſa, quae extendit, priorem ſuperans. Hoc patet morte, et reactione in antagoniſta deleta. Dum vero extenditur, fit debilior, ſed tum demum vires dictas contractiles reddit manifeſtas, vti a quiete in corporibus nulla, omnis a motu, pendet mutatio. Magnes ſi nunquam magneti vel ferro adeo propinquus fuiſſet, vt ab eodem tractus idem attrahat, vires admirandas ſuas nunquam patefeciſſet. Sunt tamen, qui contrarium dicunt, et vires tum creſcere autumant in fibra, quando haec elongatur, et, quod miror! pro exemplo adducitur differentia inter fibram tenſam et flaccide pendulam. In diuerſo hoc oppoſito ſtatu dicti abſurditas ſponte patet, ſiue experimento vti velint, ſiue bono ratiocinio ex partium cohaeſione. Fibra, vel filum de quacunque materia ſubtili, elongata et tenſa, ictu percuſſa ſcindente acuto, facillime, difficilius pendula et flaccida, ſoluitur. Contracta eadem habet partes conſtituentes proxime ſibi adunatas, quo breuior eſt, adeoque in corpore animali, iam toties memoratum, intermedium gluten inter illas compreſſum. Dum vero elongatur, partes minimae conſtituentes magis et magis a ſe inuicem remouentur, et quod has in-

intercedit, ductile gluten extenditur cum iisdem. Ergo in vltimo caſu robur et cohaeſionis virtus diminuitur ratione, qua puncta contactuum in partibus minimis minuuntur. (Impetrabo facile veniam pro verbo, vbi ſermo de atomis, in quibus ratio aliquam concedet figuram, gluten ſaltim intermedium de natura fluidi partes habet iterum conſtituentes non homogeneas.) Interim infeliciter Illi errant, qui diuerſitatem inter flaccidam et tenſam fibram referunt ad corpus animale, dum viuit, in quo certe nulla fibra ſana pendula et flaccida eſt: cum in eodem omnes partes firmae, etiam contractiſſimae, inſuper nituntur in adunationem maiorem, quam impedit illa continuitas, qua pars parti cohaeret et eandem tendit; hac etenim ſoluta, cutis et membranae hiant in vulnere; arteria vero, vena, neruus, tendo, caro, diſciſſa ſeſe abſcondunt, regreſſa intra partes molles, vix vi adhibita iterum adducendis extremis. Omnis ergo differentia, quae obſeruatur in viuentis corporis fibra, eſt inter eandem tenſam et extenſam ſanam; flaccida quippe et pendula, nec agit, nec promte reagit, etiam prius extenſa. Chorda ſegmenti peripheriae circuli extrema iungens in arcu elaſtico, ſi flaccida extenditur, nullam vim exercet, ſibi iterum relicta: ſed prius tenſa, ſi deinde extenſa remittitur, telum ſibi impoſitum proiicit, ſemet ipſam reſtituendo, dum partes conſtituentes, prius remotae magis, propius iterum ad ſe inuicem accedunt. Fit autem hoc vi tanto maiori, quo magis tenſa chorda, plus extenditur, et citius remittitur. Qui poſt mortem obſeruatur in corporis partibus, habitus nihil contrarium docet. In cadauere recens ſuffocato, vel aquis ſubmerſo,

omnia quidem adſunt ſolida et fluida, quae momento antea aderant in viuo, ſed vitalis iſta virtus, qua in ſe inuicem agunt, periit; hinc et tenſio et toroſitas in internis aeque, quam in externis, inprimis euacuatis ſimul, quae ſuſtinent, contentis, abeſt: patet in arteriis, venis, et firmis partibus continentibus, quae in contenta, vt in continua mollia quidem, ſed elaſtica, fuerant actuoſae. Exemplo ſit veſica ratione copioſae vrinae plus minusue extenſa, et in viuo plane vacua contracta tamen et carnoſa. Haec ſi in cadauere preſſu externo a lotio euacuatur, lintei inſtar flaccida iacet, deſtructo in fibris elatere, quo ſemet contrahunt. Ligata in cane vrethra potu ſaturato, ſi viuus inciditur, veſica plena dura, dum acu non nimis tenui perforatur, eiusdem fibrae ſeſe circa lotium extendens aequabiliter contrahunt, atque illud per vulnuſculum non reſiſtens ad altitudinem notabilem, quaſi per ſiphonem, expellunt ad integram ſere euacuationem contractae. Interim ſunt ſemper, dum agunt, extenſae, et quidem, quo plenior veſica eſt, quae etiam contracta non tum flacceſcit. In explicanda vrinae euacuatione phyſiologicis lectionibus ſolebat hoc experimentum recitare magnus Boerhaauius, quod non ſemel repetendo me docuit, quo citius, incifis continentibus abdominalibus, pertunditur veſica, eo ſaltum vrinae eſſe fortiorem, dum contrarium obtinet in animali ſemimortuo. Sciunt porro Venatores ex fera exenterata, viuida viſcera carnea moueri, ſi vero ex ſemimortuo animalis abdomine eximuntur, membranacea pelluceſcunt et extenſa pallida iacent.

Sim-

Simplex autem fibra non agit ſolitaria, hoc iam patuit in illis, quae compoſitae musculum conſtituunt, ſed aetate firmatur ad actionem magis validam per propriam, et cum fibris ſimilibus cohaeſionem arctiorem. Prior obtinet, dum mucoſa in incremento, per augmentum atomorum et harum adunationem propiorem, glutine plus inter easdem condenſato, tenacior fit. Altera vero, dum vaſcula minima ex ſimpliciſſima membrana convoluta in fibram compoſitam, per θλίψιν, vel cum contento liquido, abolita cauitate, concreſcunt. Sic roboratur, dum increſcit, corpus. Abſolute ergo impoſſibile eſt, certam dare cohaeſionis definitionem in eiusdem corporis partibus diuerſis non modo, ſed et alia aetate in iisdem. Oſſium lineamenta in primo formato embrione diffluunt mucoſa, non ſuſtentata aequali liquore. Fiunt deinde membranacea, cartilaginea, et oſſeſcunt in foetu iam in vtero: in iunioribus eadem ſuccoſa, demum in decrepitis eburnea euadunt. Dentes adamantina duritie ſplendentes, fuere mucus, membrana tenuiſſima vaſculoſa, rudimenta cohaerentia media in gelatina natantia. Vidi in ſene poſt centeſimum annum mortuo, quae in iuuentute ex meris fere vaſculis conſtare per iniectiones anatomicas apparet, aortam, vbi corde egreditur, et primo diuiditur, plane corneam, rigidam, et immobilem. Vidi in eodem Nauta emerito, ſinum durae matris longitudinalem et proceſſum, qui falciformis hemiſpheria cerebri diſtinguit, granulis innumeris oſſeis, quaſi tot punctis, vnde oſſificatio incipit, repletum, et erat ſinuum concurſus, quem torcular Herophili dicunt, plane oſſeus. Idem vti in animalibus, obtinet in foſſilibus et in

vege-

vegetabilibus. Surculus ſit arbos, augmento et robore partium, quae conſtituunt, magis adactarum. Fluitque in venis metallum immaturum ſub nomine Gur metallici. Haeret autem, vti in initio monui, omnis haec, et ſucceſſiua in partibus et in toto, differentia non in ſolidis ipſis conſtituentibus, ſed in glutine iungente, plus minusue elaborato et compacto. Farina frumenti volatilis cum aqua commiſta in pultem, motu deinde ſubacta, condenſatur in maſſam, ex qua certo ignis gradu panis coquitur. Puluis viarum, vento mobilis, ſpargitur per auras; imbre vero madefactus et ſubactus idem vertitur in limum cohaeretque ductilis, inprimis ſi vel ipſe pinguior, vel mucoſior eſt pluuia: inde formatus globulus mollis, ardore clibani, torretur in lapideam duritiem. Ex oleo et puluere cretae impalpabili miſtis materies conflatur tenax et ductilis, qua iunguntur vitra ligno, quaeque, ſenſim ſiccata et ſolida facta, aërem arcet et aquam. Notiſſima haec ex innumeris adduco exempla, vt pateat, dum in corpore humano praeſto ſunt partes minimae terreſtres, humor has connectens aquoſo-oleoſus, motus continuus, et calor appropriatus, vt ex mucoſo principio, in ſingulis et in omnibus, ratione partium, cuncta firmentur, increſcant, tandemque per ipſum calorem et motum continuum rigeſcant ita, vt ſit ineuitabilis fati ſenilis neceſſitas, quam ſint vana illorum promiſſa, qui, ſpe longioris aeui, paucis elixirii aut eſſentiae guttulis credulos fallunt ipſi decepti; dum per integram corporis maſſam, vi penetrabili, cuncta concreta diſſoluere, nouaque apta infundere, iisdem conantur: adeoque a morbo quocunque, caeteris inſanabili medicamentis, liberatum

corpus

corpus producere ad longaeuitatem ; imo vero in ſingulis peculiaria, et in aliis plane partibus peragere oppoſita vno eodemque auxilio. Tutior, ſi quid agendum, ars Medeae, fabulis implicita, per ſomenta et tepida balnea, rigido et exſucco decrepiti Aeſonis corpori reddit priscum iuuentutis floridae ſpecimen. Hoc docet, certo nixa fundamento, cura toties Sapientibus adhibita in vaſorum et viscerum morbis atque artuum contracturis, a nimis praeter naturam indurata et rigida fibra dependentibus. Sed et in partibus animalibus analogis extenſis mira eſt proprietas et conditio ſingularis ſemet ipſas contrahendi, adeoque primordia conſtituentia ſolida ad ſe inuicem adigendi, atque ductile extenſumque gluten iterum compingendi. In ventriculo et inteſtinis, quotidie diuerſimode extenſis et contractis, motus periſtalticus viget et perennat. Vterus a tantilla mole in ingentem eandem tempore grauiditatis excreſcens, breui poſt partum dierum interuallo ad priſtinum ſtatum redit. Haec res mira, vti admiranda reuera eſt, extollitur! ſed non video, quod minus ſtupenda ſit, cutis, pinguedinis, muſculorum abdominalium, horumque aponeuroſium, ſed inprimis tenuiſſimi peritonaei, ſingulorum prius extenſorum, valida et repetita contractio in foeminis toties parturientibus. Certe ſi cutis et muſculi in alia plaga corporis, ſi membranae peritonaeo ſimilis fibrae conſtituentes ita elongarentur et a ſe inuicem abducerentur, vix reſtituerentur vnquam, ſed manerent potius paralyticae. Interim miramur magis, quod vis haec peculiaris contrahens extenſa, tanto validior in corpore faeminino obtineat, quam in maſculino, cum tamen longe

 mollius

mollius ſit et textura laxius. Hanc puto maximam eſſe rationem, ob quam quotidie obſeruamus in praxi Mulieres longe diutius et longe commodius perferre aſciten, quam Viros, quoniam partes abdomen inferius ambientes ex propria et connata natura ad validam extenſionem et contractionem ſunt praediſpoſitae, licet huc etiam multum faciat latus peluis ambitus, nimium extenſas et extendentes aquas melius ſuſtinens. Patet et mira, ſed diuerſa in aliis, contrahendi proprietas in exſectis partibus ſimilibus irritatis, vti euidens eſt in corde et aliis muſculis quorumdam animalium.

Sicuti vero fibra naturaliter contracta, in maiorem adhuc nititur partium adunationem, (quod iam antea memoraui) ita eadem extenſa elongatur etiam vlterius, quoties et ratione, qua vis extendens augetur, tumque eo magis renitens vires contractiles plus reddit conſpicuas, quae reagunt in cauſam extendentem, quo haec fortior eſt. Aucta hoc explicat humorum circulatio, vnde vaſorum extenſio et contractio citiſſime mutatur et ſimul validiſſime: quod fit a cauſa minima, et toties leuiſſima obſeruata, ſiue mentem prius, ſiue directe corpus afficiat; in quo, ſaniſſimo etiam declarato, vix idem omni diei hora cordis et arteriarum pulſus deprehenditur: quare inter Medicos multi dubitant, an perfecta ſanitas ſit definienda (*a*).

Quoties vero cauſa haec extendens aucta, vel per propriam virtutem, vel per imminutam reſiſtentiam in fibra ipſa, eandem plus elongare pergit, adeoque partes minimas conſtituentes magis a ſe inuicem remouet, tan-

(*a*) Galenus de ſanitate tuenda Lib. VI. Cap. 5.

tandem omnem in illa vim contractilem ſuperat et deſtruit. Agit quippe mutua inter partes virtus attrahens ad certam modo diſtantiam, in minori interuallo fortior, in maiori debilior, deſinens in iisdem, extra ſuae virtutis limites extenſis. Oriuntur tunc in partibus compoſitis omnes illi morbi vaſorum et viſcerum, per gradus ad paralyſin et continui ſolutionem vsque, qui a laxa et nimis debili fibra, quam vt naturaliter contrahatur, dependent.

Cum ergo vltima conſtituentia ſolida terreſtria, alia vocula aliis denominata, ſignificatione eadem (*a*) ipſa ſimpliciſſima et vnica, in quocunque animali, vt omni vegetanti, explorata ita inter ſe conueniunt, ut vel attentiſſima indagatio nullam inter illa differentiam deprehendat; cumque cohaeſio vltima in vtroque non ſoluitur, niſi per viuum ignem in aura aperta, aut per aëris, aquae, et temporis, diuturnam actionem, an etiam vinculum vltimum in hoc, quam in illo, eſt perfecte idem aquoſo-oleoſum gluten? Praeter deſtructionis eandem in cohaeſione memoratam rationem, nonne hoc firmat ipſorum elementorum ſumma ſoliditas, ſimplicitas, adamantina durities, immutabilitas, adeoque in omnibus figura omnino et prorſus eadem, et talis quidem, quae ſolummodo iungitur per ſimplex vinculum ita, vt per ignis et frigoris actionem alternam remota et adducta principia in compoſitis corporibus rarefactionem et condenſationem efficiant; quae praeter illum, quem ex impulſu liquidi notauimus in compoſitis, motum continuum excitant. Certe quidem cum deprehenderant

 dudum

(*a*) Muſchenbrock Inſtitut. Phyſic. §. 43.

dudum attenti Phyſici, calore dilatari, rareſcere, debilitari quaecunque corpora ſolida; frigore vero condenſari, compingi, et roborari eadem in tribus regnis, ſimul notarunt ſeduli, omnem hanc mutationem non pendere in primis elementis ipſis, at vero in iis, quae ex his conflantur, particulis. An ita ſunt prima compoſita corporum principia, in vegetantibus et in animalibus, etiam prorſus eadem, tam materie, quam cohaeſione? An diuerſitas in compoſitis maioribus dependet a molecularum, inter ſe ſimilium, appoſitione et adunatione alia, vt inde varia componantur vaſcula, vaſa, et continentia, per quorum diuerſam intorſionis figuram, atque inde natam aliam oſcillationis energiam, ex vno eodemque ſanguine in animali, ex vno eodemque ſucco hauſto de tellure in planta, adeo diſcrepantes ſecernuntur humores, prout hi alio directionis angulo in illorum parietes incidunt et repelluntur, atque ita diuerſimode mixti alia iterum ratione ſeparantur. An et inde diuerſi characteris in ſpeciem diſtinctio? Haec quidem videtur incomparabilis Ruiſchii ſententia, cum per totam vitam, eamque longaeuam, attentiſſimus et dexterrimus in extricandis corporis humani labyrinthis, tandem deprehenderat; quod in omni eiusdem parte, per artem ſuam diſſoluta et viſibilia facta vaſa minima, alio decurſu procederent aliaque intorſione aperirentur.

Similitudo attente notata, ſiue ortum reſpiciamus, incrementum, nutrimentum, aut nutritorum ſecretionem et exhalationem, inter animantia et vegetantia, vti expoſita elucidat, ita inprimis eadem affirmat vnius in alterius corpus metempſychoſis, ne quidem plane in

elementa

elementa prima ſoluti prius. De tellure hauſto ſucco aluntur ſtirpes, ſtirpibus paſcuntur animalia, aut aliorum animalium partibus, quae prius comederant vegetabilia. Piſces maiores minores deuorant, ipſi minimos, qui iterum inſecta, et haec nutriuntur vegetabili tenuiſſimo.

Torua Leaena Lupum ſequitur, Lupus ipſe Capellam,
Florentem Cytiſum ſequitur laſciua Capella. (*a*)

Vaſtiſſima animalia, elephas, camelus, bos ſaginatus, equus generoſiſſimus, herbis conſtant comeſtis et aqua pura, in ſuum mutatis corpus. Homo vero vegetabilia comedit, varias animalium carnes, piſces et inſecta, his ſemet ſuſtinet, quorum omnium principium eſt de terra hauſtum pabulum vnicum et aqua iterum. Contra quae ex his aſſumtis prius conuerſa in corpus mutans exhalant de homine, de reliquis animalibus, per inſenſibilem perſpirationem et ſudorem, quae per ſaliuam, vrinam, aluum, depurationem, excernuntur, illa omnia breui tempore diſparent euaneſcentia in aëra. Imo vero ingentia belluarum corpora in deſertis mortua, hominum poſt belli conflictus relicta in campis cadauera, non longa ita mora, per coeli et tempeſtatum aſperitates, aëris viciſſitudines, ſolis ardorem et teporem, reſoluta prius in tabem, diffluunt putrefacta; et illa, quae ſub terra ſepeliuntur, ibidem vertuntur in tenuiſſimam mephitim, quae volatilis facta per eiusdem poros tranſit. Tandem oſſa relicta albicantia, iisdem iniuriis calcinata, collabuntur in cineres vento diſſlandos. Hac ratione ingentia corpora animalium diſſoluta ſepeliuntur tota in aëre, citius ſi

 combu-

(*a*) Virgilius Bucol. eclog. II, verſu 62.

comburuntur. Sed ita diſperſa et oberrantia in vaſta atmoſphaera horum meteora iterum redduntur telluris gremio, quoties cum rore, pruina, nebula, pluuia, imbre, decidunt, atque ſalina, oleoſa, ſaponacea aquae mixta, eidemque intime nupta, ſub forma lixiuii ſubtiliſſima ſabuleta penetrant, et in ſubterraneis his locis, per alternam ignis et aëris oſcillationem, cum ſuo vehiculo commota a bibulis plantarum radicum oſculis recipiuntur, nouum his, nouum animalibus, iterum reddituira alimentum. Sic permutantur quotidie partes animalium in materiem vegetabilem. Sic ex plantis aſſumtis, omni momento aluntur animalium corpora, iisdemque conſtituuntur aſſimilatis in ſuam formam, aëri et terrae iterum reddendam. Vtque de terra oriuntur in aërem omnia, ita ex eodem relabuntur cuncta in illam, iterum proditura circulo continuo. Vt ergo omnium rerum vnum chaos terra, ita alterum aër eſt.

Quae interim de corporibus rapiuntur in vita particulae, neque quae poſt mortem ſeparantur, ſiue igne, ſiue putrefactione illa diſſoluuntur, ſunt ſemper ſolutae in, omnia conſtituentia, minima elementa; contrarium docet virtus harum molecularum odorifera late diſperſa, et quidem in aliis diuerſa animalibus, vti in carnibus tabidis et piſce putrefacto eſt euidens diſtinctio. Neque, relapſa in terram, ſemper in principia diſſiliunt, vti ex combinatione cum aqua patuit; multo minus id fiet, dum vegetabilibus recepta, per affabre horum factam compagem in propriam naturam elaborantur.

Hinc tandem concludere auſim: quod Elementa omnium prima, in omnibus corporibus animalium et

vege-

vegetabilium, ſimpliciſſima, terreſtria, immutabilia ſint prorſus eadem. Et, quod haec prima in ambobus iungit, Gluten ſit eiusdem omnino naturae, neque vltimum tamen elaboratum, ſimpliciſſimum, ſed ex aqua ſaltem et oleo compoſitum, forſan et ex alio adhuc principio ſaponaceum: hinc ductile eſt et quodammodo figura mutatur. Eſt demum in vtrisque ratio cohaeſionis plane eadem. Sunt ergo omnium prima compoſita principia, aeque quam ſimplicia, in his eadem. Sic ex plane ſimillimis componuntur principiis et in eadem reſoluuntur animalium et vegetabilium corpora, vt facile ad eandem poſſent referri claſſem, licet character ſit valde diuerſus. Ideo diſtinctio neceſſaria eſt ob naſcituram caeterum confuſionem.

Sic ex elementis paucis innumerabiles nouorum corporum ſeries oriuntur. Sic ex compoſitorum ſeparatione, atque deinde commixtione iterum cum aliis adunatis vel cum primis compoſitis principiis, infinita naſcuntur corpora, quae alia appoſitione, varia figura et ſuperficie, diuerſiſſimas agendi virtutes et operandi poteſtates adquirunt, etiam remanente materia prorſus eadem.

Tandem: an quae inter vegetabilia et animalia, eadem inter haec et regnum minerale obtinet metempſychoſis? Certiſſimum eſt, quod vti illorum, ita foſſilium, et inter haec metallorum, particulae deferantur per atmoſphaeram (*a*); vnde ſaepe noxius fit aër, quandoque et venenatus, inprimis circa fodinas. Particulae hae ſimili ratione, qua vegetantium et ani-

(*a*) Boerhaaue Elem. Chem. Tom. 1. pag. 490.

animalium, deciduae redduntur telluris gremio (*a*). Interim non ſemper ad matricem ſuam redeunt, reliquis corporibus intactis. Mercurius igne ſimplici eleuatur, et per auram diſperſus particulis inuiſibilibus corpus humanum intrat, hoc in ptyaliſmum incitat, dumque rapitur, de metallis obuiis aliquid aufert (*b*). Vegetabilium autem et quorumdam animalium exuſti cineres dant Ferrum verum conſpicuum. Scribit Ioachimus Becker (*c*), ſeſe ex argilla vulgari cum oleo terebinthinae ſubacta globulos formae ſclopetariorum confeciſſe, et, poſt oleum Philoſophicum inde deſtillatione ablatum, reſiduum in pollen impalpabile triuiſſe, ex quo per magnetem admotum ſpiculas extraxit. Geofroy (*d*) ex nigra faece lucida olei vitrioli et terebenthinae mixti et deſtillati eadem inuenit, quae ex ſuis mox memoratus Bekkerus: affirmat deinde, quod loco argillae captis cineribus diuerſis plantarum, nullos horum inuenerit, qui non dederunt magneti adhaerentia granula, quae verum ferrum eſſe inde apparent, quod ſpeculo cauſtico expoſita, perfecte patiuntur et dant omnia illa phaenomena, quae exhibet de minera ſua ſeparatum ferrum; quod adeſt in exuſtis etiam millepedum et caſtorei cineribus (*e*). Quis autem definiet, dato ſemel corpore, quod aurum, argentum, reliquaque metalla ita attrahit, vti magnes ferrum, an non ſimilia horum ſpicula elicerentur de corporibus combuſtis? quod dum non affirmo, etiam negare non auderem

Nec

(*a*) Ibid. pag. 494.
(*b*) Ibid. pag. 492.
(*c*) In Phyſica ſubterranea.
(*d*) Memoires de l'Acad. de Scienc. 1704. pag. 285. 286.
(*e*) Ibid. 1706. pag. 529.

Nec vllius momenti obiectio eſt, generari, quod extrahitur de cineribus, demum ferrum tum, quando corpora comburuntur: agimus etenim de particulis conſtituentibus, adeoque ferri praeſentia, poſt ignis violentiam, probat, dari in memoratis corporibus materiem, vnde metallum hoc conflatur, ſiue id fiat per ignem in combuſtione, ſiue ante illam, per cauſam quamcunque aliam.

Difficillius forſitan erit, exhibere in foſſilibus animalium et vegetantium particulas. Notamus interim, terram, quam ſales natiui, ſulphura, ſemimetalla, et metalla viliora, dant, ſi rite depuratur, eſſe omni dote iterum eandem cum illa, quae ex vegetabilibus ſeparatur et ex animalibus, nec vlla nota ab hac diſtinguitur. In perfectiſſimis autem metallis haec non deprehenditur, quae eius loco pro baſi agnoſcunt Argentum viuum fixatum per ſulphur. Sulphur autem in omnibus corporibus, hominum fuerint vel ratione carentium animantium, ſtirpium vel foſſilium, palam declarant Chemicorum Principes idem (*a*): vtpote quae materia luminis in corpora quaecunque penetrat, ſemper principium actiuum mouetur, moratur in horum poris, molem et pondus auget, figuras mutat, principia diuerſa miſcet, et hac ratione noua corpora facit. Vti deinde in animalibus et vegetabilibus gluten aufertur, dum comburuntur, vel alia ratione in principia diſſoluuntur, ita auolat de metallis ſulphur hoc oleoſum, quoties illa foco ſpeculi cauſtici expoſita vitrificantur, tumque omni vin-

(*a*) De hac re videndae ſunt obſeruationes, quas dedere Ingens Hombergius, Geoffroy, et Le Meryus Iunior, in Actis Societatis Regiae Pariſinae paſſim.

vinculo liberum in vaſtiſſima atmoſphaera non magis eſt ſulphur metallicum, quam animale vel vegetabile, ſed principium commune, aptum ad corpora quaecunque ingredienda, liganda, conſtituenda. Hinc metalla ſulphure ſuo orbata, hoc iterum recipiunt ex vegetabili. Si etenim materies prius per ſpeculum cauſticum vitrificata in cupella, deinde poſita ſupra carbonem funditur iterum per vitrum vrens, tunc ilico induit priſtinam formam et recipit indolem metallicam. Inde fit, quod metalla carboni impoſita, ſi foco ſpeculi cauſtici exponuntur, nunquam vitreſcant, ſed diſſiliant in parua fragmenta, ſemper adhuc metallica; carbo etenim de ſuo ſulphure vegetabili reddit, loco eius, quod ignis abſtulerat. Eſt ergo ſulphur metallicum; oleoſum nempe, opacans, colorans, et malleabile reddens, idem, quod vegetabile; et eſt hoc idem, quod animale ſub nomine glutinis.

Vt ergo omnium corporum baſis eſt terra ſimpliciſſima, elementalis, formam dans, et rei cuiuscunque principia caetera ſibi, deinde et inter ſe, vniens, nimis per ſe volatilia a diſſipatione retinens, praeſtans facultatem alieni aſſimilandi in cuiuscunque nutriti corporis naturam, adeoque et poteſtatem ſeminalem procreandi ſibi ſimilia efficiens, quae pereunt omnia, fabrica a terra praecipue pendente deſtructa, ita in Metallis et quibusdam Foſſilibus ſimilia praeſtat Argentum viuum. Hinc Hermeticorum antiquiſſimi, qui et optimi ſunt, palam affirmant, ex Mercurio ſincero ſolo per Sulphur puriſſimum fixato naſci Aurum et Argentum; ex eodem vero minus defoecato et argento viuo magis aliena labe in-

inquinato minus ſimplicia et viliora metalla in matrice ſua condenſari.

Ergo videntur omnia fore in rerum vniuerſo creato volatilia, mixta in chaos, ſi abeſſet Terra et Argentum viuum. Neque haec darent rerum principiis formam, niſi fixentur illorum elementa per materiem fluidam interpoſitam, quae ſuperficies et aſperitates laeuigat ita, vt cohaereant. Hanc materiem vnam eſſe, et eandem in vegetabilibus et animalibus, vti ſunt ſimpliciſſima, adeoque eadem principia conſtituentia ipſa, euincere conatus ſui. Eſt forſitan et videtur eadem, quae in foſſibilibus ſub Sulphuris nomine venit cum illa ſubſtantia, quam Gluten diximus in reliquis. Inde transmigratio ex vno corpore in alterum non adeo obſcura eſt.

Ergo Foſſilia cum vegetantibus et animantibus conveniunt, ratione materiei fixantis, conueniunt in quibusdam ratione materiei fixatae. Differunt ratione alterius, terreſtris nempe principii vel mercurialis: magis quidem, quam reliqua mineralia, metalla; et inter haec, maxime perfectiſſima.

An ergo Ars, quae in tam multis Naturam perbelle ſequitur, aliquid valet perficere transponendo prima principia, iamque ex his compoſitas primas moleculas, vt naſcantur ex vno corpore diuerſa?

Notamus quidem, per inoculationem miteſcere in vegetantibus aſperitatem, nunquam tamen, vt priſtina indoles deleatur: nec poterit feliciſſima agricultura de ſemine aniſi producere foeniculi plantam. Omnes artifices ſimul intenti, non facient vnicam guttulam chyli, lactis, ſanguinis, ſeri, lymphae, bilis, vrinae, quae

corpora animalium conficiunt ex ingeſtis diuerſis, quorum omnium principium vegetans eſt, idque per affabre factam campagem et ſtructuram ſingulis peculiarem ad deſtinata perficienda creatam, et quidem cum virtute ſeminali prolifera, ſimilem producente prolem. Haec eſt mira a Deo data finitis infinitatis ſpecies; et haec admiranda diſtinctio generum et ſpecierum, ex iisdem plane principiis, in vegetantibus et animalibus, alia modo horum appoſitione, connexione, et inde reſultante actione in compoſitis, diuerſa obtinet.

An foſſilia, et inprimis metalla tamen, cum ſint corpora magis ſimplicia, quam plantae et animantia, ideo ex vna in aliam ſpeciem minori cum labore transferri poterunt? Torſit haec res ita acutiſſima omni aeuo ingenia, ſpe tanta retinuit mortalia pectora auri ſacra fames, vt, a remotiſſimis temporibus in hanc horam, inuenti fuerint ſemper, qui omnem operam in hoc ſoli impenderunt, et quidem inter Philoſophos ſapientisſimi. Ego, qui ab hiſce quam maxime diſto, palam tamen aio, ex conſideratione illorum, quae recitaui, errare omnes, qui ex re non metallica metallum arte conficere ſtudent; errare et illos, qui perfectiſſima metalla tentant producere, niſi ex argento viuo. Forſitan et ipſi errant, qui nimiam, et omnem, in illo operam intendunt. Mercurius enim, quocunque locorum idem, nunquam ex venis educitur purus, ſed ſemper inquinatus labe difficillime ab illo ſeparabili, quia ab origine ipſi concreta intimis eius receſſibus inhaeret, impediens et obtundens penetrabilitatem, maculans puritatem, ſimplicitatem cogens in connubium compoſiti: depuratus autem ab hac

hac labe foret purus, ſincerus, tumque adeo ſimplex, vt vbique in ſua diffuſione prorſus ſit idem, et immutabilis omnino. Haec admirabilis certiſſime res! eſt Alchemiſtis ideo quaerenda omni labore, omni pretio eſt redimenda, vtpote quae cruda metalla maturat, vilia in aurum et argentum perficit, reliqua corpora in radicale humidum diſſoluit, ipſa prorſus immutata. Ideo maximus Hermeticorum labor ſemper in eo fuit, vt, exurendo maculam, infectum hoc tollerent de mercurio; ex vitro ergo puriſſimo toties per vim ignis in excipulum purum pellebant, donec totus in puluerem rubrum ſcintillantem redactus erat. Hunc puluerem iterum ex vitris vrgebant, donec de mortuo reſuſcitabant mercurium viuum, quem habuerunt pro depuratiſſimo. Sed falluntur. Reſuſcitatus etenim eadem, qua prius, ignis actione cogitur iterum in pollinem rutilum, quod fieri poſſe cum ſuo mercurio, plane negant in arte Magiſtri, quia ſemel defoecatus, ab igne deinceps non mutatur. Legantur, quae circa hanc rem de mercurio quingentis et vndecim vicibus per ſe deſtillato, ſcripſit in Actis Philoſophorum in Brittannia Hermannus Boerhaavius. Qui et alia methodo deinde defoecationem ab impuro tentauit, miſcendo argentum viuum cum corporibus puriſſimis, natura illi ſimillimis, ex quibus iterum ope ignis millies et vltra abſtulit. Promittunt namque in arte Principes, eo modo mercurium, relicta faece in corpore fixo, depuratum penitus et viuum adſcendere. Sed in his multa docentur vana, errantibus ſalutaria, ſi ſapere volunt alieno periculo cauti.

Si ergo in ſolo defoecando mercurio tanti ſunt fruſtra adhibiti labores, quid de eodem condenſando cogitabimus? cum ſi pondus index maſſae corporeae, adeoque potentiam fere creantem requirat (*a*). Sed de hiſce commode magis agetur, quando et haec, et reliqua Boerhaauiana poſthuma edam, nactus otium.

(*a*) H. Boerhaave Elem. Chem. part. I. pag. 41. 2.

MVS AQVATICVS EXOTICVS

CLVS. AVCTAR.

Raii Syn. Quadrup. p. 217.

Ruſſ. ВЫХУХОЛЬ

AVCTORE IO. GEORG. GMELIN.

Tres huius generis mures a piſcatoribus Caſanienſibus obtinens, e re eſſe duxi, deſcriptionem eorum adornare, eamque cum Raii et Sarrazini deſcriptionibus conferre.

Omnes maſculi coloris per totum dorſum et capitis ſuperiorem partem ex cinereo nigricantis, in ventre ex cinereo albentis. Odorem ſpirant Moſchi vehementem, quem difficulter, attamen ſine deliquio ſuſtuli. Conqueſti ſunt de capitis doloribus, qui mecum in hypocauſto erant, quos et ego, leues tamen, ſenſi. Cum ſola magnitudine, et parum quidem differant, maximum tantum deſcribam.

Tota longitudo eſt 1 ped. Rhen. 2 $\frac{96}{100}$ poll. Cauda 6 $\frac{1}{10}$ poll. aequat. Caput pro mole corporis ſatis paruum, in roſtrum ſuillo analogum, vltra $\frac{3}{4}$ poll. longum, in extremitate vltra $\frac{1}{4}$ poll. latum, deſinit. Rictus latera villis, ſeu potius ſetis, albentibus, circum circa ornantur. Dentes ſunt, vt in reliquis huius generis. Auriculas, licet omnem diligentiam adhibuerim, inuenire non potui. Retro oculos vero in diſtantia $\frac{64}{100}$ poll. loco, in quo auriculae alias adhaerere ſolent, rima in cute apparet, 4 lin. longa et 1 lata, quae ad meatum audi-

auditorium ducit, et ita occultata eſt, vt non niſi pilis abſciſſis, vel vſtis, conſpici facile poſſit.

Tam in capite, quam in corpore, duplex pilorum genus obſeruatur. Primum longiuſculum eſt, molle et rarum, ac ſupra alterum eminet, quod coloris magis diluti et moliſſimum, breue ac copioſum eſt.

Pedes anteriores cum vnguiculis non vltra pollicem longi ſunt, vsque ad digitos pilis raris hirtis obſiti. Vtrinque ad oras ſeries pilorum hirtorum, non vltra $\frac{2}{10}$ poll. longorum, albentium, iubae equinae inſtar pendent. Digiti 5 nudi per membranas cohaerentes, quorum ſinguli quatuor articulis componuntur, et in vnguem perparum aduncum, tenuem, $\frac{1}{4}$ poll. circiter longum, deſinunt. Pedes poſteriores ab ortu ſuo rotundiuſculi, anguſti, non vltra $\frac{3}{10}$ poll. lati, pilis ibidem raris obſiti, ſenſim et ſenſim nudi euadunt, et ex rotunditate latam ſuperficiem acquirunt. In extremitate $\frac{9}{10}$ poll. lati ſunt, imo ad 1 $\frac{34}{100}$ poll. extendi poſſunt, craſſitie vero ibidem vix $\frac{1}{10}$ poll. aequat. Ad oram externam ſeries pilorum hirtorum $\frac{2}{10}$ poll. longorum pendet. Pars prona pedum nigricat, et cutis ibidem teſſelata eſt, ſquamoſae analoga. Pars ſupina verſus extremitatem colorem nigrum, albo parum dilutum, obtinet, qui carneus fere eſt in reliquo pede. Abit in quinque digitos, per membranas latiores cohaerentes, et in extremitate vnguiculis acutis, magis aduncis, albentibus, inſtructos.

In pube penis loratus eſt, pilis albicantibus, breuibus, obſitus $\frac{35}{100}$ poll. longus, obtuſo et quaſi abſciſſo fine terminatus. Anus medio inter caudam et penem loco ſitus, et ab vtroque $\frac{3}{10}$ poll. diſtans, ori-

orificio rotundo, cuius diameter $\frac{1}{10}$ poll. eſt, in cute hiat. Foramen ſingulare pro vrinae fluxu, licet diligenter perquiſiuerim, reperire non potui.

Cauda ſuperius ex cinereo ferrei coloris eſt, inferius, inprimis in principio, carnei. Rotundiuscula ab initio et craſſa, ibidemque circulo pilorum obſcure fuſcorum $\frac{3}{10}$ poll. longorum, pinguium, cincta, tenuis et lata ſenſim euadit, et in tenuem apicem deſinit. In medio maximam latitudinem habet. Partis latae orae ſcindentes fere ſunt, et vtrumque latus in medio per totam longitudinem in aciem quandam eleuatur, inſtar ancipitis gladii, cuius figuram tota caudae lata et tenuis pars refert. Latera partis latae non horizontalem, vt in caſtore, ſed verticalem ſitum habent. Tota cauda ſquamoſa eſt. Squamae aqua tepida facile ſecedentes, figurae oualis ſunt, ab initio caudae maiores, et pro diſtantia ab ea minores, longiori parte transuerſim ſita. Dimidia tantum pars eminet, reliqua ab alterius ſquamae dimidia parte tegitur. Series ſquamarum ita ſibi ſuccedunt, vt ſingulae ſequentis ſeriei ſpatio medio inter duas praecedentes reſpondeant. Sub ſingulis ſquamis 2 vel 3 ſetae prodeunt, $\frac{3}{10}$ poll. longae, ex luteo albicantes, quibus itaque tota cauda hirta eſt. Cauda eſt pars huius muris, quae omnium maxime moſchum redolet.

Internarum partium conformatio ita ſe habet:

Pulmonum quatuor maiores lobi, et aliquot minores.

Hepar latum, tenue, figurae trapezoidis, in quinque lobos maiores et aliquot minores ſectum.

Veſiculam felleam, licet omni cura in hiſce tribus muribus, quos diſſecui, inquiſiuerim, reperire non potui.

Ventriculus figura dimidiam fere lunam repraeſentat, cornubus ſurſum ſpectantibus. Dextrum latus altius eſt ſiniſtro, et ſupra locum, vbi oeſophagus ingreditur, ad $\frac{1}{2}$ poll. eleuatum, cum ſiniſtrum vix $\frac{1}{4}$ poll. eleuatum ſit. Contenta frigore conglaciata erant, iis vero aqua diſſolutis, plura minima corpuſcula, vermiformia, carnis colore praedita, innatare vidi.

Inteſtina coeca nulla. Tota inteſtinorum longitudo 12 prope poll. aequat. Foeces inteſtinorum, inprimis recti, reſinam fere ſuper igne liquefactam, referunt, nec notabili foetore nares feriunt.

Renes $\frac{75}{100}$ poll. longi, $\frac{1}{2}$ poll. lati, figura humanis ſimiles, vtrinque in vreterem deſinunt, qui recta fere linea in veſicam vsque extenditur. Superius ſupra ſpinam vtrinque adiacet ren ſuccenturiatus, ex albo luteſcens, lentem maiorem figura et magnitudine referens.

Penis vsque ad (*c*) extra corpus prominens, intra corpus craſſior euadit, (*e*) et verſus dextrum latus incuruatur, deſinitque, vti videtur, in bina corpora, ex oblongo globoſa, (*ff*) quae pro teſtibus habeo. Vtrinque ad iſtos teſtes duo alia, pariter ex oblongo globoſa corpora, maiora, (*gg*) paulo inferius locantur, quorum vtrumque in tenuem appendiculam (*i*) terminatur, cuius finis infra teſtes ad penem eſt. Subſtantia tam horum corporum, quam appendicularum, glandulosa eſt; in corporibus cauitas perexigua obſeruatur, nullo liquore imbuta. Flatum in eam inmitens, non niſi ſemel accidit, vt ductum verſus renes excurrentem, diſtenderem,

Tab. VIII. Fig. 1.

cuius inſertionem aſſequi non potui. Haberem haecce corpora pro folliculis, moſchi odorem continentibus, ſi vel liquorem tali odore paeditum in iis deprehendiſſem, aut ſi odorem moſchi reliquis partibus fortiorem de ſe ſparſiſſent. Sed neutrum obſeruare licuit. Pluribus et magis exactis circa haec et vaſa ſpermatica obſeruationibus inſtituendis, tempeſtas nubila, breues dies, et locus obſcurus, quo diſſectiones faciendae erant, obſtiterunt.

Raii mus exoticus, et loco natali, et deſcriptione, noſtro reſpondet. Tantum proportio pedum longe alia in Raii deſcriptione explicatur, quam in noſtro deprehendi; Forte, quia Raiana deſcriptio ex pelle facta, vel ex Cluſio deſumpta fuit, de cuius deſcriptione Raius eandem ſuſpicionem mouet.

In Commentar. Ac. Sc. Paris. 1725 Sarrazinus murem, Moſchum redolentem, Americae incolam, deſcribit, a quo noſter omnino differt. 1.) Odorem non tam grauem noſter ſpirat, qui Anatomicum duabus vicibus in deliquium coniiciat; remedio enim vſtionis pilorum, quod Sarrazini cerebro tantopere conduxit, licet haud vſus ſim, erectus tamen manſi. 2.) Auriculis Americanus gaudet, noſter nullis. 3.) Oculi Americano magni ſunt, noſtro parui. 4.) In noſtro foramen, vrinae excretioni ſingulariter deſtinatum, quod in Americano obſeruatur, deeſt. 5.) Teſticuli et folliculi muris Americani non niſi oeſtri venerei tempore magnitudinem talem acquirunt, quae facile ſub ſenſus cadit, noſtri tempore, quo nulla oeſtri ſuſpicio eſt, magnitudinem fere maiorem obtinent. 6.) Quod certo de folliculis Americani muris aſſeritur, quod principia odoris Moſchi

contineant, de folliculis noſtri muris nondum aſſerere auſim. 7.) Calamo aromatico Caſanienſes mures non veſcuntur: Quapropter nec cauſa odoris Moſchi, quem ſpargunt, eſſe poteſt. 8.) Pedes anteriores Americani muris more aliorum huius generis animalium conformati ſunt, noſtri per membranas, breues licet, cohaerent Male vero Cluſium erroris argui exiſtimo, qui pedes poſteriores membranis munitos eſſe ſcribit. Haec expreſſio ſignificat: pedes poſteriores membranis cohaerere. Et forte pedibus poſterioribus membranas adnatas eſſe, idem eſt. Certe figura pedum, quam Sarrazinus fieri curauit, pedibus Caſanienſis muris ex aſſe reſpondet.

RVPICAPRA

CORNVBVS ARIETINIS.

Ruſſ. СТЕПНОЙ БАРАНЪ.

Chalmucc. ARGALI.

Auct. IO. GEO. GMELIN.

Tab. VIII Fig. 2. Ceruum capite, collo, pedibus, pilis et agilitate corporis refert. Maſculus, quem deſcripſi, trimulus erat. Altitudo $1\frac{1}{2}$ vln. Ruſſ. longitudo ab exortu cornuum ad caudam vsque $1\frac{3}{4}$ vlnarum. Cornua ex albo luteſcentia, aetate magis prouectis nigreſcentia, ſupra oculos ante aures prodeuntia, ad dimidium fere admodum rugoſa,

rugoſa, reliquam partem non niſi leuiſſimis rugis conſpicua, retro in circulum fere flectuntur, ita tamen, vt extremitas paululum ſupra et extra vertatur. Aures, quas animal plerumque erectas gerit, mediocriter latae, acuto apice terminantur. Pedes vngulis bifidis inſtructi, anteriores $\frac{1}{4}$ vlnae longi, poſteriores longiores. Anterioribus, recta linea extenſis, animal ſemper ſtare ſolet, poſterioribus, non niſi incuruatis, in plano horizontali incedit; curuaturam vero pro ratione plani, cui inſtat, dirigere videtur, ita, vt praecipitia conſcendendo eos in rectum fere extendat, quae opportunitas ob loca praerupta, quae inhabitare ſolet, a natura ipſi conceſſa eſt. Cauda breuis ceruinae inſtar. Sub collo paleare dependet. Color capitis et totius corporis gryſeus ad fuſcum vergens erat. Per medium dorſum, in natibus et pedum interna parte, vt et in ventre, luteſcens color, ad ruffum aliqualiter inclinans, obtinebat, ita tamen, vt in ventre pallidior eſſet. Hic color hybernae veſti conuenit: Pilos nempe non diu mutauerat; Veſtis autem aeſtiua vndique e luteo ruffeſcens eſt. Ferus erat, nec vel decem homines ad eum coercendum apti videbantur; cornubus enim peſſime ferit, viribus maximis pollens. Maximi ceruum iuniorem aequant; Cornua vero adultis in tantam molem excreſcunt, vt, menſura ſecundum curuaturam ſumpta, duas vlnas longitudine aequent, et 30. libras pendant.

Foemina masculo ſemper minor eſt, cum quo de caetero ipſi toto corporis habitu exacte conuenit. Cornua vero fert hirci inſtar, rectiora, nec multum rugoſa, paruae molis, tenuia, quae nec aetate molem multo maiorem acquirunt. Quam figura ſiſtit, bimula TAB. VIII. Fig. 3.

 erat,

erat, vt plurimum ruffeſcens, hinc inde cineraſcens. Veſtem nimirum aeſtiuam demum mutare incepit. Alias color ipſi cum maſculo communis eſt.

Circa Vſt-Kameno-gorenſe fortalitium in Sibiria, et montes, qui eius loci montibus connexi ſunt, magis tamen eos, qui ad Chalmuccos pergunt, verſantur, montium inprimis ad Buchturma fl. ſitorum amantiſſimae. Quadraginta leucas infra Vſt-Kameno-gorenſe fortalitium in littore Irtis orientali, quod Krasnoi-Iar vocant, terra ſalſa eſt; Eo ſaepiſſime et lubenter migrant, ſalis lambendi cauſſa. Curſu ſunt velociſſimo. Victus e graminibus. Autumno coeunt, vere pariunt, foetum vnum, quandoque et gemellos, edentes.

Erat eo tempore, cum in fortalitio Vſt-Kameno-gorenſi verſarer, maſculus ibidem bimulus huius animantium generis, qui morbo diu conflictatus, vitam miſerrimam egit. Hunc a Locumtenente, qui fortalitio praeeſt, ad ſectionem petii et obtinui. Parum quidem me iſta ſectione profeciſſe profiteor, quia temporis ratio, quam propoſitum nobis iter habere iubebat, effecit, vt feſtinanter admodum adminiſtrari debuerit. Vt de vita animalis adhuc proficerem, in venam iugularem externam amplam inciſionem feci, atque in ipſam Thermometrum immiſi, in quo ſatis diu ibi retento, mercurius ad 80 gradum caloris Therm. Delisliani eleuatus fuit.

In deſcriptione externarum partium nihil eſt, quod morer, cum iam deſcripto, niſi paruitate, in omnibus reſpondeat. Diſtantia inter penem et teſticulos 7 poll. erat.

Ventriculus totam fere cauitatem abdominis occupat. E quatuor vero conſtat ventriculis, quorum maxi-

maximus is eſt, de quo iam dixi, et in quem oeſophagus inſeritur. Membranoſus eſt et columnulis plurimis muſculoſis farctus. Hunc proxime ſequitur alter, multo minor, qui a priori membrana interna in altum eleuata diſtinguitur. Eius ſuperficies plurimis cellulis ſexangularibus obſita eſt. Tertius pariter minor, interne rubens, plicis plurimis conſtat, quae numeroſiſſimis papillulis denſe ſtipatae ſunt. Quartus duobus iam dictis aliquantum anguſtior, ſed longior, interne laeuis et rugoſus eſt. Inteſtina tenuia 55 pedes, craſſa tertiam tenuium partem longa. Colum plus ſepties reflectitur. Ad inſertionem ilei in coecum valuula eſt, valuulae coli in homine analoga. Coecum vero, vltra pedem longum, in proceſſum abit vermiformem, amplitudine quoduis tenue inteſtinum ſuperantem, non vltra 2. poll. longum. Hepar duobus primariis lobis maioribus conſtat, quorum tamen dexter, cui veſicula fellea, tres pollices longa, cylindroidea, ſelle virideſcenti repleta, adhaeret, maior eſt. Praeter hos alius eſt, triangularis, oblongus, cauae accretus, et lobulus Spigelii ſatis inſignis. Splen 8 poll. longus, in medio, vbi latiſſimus eſt, 4 poll. latus, ventriculo arcte adhaeret. Renes humanis ſimiles, 3 poll. longi, duos lati. Vreteres vrachum ſuperſcandentes poſteaque rurſus infra eum flexi, recta fere linea ad veſicam pergunt, inde vero oblique non procul a collo veſicae inſeruntur. Renes ſuccenturiati ouales fere, verſus internum latus auricula quaſi, triangularis figurae, ad venam cauam arcte adhaerente, donati. Cauitatem in ſe habent, quae flatu diſtendi poteſt. Penis, digitum mediocrem craſſus, anfractuoſo admodum itinere verſus

pubem

pubem pergit, et, ſi in rectum extenditur, ad duos pedes facile longus eſt. Extra corpus vero dimidium circiter pollicem prominet. Praeter ligamentum ſuſpenſorium duo adhuc erant, ex oſſibus pubis prodeuntia, et paulo ante musculos erectores ſupra glandulam quandam oblongam, maximam, tres circiter pollices a collo veſicae diſtantem, terminata. Ad collum veſicae duae proſtatae, ſatis ſenſibiliter diſtinctae. Vas deferens in veſiculas partim ſeminales, quae glanduloſo cuidam corpori magis comparari poſſunt, partim in ipſam vrethram ad radicem eius abit. Cor dimidium pedem longum. Auriculae ad oras pulchre laciniatae. Pulmonum duo praecipue lobi, quorum ſiniſter dextro maior eſt. Vterque ſuperius quatuor lobulos adhaerentes habet, ſiniſtri vero lateris maiores ſunt. In vno lobulorum ſiniſtri lateris veſicula transparens fuit, $1\frac{1}{2}$ poll. longa, et 3 poll. lata, non niſi aëre diſtenta. Vomicae plures, pus non fundentes, pulmones hinc inde occupabant.

DE-

DESCRIPTIO ANIMALIS MOSCHIFERI, KABARGA DICTI.

Auctore IO. GEO. GMELIN.

Inter praecipuos labores, Kraſnoiarii ſuſcipiendos, hunc mihi praeſcripſi, vt, quae ibi de Animali Moſchifero comperire poſſem, diligenter annotarem, cum inter cognita et deſcripta adhuc animalia pauca ſint, quorum descriptiones emendatione tanta egere videantur, ac hoc ipſum animal. Ita vero votis meis fortuna fauit, vt tria huius generis animalia, duo maſcula, vnum foemininum, ope Praefecti huius loci ad disquiſitiones meas obtinuerim, e quibus deſcriptionem ita adornabo, vt quae vtrique ſexui communia, quae propria-obſeruauerim, probe inter ſe diſtinguam, parum occupatus in refellendis aliorum erroribus, qui descriptione fideli et ad viuum facta ſponte collabuntur.

Delineationem animalis nullam fieri curaui, quia ea, quam Isbrand Ides dedit, meliorem ab exemplis mortuis deſumi poſſe non ſperaui. Caeterum is in Isbrandi figura praecipuus defectus eſt, quod venter nimis prominet, et animal ſine pilis repraeſentatur. Refert hoc animal forma externa capreolum, intellige auriculis longis, collo breui, pedum longitudine, et cauda, vel nulla, vel vix conſpicua. Capreolo vero ſtatura inferius

 eſt.

eſt. Illud enim, quod Grewius et ex eo Raius deſcribit, e maximis eſt, nullo eorum, quae apud me habui, ad talem magnitudinem accedente. Intellexi vero a venatoribus parum iis maiora reperiri. Dimenſiones hae ſunt:

	Ped.	Poll.
Longitudo ab extremo roſtro ad finem oſſis ſacri	3	3
- - - capitis ab extremo roſtro ad medium vsque interſtitium inter et retro vtramque aurem - - - - -		7 ½
- - - colli ab eodem interſtitio ad finem vsque vertebrarum colli. - - -		7
- - - Auricularum a radice ad ſummum vsque		4
Frontis latitudo - - - - - - -		fere 3
Diſtantia extremi roſtri a medio inter oculos interſtitio - - - - - -		3
- - - internorum oculi canthorum inter ſe		2 ½
- - - auricularum ab externis oculorum canthis		2
Longitudo pedum anteriorum ab initio armorum ad extremum vsque pedem - -	1	3
Longitudo pedum poſteriorum ab initio femoris ad extremum vsque pedem - -	1	9

Eandem fere proportionem in hisce tribus, quae luſtraui, animalibus deprehendi, niſi in capite, quod in foemella breuius erat, roſtroque magis obtuſo gaudebat. E quo colligitur, auriculas et caput nimis breuia, collum vero nimis longum a Grewio deſcribi, cuius cauſa fortaſſis in eo latet, quod deſcriptio Grewiana e pelle facta ſit.

Pes

Pes vterque profunde fiſſus in quatuor vngulas, duas anteriores 1 $\frac{1}{8}$ poll. longas, in baſi $\frac{1}{4}$ poll. latas, et totidem poſteriores, pollice aliquantum longiores, in baſi vero latiores quadrante pollicis, et vel in mortuo animali conſpici poteſt, illud viuum, quando in ſolo horizontali incedit, vngulis etiam poſterioribus neceſſario inſiſtere.

De cauda, quid ſtatuam, hæreo. In duobus maſculis, in quibus ſollicite in eam inquiſiui, nihil eiusmodi obuenit, pilis vero circa anum diductis teretiuſculum quoddam corpus in conſpectum prodiit, 1 $\frac{2}{8}$ poll. ultra anum eminens, baſi ſua $\frac{2}{4}$ poll. latum, atque in cuſpidem deſinens, oſſi ſacro adnatum, carne tantum et cute, nullis vero pilis tectum, rubri coloris. Cum in primo huius generis animali hoc viderem, credidi, caudam forte auulſam fuiſſe, altero vero eodem modo ſe habente, non dubitaui, quin haec conſtitutio naturalis ſit, temere mutilationem partis cuiusdam a diuerſis venatoribus in eodem loco eodemque modo factam ſupponi exiſtimans; ſancte inſuper vterque venator affirmauit, animalia omnino integra fuiſſe apportata. Sed ecce nouum ſcrupulum! Luſtraui foemellam, inque ea idem quidem corpus, ſed pilis tectum, inueni. Rem igitur in ſuſpenſo relinquo, in eam pronus ſententiam, oſſa coccygis maris pilis nuda, foeminarum piloſa eſſe.

Quod ad colorem animalis, is in dorſo et collo vtplurimum fuſcus eſt, cinerei mixtura aliquantulum alteratus. Tibiae et pedes intenſe fuſco colore gaudent. Sub maxilla inferiori ad mentum vsque, vt et inferius ad auriculas et in interna femorum parte color gryſeus obtinet. Gulam linea fuſca, alba vtrinque faſcia cincta,

 per

per totam ſuam longitudinem exornat, eademque fuſca linea ſuperius in duas partes diuiditur, mentum album vndique cingens. Pectoris et ventris ſupremi colore fuſco cinereus eſt, pubis vero et partium, anum et pubem interiacentium, cinereus eſt ſine fuſci mixtura.

Pilis hoc animal tegitur copioſiſſimis et longiſſimis. Pili capitis et crurum vltra dimidium pollicem, dorſi et ventris 2 ½ poll. pubis vero ad 4 poll. longi ſunt. Omnes in genere pili vltra tres quartas partes a radice candidiſſimi ſunt, inde fuſco colore tincti, extremo apice vel candentes, vel luteſcentes. Licet pili craſſi ſint, nec ſetae porcinae craſſitie multum cedant, et pilos capreoli dicti ſuperent, mollioris tamen et tenuioris ſtructurae ſunt, atque per totam longitudinem a radice vsque ad apicem per breuia interualla criſpantur, aut, vt Grewii verbis vtar, flexu reflexuque quodam vndante criſpi ſunt, vti ceruino generi familiare eſt. Ad quoduis latus inferioris maxillae ſingularem ceſpitem pilorum craſſorum, breuium et rigidorum, deſcribit Grewius, cui ſimilem inuenire non potui in vllo horum animalium. In vno maſculo in ipſo mento quinque vel ſex pilos per totum albos, reliquis pilis multum eminentes, atque in angulo maxillae inferioris, qui vltra 2 poll. ab angulo oris diſtabat, vtrinque pilum ſingularem, reliquis 2 poll. eminentem, per totam ſuam longitudinem atrum vel atro fuſcum, extremo apice, qui albus erat, excepto, conſpexi. In alio pariter maſculo nec hos nec a Grewio deſcriptos pilos vidi. Eminebant vero vtrinque infra canthum oculi inferiorem duo pili longiſſimi, fuſci, atque ſupra vnamquamque orbitam ſuperiorem oculi in medio

vnus

vinus inſuper paulo breuior pilus exiit. In foemina rurſus aliis in locis ſingulares eiusmodi pili erant. Vtrinque ad rictus latera albi, et circa naſum hinc inde fuſci pili, reliquis paulo longiores, eminebant. Adeoque concludo, haec in omnibus variare indiuiduis, imo exiſtimo, talia nec in aliis animalium generibus deeſſe, cum vero nimis curatam inſpectionem requirant, non obſeruata eſſe.

Vtriusque ſexus animal in inferiori maxilla octo dentibus inciſoribus, quorum duo extremi ſatis parui ſunt, et ſex vtrinque molaribus, in ſuperiori nullis inciſoribus, ſex vero vtrinque molaribus munitur. Hunc numerum in omnibus conſtantem inueni, exiſtimo vero, Grewii fallaciam ex eo ortum trahere, quia molares dentes ita arcte ſibi inuicem opponuntur, vt diſtinguere eos, niſi praeuia coctione, difficile ſit.

Maſculinus ſexus a foeminino inſignibus notis differt. 1) Totius corporis mole maiori. 2. Roſtro magis acuto. 3. Duobus dentibus exertis, e ſuperiori maxilla, ſitu aprinis dentibus ſimili, egredientibus, ſubſtantia ebur referentibus, clauſo ore vnum circiter pollicem extra os prominentibus, retrorſum incuruis, in baſi vltra quadrantem pollicis latis et in cuſpidem terminatis, non teretibus ſed falciformibus. 4. Ventre eo in loco, vbi penis eſſe ſolet, dimidium circiter pedem infra cartilaginem enſiformem, prominente. Referebat vero illa prominentia tumorem, ouo gallinaceo magnitudine parum cedentem, pilis vndique hirtum, qui anterius in corpus quoddam, balano penis ſimile, miniacei fere coloris, piliſque albis centrum verſus eiusdem corporis directis,

ibidemque conuergentibus, veſtitum deſinebat. Pilis illis diductis duo in illo corpore oſtia apparent, vnum ſuperius, oblongum et maius, area depili cinctum, alterum inferius rotundum et minoris diametri, cuius orae circum circa pilis longiſſimis rigidis et erectis muniuntur. Vtrumque horum foraminum ſetam admittit, quarum ea, quae ſuperiori foramini intruſa fuit, in ipſo tumore deſinere viſa eſt. Imo preſſo tumore per illud foramen fuſca quaedam et pinguis materia exiit, moſchum redolens. 5. Teſticulis, qui ultra 1 poll. ſub nominato tumore et 2 poll. et $\frac{3}{4}$ poll. ſupra anum, ſcroto exterius eleganter rubente, piliſque albis raris et criſpis obſito, includuntur, et reliquo ventre eminent. Denique extremitas coccygis pilis nuda notam diſtinctionis in mare exhibet.

In foemella duas papillas obſeruaui, quae licet cute quadrantem fere poll. eminerent, ita tamen inter pilos deliteſcebant, vt, niſi hos novacula caute abſcidiſſem, papillae iſtae me forte adhuc laterent. Sunt vero tenuiſſimae, nec culmo craſſiores, a cartilagine Xyphoidea decem fere, a vulua 3 $\frac{1}{8}$ poll. diſtantes. Vulua plus octaua pollicis diametro continet. Sub vulua immediate anus eſt, cui appendicula oſſis coccygis, vti dixi piloſa, imminet.

Vmbilici veſtigium in neutro ſexu externe apparuit.

Caro huius animalis huius loci incolis in eſcam cedit. Maſculi caro moſchi leuem odorem ſpirat, foeminae vero omni odore expers eſt. Quae in Martinii Atlante Sinico de moſchi e carne huius animalis praeparatione exſtant, tam vana commenta ſunt, vt de iis ſilere ſatius ſit.

Pro-

Progredior ad earum partium deſcriptionem, quae non niſi facta diſſectione conſpici poterant. Separata cute abdominis vmbilici veſtigium vidi quinque pollices infra cartilaginem Xyphoideam, adeoque vmbilicum quinque pollicibus altius tumore illo ſitum. Cutis huius animalis tenuiſſima eſt, nec pilis firmum fulcrum praebet; vix enim tacti defluunt. In ſuſpenſo tamen relinquo, an conſtitutio haec naturalis ſit, aut an potius a diuturna congelatione horum animalium et regelatione inducta.

Muſculi abdominis nihil peculiare habebant. Oblique deſcendens a 5 - 11 coſtis quinque proceſſibus digitatis atque a coſtis ſpuriis oriebatur. Rectus quatuor habebat inſcriptiones tendineas, quibus etiam transuerſus ornatus erat. Sub muſculo oblique aſcendente vtrinque ad eum locum, vbi funiculus vaſorum ſpermaticorum abdomen egreditur, muſculus carneo principio oritur, non vltra quadrantem poll. latus, qui poſtea turgidior factus vtrinque tumorem verſus illum, externe in abdomine conſpicuum, aſcendit, quem fibris ſparſis vndique cingit. Excipiendae tamen ſunt fibrae inferiorem verſus partem tumoris progredientes, quae cum ſuperioribus non coniunguntur, ſed recta balanum verſus procurrunt, et circa inferius eius orificium terminantur ſub alio quodam muſculoſo corpore, balanum vndique cingente, quod cum ſerie illa fibrarum a tumore eum in locum extenſarum ita cohaeret, vt ſine laceratione ſeparari nequeat. Haec diſpoſitio efficit, vt tumore conſtricto ſuccus aliquis exprimatur per foramen ſuperius, in balano ſitum, impedit vero, ne eodem tempore per inferius foramen

foramen aliquid effluere poſſit, illud enim neceſſario conſtringitur.

Tumor, de quo hactenus ſermonem feci, folliculus eſt moſchum continens, cuius adeo ſitus plane alius eſt, ac qui adhuc traditus fuit; omnes enim ſcriptores, quos hac de re conſului, Miſſionariis Danicis, in ora Coromandelina verſantibus, exceptis, qui pro teſticulis habent, vno affirmant ore, folliculum moſchiferum vmbilici quandam excreſcentiam eſſe, vel tumorem, plane vt olim de Tajacu, ſiue Apro Mexicano moſchifero, viri eruditi diu ſenſerunt, quorum vero errores D. Tyſon ſolide excuſſit. Sed vel ex hoc exemplo patet, conſuetum eſſe plebi, omne illud pro vmbilico vendere, quod in aliquo inferiorum partium, vel ventris, vel dorſi, protuberat, quando id nec peni nec teſticulis comparari poteſt, quo minus vitio illis nimio verti poterit, qui huius animalis folliculum in ventre ſitum, pro vmbilico habent. Indicaui ſupra, quo in loco rudimenta vmbilici conſpexerim, ex quo ſatis evidens eſt, folliculum diſtinctum plane corpus ab vmbilico eſſe.

Vt ſitum folliculi eiusque nexum cum aliis partibus diſtinctius notem, licet in ſequentibus vberius id expoſiturus ſim, hoc loco tantum moneo, eum poſterius, et ſiniſtra ſui parte, cum vrethra connecti. Qualem cum pene habeat connexionem, adhuc dicere nequeo, quia eius ne veſtigium quidem adhuc vidi; tantum abeſt, vt penis folliculi corpus tranſeat, prout recens quidam ſcriptor contra vulgarem ſententiam aſſerere auſus eſt. Videtur certe natura, cum ſexui maſculino in hoc genere animalium tot inſignes notas conceſſerit, quibus

a foemi-

a foeminino facillime diſtingui poteſt, nobiliſſimam partem, qua eſſentialis ſexus differentia ſita eſt, caute celaſſe, ſuperfluorum non amans.

Separata cute huius folliculi et muſculo ſupra deſcripto, membrana apparet, membranae internae ventriculi gallinae ſiccati conſiſtentia reſpondens, adeoque firma et attactu duriuſcula, coloris amethyſtini et pro vario radiorum ſolarium reflexu hinc inde aurei, qua inciſa cauitas interna apparet, materiam illam a ℨiß ad ℨiiß continens, quae moſchus dicitur. Erat vero illa materies fuſci coloris, eique multi breues pili vel paleae immiſcebantur. Conſiſtentia erat Electuarii non plane ſiccati, nec enim fluida erat, nec plane ſolida. Attactu erat pinguis, illudque pingue preſſo folliculo e ſuperiori balani foramine exit. Moſcho e folliculo exempto facies interior folliculi apparet, quae membranis plurimis, a membrana interna folliculi in altum ſurgentibus vndique ſcatet, prouti illud in fig. I. Litt. A apparet in qua folliculus cum vrethra adhuc cohaerens et apertus, optime ad viuum expreſſus ſiſtitur. (a) tenue lignum eſt, quod per ſuperius balani oſtium (*α*) in folliculum vsque facillime et ſine vlla vi immiſi. Plura non habeo, quae de hoc folliculo dicam; Non vidi glandulas illas, quas Lucas Schroekius ad meatus moſchiferi orificium ſe obſervaſſe ſtatuit. Adhibui microſcopia eaque bona, vt glandulas diſcernerem, probabile etiam eſt adeſſe, ſed viſum meum fugerunt. Vaſa ſanguifera vidiſſe mihi videor, nec tamen diſtincte, multo minus igitur, vbi origines moſchi ſint, percepi. Tab. IX. Fig. 1.

Aperto abdomine ventriculus totam ſere eius cauitatem implere videbatur. Eius vero diſpoſitio plane talis eſt, vti in Rupicapra ſuperius deſcripta, imo vt
Fig. 3. in omnibus ruminantibus. (A) eſt venter magnus, et (a) oeſophagus, illum ingrediens. (B) reticulum ſeu alter ventriculus. (C) omaſus ſeu tertius ventriculus. (D) Abomaſus ſeu quartus ventriculus in inteſtinum duodenum (b) terminatus. Primus ventriculus omnium maximus eſt, et aperto abdomine nondumque diductis partibus ſolus conſpicuus. Tres quaſi appendiculas caecas appenſas habet, quarum vna (c) longiſſima eſt, et reliquae huius ventriculi parti ad dextram ſita. Secundus omnium ſupremum locum obtinet, atque in ſiniſtra abdominis parte ſitus eſt. Tertius ſecundo inferiorem ſitum obtinet, primus hos ordine ſequitur, quartus omnium infimum locum obtinet. Omnes hi ventriculi materia viridi, inſtar pultis ſpiſſa, repleti erant.

Inteſtinorum pauca pars, nec niſi ea, quae in infimo ventre ſita eſt, et coli quaedam pars, in ſiniſtro hypochondrio eminens conſpicitur, quando abdominis viſcera in ſitu ſuo naturali relinquuntur. Inteſtinum duodenum plus vlna longum, in fine ſuo pancreaticum et choledochum ductus, diuerſis orificiis, ſibi inuicem proximis, hiantes recipit. Ieiuni atque ilei nullam potui differentiam animaduertere, ideoque eorum fines ſingulatim exponere nequeo. Vtrumque faecibus erat repletum, vtrumque ſtriis longitudinalibus albis $\frac{1}{12}$ poll. latis, in tota ſuperficie breuibusque interuallis vndequaque cinctum. Adeo vtriusque inteſtini idem habitus fuit. Liueſcebat vtrumque a corruptione, quo factum

factum eſt, vt ſtriae illae albae, quas pro ductibus pinguedinoſis habeo, liueſcentem ſuperficiem tegentes, inteſtino vtrique faciem plane peregrinam induerint. Ilei in coecum inſertio nihil peculiare habebat. Aliquid valuulae analogum aderat, vti in homine. Coecum ratione habita ad coecum humanum, ſatis exiguum erat. Proceſſus vero vermiformis vltra ½ pedem longus. Horum nexus et configuratio fig. 4. ſiſtitur. (A) coecum, (*a*) ileum, (*bbb*) proceſſum vermiformem, (*cc*) coli initium exhibent. Colum, proceſſus vermiformis et rectum eandem faciem habebant, ac ieiunum et ileum, idque in omnibus illis tribus animalibus, quae inſpexi. Inteſtina tenuia a pyloro ad inſertionem vsque ilei duodecim vlnas craſſa, ſex vlnas longitudine aequabant. Continebant vbiuis excrementa, pilularum in formam conglobata.

In arteriarum et venarum meſaraicarum diſtributione nihil ſingulare animaduerti.

Hepar in dextro hypochondrio ſitum, paruae molis, ſi comparetur cum hepate aliorum animalium, in duos tantum lobos diuiditur, quorum dexter ſiniſtro dimidia parte minor eſt. Ligamentorum et vaſorum ſanguineorum eadem diſpoſitio, ac vulgariter eſſe ſolet. Veſiculam felleam in primo, quod diſſecui, animali indagans nullam inueni, nec eo tempore negligentiae in inquirendo me accuſaueram, imo bene cum manſuetudine animalis, quam varii Autores tantopere praedicant, conuenire exiſtimaui. Verum in duobus reliquis aderat veſicula fellea, quam quidem diu non videre potui, licet locum, vbi ſita erat, ſaepius antea manibus contrectauerim et

 oculis

oculis meis vſurpauerim. Veſicula enim in vtroque (et puto etiam in tertio) horum animalium plane collapſa, albentis cuiusdam membranae ſpeciem exhibebat, diametro pollicem maioris digiti non multum ſuperans, fellis vero ne guttam quidem continens.

Splen in ſiniſtro hypochondrio ſitus maioris molis erat, ac eſſe ſolet. Longitudine enim 4½ poll. latitudine ſuperius 2, inferius 3 poll. aequabat. Coloris erat e liuido rubeſcentis, ſubſtantiae pulmonum fere.

Renes (BB) humanis erant ſimiles, dexter vero
Fig. 1. et 2. ſitum altiorem ſiniſtro obtinebat. Arteriae (*bb*) et venae (*cc*) emulgentes, vtrinque aortae (D) et cauae (E) connectuntur, atque intra renes ſe ſurripiunt, vti figura exprimit, qua in diſtributione non ſine ratione factum eſſe exiſtimo, quod vena emulgens dextri lateris arteriam emulgentem eiusdem lateris, et emulgens ſiniſtra aortam ſuperaſcendant. Vreteres (*dd*) recta, nec notabiliter inflexi, in medio fere fundi veſicae (*c*) implantatur.

Omentum ventriculum tanquam in marſupio continebat, et parum habebat pinguedinis, quin pellucidum fere vbique erat.

Pancreas 4½ poll. longum 1 fere latum, conglomeratae glandulae faciem obtinebat, ductus vero pancreaticus tenuiſſimus erat.

Aortae et cauae ſitus in abdomine non multum abludebat ab eo, qualis in homine eſt. In Kabarga foe-
Fig. 2. mina differentiam inueni, quae accidentalis ſit, an ſexui particularis, determinare non audeo Aorta enim (D) ſub vena caua (E) perpetuo deliteſcit, nec prodit, antequam

tequam in iliacas (FF) diuidatur, quarum dextra cauam mox ſuperaſcendit.

Cor 4 fere poll. longum, in baſi $2\frac{1}{2}$ poll. latum eſt. Vaſorum et auricularum diſpoſitio, vti in oue et huius generis animalibus.

Pulmo dexter in quatuor lobos diuiſus, ſiniſter in duos. Hiſce interiacet vnus in medio thorace. Trachea tota quanta in omnibus ſpuma repleta erat.

Thymus in ſiniſtro magis latere ſitus, Carotidem vndique arcte amplectitur, inferius bifidus, vtroque tenui ramo ad carotidem ſito, ſuperius eo in loco, vbi carotis in externam et internam diuiditur, a ſiniſtro maxillae inferioris angulo, quem arcte amplectitur, figuram lunatam obtinet, cornubus ſurſum flexis. Cartilagini thyroideae aut potius muſculis hyothyroideis glandula incumbit thyroidea, vnum poll. longa, ſuperius anguſtior, inferius latior; Eius ſubſtantia inter glandulam et pinguedinem ambigit. Verſus ſiniſtram cartilaginis thyroideae profunde ſe inſinuat, ibidemque cum thymo arctiſſime cohaeret et confunditur.

In quarto annulo aſperae arteriae poſterius muſculus quidam carneo ſed tenui nec $\frac{1}{8}$ poll. craſſitie excendente principio ortus, oblique *antrorſum* flectitur, eandemque in decurſu retinens craſſitiem in primo tracheae annulo ad latus ſiniſtrum fine admodum craſſo et protuberante ſedem figit, in loco inſertionis a muſculo ſterno-thyroideo tectus.

Muſculos oculorum ſequentes obſeruaui: 1. anterius ſitus, teres, tenuioris calami ſcriptorii craſſitie, in medio orbitae in peculiari foramine oſſis quarti maxillae ſuperioris

rioris, quod proceſſum, antrum Hyghmori condentem, conſtituit, originem ſumens, carneus, oblique corneam verſus aſcendit, et anterius ad marginem eius carnoſo fine inſeritur. Praeter hunc muſculum octo adhuc ſunt, e fundo orbitae enati, quorum quinque priores globum oculi vndique cingunt, atque in tunicam albugineam deſinunt, tres reliqui ſub illis locantur, neruum opticum circum circa cingentes, et in fundo bulbi terminati. Eorum, qui bulbum oculi cingunt, tres anterius ſiti, quorum anterior trochlearis eſt, et tendinem in corneam vsque mittit. Trochlea quam tendo huius muſculi tranſit, parallelogrammum refert, in breuiori latere vtrinque in lunulae formam exciſſum. Duo vero poſterius locantur, nec tendines ſuos tam alte mittunt, vti trochlearis.

In partibus genitalibus, quicquid diſcernere potui figurae adiectae, optime ad viuum expreſſae, monſtrant. Maſculinae partes mihi videntur tam peculiares, vt ad omnem eorum apparatum evoluendum multa mihi opera opus eſſe videatur, nec, fateor, mei in ſecando exigui profectus huic eleganti naturae artificio penitius euoluendo pares fuerunt. Diu quaeſiui, donec ipſum penis corpus reperi, adeo ſolicite reconditum eſt. Vrethrae hiatum, (β) vti ſupra dixi, in balano, tumori accreto, ante ſectionem adminiſtratam, facillime vidi, ſetam etiam per Fig. 1. eum ad (*e*) vsque intrudere potui. Vidi etiam veſicam vrinariam, (C) quin ex illa ſpiritum ad locum (*f*) vsque facillima opera immittere potui. Vltra vero deſignata loca nec flatus, nec ſeta, tranſibant. Lotium, quo veſica plena erat, Moſchum redolens, vltra locum eundem (*f*), licet ſummam vim adhibuerim, adigere non valui.

valui. Ipſum canalem a (β) ad (*g*) vsque pro vrethra quidem habebam, ſed reſiſtentia inter (*e*) et (*f*) inſuperabilis erat. Satis diſtincte de caetero cerni poterat, corpus, a (β) ad (*e*) et a (*g*) ad (*f*) extenſum, canalem tantum eſſe, nec enim quicquam aliud diſcernere poteram. Quid denique viderim, exponam. Aperui vrethram ad (*i*), continuando ſectionem verſus veſicam, donec ad locum reſiſtentiae (*e*) peruenerim. Canalis ibi non ita peruius erat, ac ante, ſed corpori (*ef*) obſcure rubenti, circulis concentricis vndique cincto atque in tenuiſſimum filum (*e*K) in vrethram hians deſinenti, vndique adhaerebat. Corpus hoc corporibus conſtat cavernoſis, ſepto inter ſe diſtinctis, atque in extremitate (*fl*) quae prope veſicam vrinariam eſt, tubere quodam inſigne, quod capiti gallinaginis aliorum animalium reſpondet, et apertum cauitate intus donatur, in qua nullum vidi liquorem, erat vero membrana, qua cauitas cincta eſt, inſtar cribri innumeris poris pertuſa. Satis puto iam cauſae eſſe, vt corpus (*ef*) penem eſſe pronunciem. Veſiculae ſeminales (*bb*) ad tuber (*fl*) poſterius ſitae erant, nullum vero ductum in illud productum diſcernere valui, licet, quin ſit, non dubitem. Id interim euidentiſſimum eſt, corpus (*Kf*) ſiue penem in oeſtro venereo ita explicari, vt et foramine vrethrae (β) prodeat. Cui enim alias vſui inſeruiret? Imo nihil eſt, quod tranſitui remoram iniiciat. Arteriae ſpermaticae (*mm*) vtrinque ex aorta progrediuntur, in vno horum animalium praeter conſuetam arteriam alia adhuc (*n*) ex hypogaſtrica ſiniſtri lateris procedebat. Venarum ſpermaticarum (*oo*) vtraque in venam cauam abibat,

nec,

nec vllam connexionem cum emulgente ſiniſtra vidi. Vas deferens (*ppp*) vtrinque ex epididymide (*qq*) ſui lateris ortum, progreſſum habuit ſolennem, atque in veſiculis ſeminalibus (*hh*) terminabatur. Corpus Highmori (*rr*) inſigne glandulae fere conglomeratae ſpecie.

Quam occulte natura in organis virilibus huius animalis fabricandis proceſſit, tam libere et aperte in fabrica partium alterius ſexus ſe geſſit. Vagina vteri, Fig. 2. anterius collo veſicae (*i*) connexa, 1½ poll. longa, nullis rugis conſpicua, neque clitoride neque nymphis munita, in vterum (A) tenuem, membranaceum deſinit, in cuius orificio interno nullas valuulas diſcernere potui, adeo vt tanquam continuus cum vagina canalis, eo in loco tantum aliquantiſper dilatatus, conſiderari mereatur. Poſterius in collum anguſtum (*e*) abit, qui in duos ramos ſiue cornua (*ff*) curuatur, quorum vtrumque ſeſe coarctando et varios gyros efformando ad ouarium (*gg*) ſui lateris, quod piſum magnitudine non excedit, pergit, et tubulo anguſtiſſimo, in extremitate peruio, terminatur. Adeo tranſitus vbique peruius erat, vt quaecunque in figura delineata ſunt, adhuc recenſita, omnia per vuluam tubulo inflari potuerint. In vagina dimidii circiter pollicis a vulua diſtantia, duae erant lacunae, quarum altera oblique in collum (*i*) veſicae (C) terminabatur, altera ſub interna vaginae membrana pollicem circiter verſus vterum decurrit, atque prope eius orificium internum, ſeu, vt aptius dicam, in eius collo corpori cuidam glanduloſo confunditur, ibidemque terminatur. Vterus quoad ſitum ab aliorum animantium vteris non differt, veſicam (C) quae ad latus reclinata, in

in figura ſiſtitur et inteſtinum rectum (G) interiacens, ligamentisque conſuetis firmatur. In vaſorum ſpermaticorum diſtributione nihil ſingulare occurrit. Arteria ſpermatica dextri lateris, ſiniſtra multo inferius ſita, ex aorta (D) progrediebatur, atque mox cauam (E) ſuperſcandens, eminentiam quandam eius, (*b*) quae in ipſo illo loco eſt, vbi vena ſpermatica (o) ſiniſtri lateris ingreditur, fere tangit, mox funiculo vaſorum ſpermaticorum inuoluta. Spermatica vena ſiniſtri lateris id peculiare habet, vt ſub aorta progrediendo in parte poſteriori cauae implantetur.

Quae de ſceleto dici adhuc merentur, quia e ſceleto Petropolin miſſo quauis occaſione exacta deſcriptio fieri poteſt, ſpecialius recenſere ſuperſedeo. Clauiculae nullae. Sex vertebrae colli, quatuordecim dorſi et ſex lumborum. Oſſa pubis omnino peculiaria ſunt et anterius per cartilaginem iunguntur, e tribus cruribus conflatam, vno longiori, duos pollices longo et vtrumque os pubis interiacente, atque duobus, ab hoc longiori vtrinque ad oras oſſis pubis productis. Spatium nimirum illud, quo oſſa pubis iunguntur, non vti in homine, aliquot lineas tantum, ſed duos pollices longitudine comprehendit; adeo ſolicite natura partes genitales cuſtodiuit, vt quod foemininis partibus valuularum vel aliarum artificioſarum machinarum apparatu decederet, per ſolidas haſce partes compenſaretur. Valuulae forte, ad vteri humani orificium internum ſitae, datae tantum ſunt, vt aërem arceant. In hoc animali oſſium pubis ſingulari ſtructura eidem rei cautum eſt. In pedibus anterioribus calcaneum longitudine tam humerum, quam vlnam et radium

ſuperabat. Digiti quatuor, quorum mediis vngulae anteriores, extremis poſteriores affiguntur, duabus ſinguli phalangis conſtant. Inter oſſa pedum poſteriorum tibia omnium longiſſima eſt, os femoris et calcaneum ordine ſequuntur. Oſſa humeri, cubiti et calcaneum anteriorum ſimul ſumpta 18 poll. Oſſa femoris, tibiae et calcaneum pedum poſteriorum 21. poll. longa erant.

Degit hoc animal in meridionalibus Ieniſeae, fluuii, ad lacum Baikal, ad Argunum fl. et fluuiis in Argunum labentibus, atque in pinetis montoſis commoratur, raro exinde, niſi veris tempore, prodiens. Inceſſu gaudet Capreae Plinii analogo. Hominum conſortium admodum fugit, ſolitudinis amantiſſimum. Quando venatores illud proſequuntur, in ſummis rupibus ſibi aſilum quaerit, quo nec venatoribus nec canibus facile ire licet. Idem animal in confiniis ſinicis regnum Tangut verſus copioſe verſari dicitur. Moſchus vero animalium Sinenſium et Tanguticorum multo praeſtantior odore et decuplo fere pretioſior eſt

OBSER

OBSERVATIONES
QVAEDAM
NIDOS ET OVA AVIVM
CONCERNENTES.

AVCTORE GEO. WILH. STELLER.

Commodum illud, quod ad dignoſcenda auium genera et ſpecies ex nidorum ouorumque obſeruatione ſedula in Ornithologiam redundaturum crediderunt quidam, nimis longe petitum, incertum et omnino nullum eſt; namque modus generandi, ipſaque oua, in piſcibus et auibus, tantum lucis non afferunt, quantum fructus in plantis continuo affixis, nec ſeparabilibus plantarum cognitioni.

Neque vnius generis aues nidos, vno eodemque loco, forma, materia et modo ſtruunt. Aquilae et in rupibus et ſuper arbores nidificant. Hirundines aeque in fiſſuris littorum nidos collocant, eosque e gramine et limo haud ſemper compingunt, verum ex alia quoque materia eos interdum conſtruere ſolent pro diuerſitate locorum, quam circumſtantiae loci et temporis ſuppeditant. Deinde et nihil certi ob eam cauſam inde petitur, quod diuerſorum generum aues vno eodemque loco vniformes nidos ex vniformi materia fingunt; quae vero interdum ſingularia ſunt, vni ſaltim ſpeciei ſingularia ſunt, vt nidus edulis Hirundinis Sinenſis, Bontii dictae, nidi penſiles e ſalicum quarundam pappis diuerſorum generum auibus communes, vt Galbulae et Salicariae.

Ouorum forma, color, magnitudo, numerus, ſubſtantia interna, plura promittere videntur illi, qui oua auium ſingula per tranſennam adſpicit; verum mihi vnius auis oua quamplurima inter ſe collata ſecundum haec attributa omnia valde et nimium differre obſeruata ſunt, vt deinceps in hiſtoria ouorum Lommiae et Graculi palmipedis apparebit.

Forma inſuper ouorum eadem pluribus diuerſorum generum et ſpecierum auibus communis eſt, color itidem ſaepe in vnius ſpeciei auium ouis vel remiſſior, vel intenſior, imo plane alius et diuerſiſſimus, vt Lommiarum et Graculorum exemplo clarum erit. De magnitudine idem valet. Numerus et magnitudo pro aetate, climate et foecunditate auis plurimum variat, quod non tantum ex domeſticarum, ſed et ſylueſtrium, obſeruatione clarum. Interna ſubſtantia optimum quidem dat diſcrimen, ſed limites nulli dantur in deſcribendis his differentiis. Inuenimus ſaepe nidos, praeſertim cum auicula, aut ante nos nidum reliquit, aut dum auolat, obſeruatoris oculo nullam obſeruandi moram concedit; certiores autem eſſemus, qualis eſſet auicula, ſi eam ipſam, quam ſi centies nidum et oua, inſpexiſſemus.

Spectat igitur nidorum et ouorum obſeruatio ſedula magis ad hiſtoriam vnius cuiusque indiuidui ſeparatim, quam ad ſcientiam, ſeu regulas, methodi. Propterea autem, vt exuuiae auium ipſarum, ita et oua, non indigna ſubiecta ſunt, quae ſimul cum auibus in Gazophylaciis naturae exhibeantur, ac miraculoſis ſuis formis, coloribus, quantitatibus relatiuis, creatorem, vt aiunt, ab quo ad mala mirandum ac venerandum oſtendant.

Quan-

Quantum ad magnitudinem ouorum relatiuam omnium auium in genere obſeruaui ſequentia:

1.) Oua terreſtrium auium magnitudine ſemper proportionata eſſe ipſi magnitudini auis.

2.) Terreſtrium auium oua aquaticarum auium ouis minora eſſe.

3.) Marinarum, cliuos maritimos, inſulas deſertas, incolentium auium oua maxima eſſe, et pro reſpectiua auis magnitudine ſolitam magnitudinem excedentia. Aues vulgo, ſed perperam, ab Auctoribus dicuntur Arcticae, cum et ſub latitudine 48 graduum mihi copioſe inuentae ſint, dummodo loca ſint maritima inculta, aſpera et deſerta. Ob ingenitam ſtupiditatem illis Deus haec loca aſſignavit. Si in cultis eſſent, breui ob ſtupiditatem et ſtoliditatem genus deficeret, vt et propter numerum pauciorem ouorum et tempus ponendi ſemel tantum in anno iis conceſſum. Pauciora autem oua fieri debuerunt, quia maiora mole neceſſaria erant, ne calor cito exſpiraret, cum per vices ſaltim illis incubent.

Quantum ad numerum ouorum:

4.) Aues terreſtres, domeſticae, quod oua non tantum pullis, ſed etiam hominum vſui deſtinata ſunt, ponunt plura et quouis tempore.

5.) Aues aquarum dulcium comparate pauciora, quod ipſae tantum in cibum veniant, aut caſu ſaltem oua.

6.) Aues marinae ſtolidae maxima, ſed pauciſſima, oua ponunt, quod vero numeroſiſſimae ſint, loca deſerta et inacceſſa, longaeuitas quoque vitae harum auium efficiunt.

Quantum ad colorem:

7. 1. Albus color domeſticis auibus, earumque inimicis rapacibus, vt et auiculis omnium minimis, Regulo, Aſilo, Guainumbi etc. familiaris.

8. 2.) Varius reliquis, ſed conſtans, quauis aetate, quouis loco.

9. 3.) Varius, ſed inconſtantiſſimus, color marinis ſtolidis.

Quantum ad formam auium marinarum ſtolidarum, oua ſolito longiora et acutiora ſunt.

Oua Lommiae ad ſcalam Anglicanam dimenſiones habuerunt ſequentes:

	Vnc.	lin.
1. Longitudo axis - - -	3	2
Diametralis latitudo maxima -	2	1
Diametralis latitudo tres vncias a vertice latiori. - - -	1	5

TAB. X. Fig. 1. et 2. Ouum virore viridis aeris intenſe tinctum erat, maculis fuſcis, veluti literis Turcicis, inſcriptum, ad verticem latiorem magis, ad acutiorem minus, et formam magis pyri, quam oui, obtinet.

	Vnc.	lin.
2. Longitudo axis - - -	3	2
Diametralis latitudo maxima -	2	
Diametralis latitudo tres vncias a vertice latiori - - -	1	1.

Fig. 3. Ouum virore viridis aeris valde diluto tinctum, et lituris confuſiſſimis ſpadiceis confertis et confluentibus

fluentibus in vertice latiore quaquauerſum vltra vnciam conſpurcatum erat. Similes, ſed rariores, et minus conferti linearum ductus in medio cernebantur. Vertex acutior ad vnam vnciam his lituris carebat. Longius multo priori, ſed anguſtius erat.

3. Cum 2 do easdem obtinebat dimenſiones, et priori ſimile erat circa verticem latiorem, coronam oſtendebat fuſcam, maculoſam, maculae autem in vnam confluebant, reliqua ſuperficies raris fuſcis punctis inſignita erat, vertex acutior albus. Fig. 4.

4. Praecedentibus forma, virore et magnitudine par, circa verticem latiorem maculis albis pictum, quarum orae quaquauerſum fuſcae erant, adeoque inſulas referebant, quales in mappis Geographicis pingi ſolent, reliqua ſuperficies inſulis minutis et punctis varia. Vertex acutior immaculatus candidus. Fig. 5.

Vnc. Lin.

5. Longitudo axis - - - 3 3.
Diametralis latitudo maxima - 2 1.
Diametralis latitudo 3 vncias a vertice latiore - - - - 9.

Latius, verum breuius, erat tertio, et maculas pene easdem habebat.

6. Longitudo axis - - - 3. 8.

Maculis confluentibus nigris circa latiorem verticem, hinc inde inſulis et maculis pictum erat varie.

7. Totum erat pallide viride, absque vlla macula, figura priori ſimile, vt alius auis ouum indicares. Fig. 6.

8 Erat pallide viride, maculis maiusculis nigris, veluti digitorum impreſſorum veſtigiis, varium.

9. Lon.

	Vnc.	Lin.
9. Longitudo axis - - -	3	3.
Diametralis latitudo maxima -	1	9.
Diametralis latitudo 3. vncias a vertice latiore - - - -		8.

Tab. XI. Fig. 7. Ouum hoc colore erat album, et obſcure admodum, hinc inde viridiuſculas exiguas maculas oſtendebat

10. Longitudo axis - - -	3	5.
Diametralis latitudo maxima -	1	9.

Longius et anguſtius, ac reliqua omnia, erat, colore album, et hinc inde ſubpurpureas pauciſſimas lituras et maculas obſcure oſtendebat.

11. Dimenſiones obtinuit, quas ſub No. 5. recenſui.

Candidum erat, et ex ferrugineo nigricantibus maculis et lituris, confluentibus circa verticem latiorem, varium, imo in ſummo vertice lineae cruciatim diſponebantur, reliqua ſuperficies omnis crebris minutis punctulis, ac raris maiuſculis maculis, varie picta erat.

12. Longitudo axis - - -	3	6.
Diametralis latitudo maxima -	1	8 ½.

Sordide album erat, maculis ferrugineis maioribus circa verticem latiorem maioribus, in medio mediocribus, circa verticem acutiorem pictum; ceterum longius et anguſtius reliquis omnibus erat.

Poſſideo praeter recenſita haec XII oua adhuc plura, forma, magnitudine, colore, maculis adeo varia, vt varietates omnes recenſere ſuperuacaneum ducam, cum hae ipſae e recenſitis duodecim ſatis ſuperque demonſtratae ſint.

Auis

Auis coruo non maior, adeoque ouum pro magnitudine auis maximum; nidum nullum ſtruit, ſed oua praeruptis nudis extantibus ſaxis, vix palmum ſaepe latis, imponit, nec ea, auolans et aduolans, quod maxime mirum, e rupibus in mare deiicit, imo cum pertica loco mouere tentarem, vix obtinui, ob id, quod ouorum vertici conuexo respondentem concauum quaerant lapidem, in quo, veluti in theca, recondita iacent. Oua ſaepe per horam relinquunt, in mari natantes, et victum quaerentes. Oua per varietatem colorum et magnitudinem id praeterea habent, vt ſapidiſſima ſint omnium quantum memini; vitellus crocei coloris. Oua inueni a fine Maii vsque ad vltimos dies Iulii, quod maxime mirum mihi videtur. Singulae aues ſingula ponunt oua; timidiores et paululum callidiores ſunt reliquis marinis. Natant ſaepe in mari dormiturientes, et dum proxime aduentantis cymbae ſtrepitum audiunt, ac homines in propinquo vident, adeo exhorreſcunt, vt neque ſubmergere ſe, neque auolare poſſint, ſed iucundo ſpectaculo vndas pedibus radunt, ac ridicule alis verberant, tandem ancipiti fortuna deceptae perticis occiduntur ac raro euadunt.

Ouum mergi tridactyli nigri, roſtro nigro; pedibus rubris.

Ouum auis Columbae Groenlandicae.

- - The Greenland Dove or See - Turt

- - The Dove Raii et Will. p. 245

Ouum Turturis Baſſae, ab inſula quadam Scotiae, Baſſa, et ad Inſulas Farcos the Puffinet dicti - - - - } ex mente Raii

 Ouum

Ouum auis, Itaelmenis Cajour, Kurillis Pynan dictae. Nidificat ad mare in rupibus praeruptis, ob pilas et ſaxa inacceſſis, nidum nullum ſtruunt, ſed oua ponunt ſingulae aues vnicum Iunio menſe intra cauernas et fiſſuras rupium, imo ipſae, veluti mures, ſub ſaxis deliteſcunt.

Oua magnitudine et forma Gallinaceis ſimilia, quamuis auis Columba non ſit maior; colore nihil omnino differunt, niſi quod vnum maioribus et rarioribus, alterum minoribus et crebrioribus maculis, varium ſit; oua alba ſunt, alia purius, alia ſordidius, maculisque ferrugineis, punctis cinereis conſperſa. Horum 14 habui, et ſequentes obſeruaui menſuras:

			Vnc.	lin.
Tab. XI. Fig. 8.	1.	Longitudo axis - - - -	2	5
	2.	- - - - - -	2	6
	3.	- - - - - -	2	4
Fig. 9.	1.	Diameter maxima - - -	1	$6\frac{1}{2}$
	2.	- - - - - -	1	8
	3.	- - - - - -	1	$6\frac{1}{2}$
	1.	Diameter 2 vncias a vertice latiori	1	2
	2.	- - - - - -	1	3
	3.	- - - - - -	1	$1\frac{1}{3}$

Ouum anſeris feri, maximi, Raii et Will. Ornith. 274. Parit circa medium Iunii. Oua quinque, magna, ſordide alba, quaſi albor fumo conſpurcatus eſſet. Nidum ſtruunt in locis gramineis circa ripas fluuiorum, vel in locis arenoſis ad fluuios, e gramine ſicco et ſtipulis, ac plumas mittunt, vt mollius decumbant oua, et calorem diutius retineant, quod Rutheni vocant: Periia Wypuſchtſchaiet

ſchtſchaiet (перья выпущаетъ), haeque plumae e nidis auium collectae omnium molliſſimae ſunt.

In genere notandum, cygnos, anſeres et anates vna ratione nidum ſtruere, ſimilia loca eligere, materiamque pro nidis ſtruendis ſimilem.

	Vnc.	lin.	
Longitudo axis - - -	3	6	Fig. 10.
Diameter maxima 2 vncias a latiore vertice - - -	2	3	
Latitudo diametralis 3 vncias a vertice latiore ad verticem acutiorem -	1	7	

Ouum anatis Fuligulae primae Geſn. et Aldr. Nidus forma, loco, materia, cum reliquis anatinis conſentit.

Oua ponunt circa Iunii initium valde multa, glabra et veluti polita; colore marmori, an Hildeſiano? ſimilia ſunt, ex albo leuiſſime ad cinereum inclinantia, ſeu ex opaco albentia.

Dimenſiones obtinuerunt ſequentes:

	Vnc.	lin.	
1. Longitudo axis - - - - -	2	5 $\frac{1}{2}$	Fig. 11.
2. - - - - - - -	2	4 $\frac{1}{3}$	
3. - - - - - - -	2	3 $\frac{3}{4}$	Fig. 12.
1. Diameter maxima - - -	1	7 $\frac{3}{4}$	
2. - - - - - - -	1	6 $\frac{5}{8}$	
3. - - - - - - -	1	6 $\frac{3}{4}$	
1. Diametralis latitudo 2 vncias a vertice latiore	1	5 $\frac{1}{4}$	
2. - - - - - -	1	3 $\frac{1}{7}$	
3. - - - - - -	1	2 $\frac{1}{7}$	

Nota: obſeruaui generatim de ouis auium, ea bifariam differre, alia craſſiora eſſe, maioremque obtinere latitudinem diametralem, altero vertice minus acuto, e quibus maſculos excludi puto; alia autem ambitu anguſtiora; ita et 10. 12. vnius anatis oua ad duas formas duasque dimenſiones vt plurimum reduci poſſunt, quod experimento quodam a curioſo, res domeſticas curante, extra dubium ponendum foret.

Oua anatis nigrae, ventre fuſco, capite pulcherrimis coloribus picto.

Kamennaia vtka (Каменная утка) Ruthenis.

Nyking Itaelmenis.

Nidum ſtruit in elatis litoribus, ad fontes fluuiorum, circa finem Iunii menſis, altum ſcilicet gramen pedibus conculcat, ibique ſolito anatibus more e tabido gramine et plumis nidum format, mares autem, poſtquam comitarunt foemellas, denuo mare et oſtia fluminum repetunt, oua ponunt 6, ingentia, glabra, alba, anſerum domeſticarum ouis ſimilia.

Dimenſiones obtinuerunt ſequentes:

			Vnc.	lin.
Fig. 13.	1.	Longitudo axis - - -	2	7
	2.	- - - - -	2	6 $\frac{1}{3}$
	3.	- - - - -	2	3 $\frac{1}{2}$
Fig. 14.	1.	Diameter maxima - - -	1	9
	2.	- - - - -	1	8 $\frac{1}{2}$
	3.	- - - - -	1	8.

Oua anatis, roſtro gibboſo, nigro, rubro, et luteo, Maſcherelli apud Aldrouandum.

Foe-

Foemina mihi anas nigra, faſcia alarum candida, pedum digitis aenei coloris.

Turpan (Турпанъ) Ruſſorum

Oua ponit circa medium Iunii, et, quamuis marinae anates circa mare per plurimam anni partem verſentur, mediterranea tamen loca, 1000 ſtadia et amplius a mari remota, petunt, ibidemque, vt et in maritimis circa lacus nidos condunt, pro more anatum; quamprimum nidum ſtruxerunt, mares relictis foeminis auolant, hae vero, pullis ad volandum educatis, mares ſequuntur cum progenie. Oua habent VIII. ad X. alba, glabra, polita.

		Vnc.	lin.	
1.	Longitudo axis - - -	2	6	TAB. XII.
	Latitudo diametralis - - -	1	8	Fig. 15.

Plura de laſciuia harum auium, natura, et modo capiendi annotaui in hiſtoria ipſius huius anatis.

Oua anatis arcticae cirratae.

Mitſchagatka Itaelmenis.

Nidificant in fiſſuris rupium, imo roſtro nidum ſibi intra et ſub ſaxis marinis excauant, et pauco gramine nidum inſternunt, vehementer mordent dum ouis ſpoliantur. Ouum ponunt ſingulae aues vnicum circa initium Iunii menſis.

		Vnc.	lin.	
				Fig. 16.
1.	Longitudo axis - - - -	3	1	
2.	- - - - - - -	3	2	
1.	Diametralis latitudo - - -	1	9¾	
2.	- - - - - -	2	¼	

 Oua

Oua candida, immaculata ſunt, pro auis mole grandia ſatis, àd alterum verticem ſolito acutiora. Vitellus ouorum crocei coloris, valde ſapidus.

Oua anatis arcticae				Vnc.	lin.
Fig. 17. Longitudo axis	-	-	-	2	9
Diameter maxima	-	-	-	2	1
Diametralis latitudo 2 vncias a vertice latiore	-	-	-	1	8.

Oua pro auis mole grandia, candida, immaculata ſunt, ambitu craſſa, non ſubito ad ſenſum verſus verticem acutiorem latitudine decreſcentia. Putamen craſſius, ac in reliquis, vitellus croceus; oua elixa ſapidiſſima; numero quaeuis auis vnum ponit in cauernis praeruptorum locorum, ſub ſaxis nidum ſibi more anatis cirratae arcticae excauans, ſpoliantium manus roſtro valide ferit.

Oua ponit circa 20. Die 8. Iunii in quorundam nidis iam inueni pullos.

Oua Graculi palmipedis.

Hae aues inter omnes aues marinas oua ponunt 1.) Admodum mature circa 24. Maii vsque ad 20. Iunii. 2.) Oua ipſa numero plura multum inter ſe differunt. 3.) Eadem pro magnitudine relatiua adeo differunt, vt limites prorſus excedant. 4.) Colore multum differunt, quaedam candidiſſima, quaedam ex albo ſubuiridia, alia ex albo et viridi ſubcaerulea ſunt. 5.) Forma, alia anguſta, oblonga, alia gallinaceis ſimilia, alia a vertice lato craſſiori alterum verſus ſubito ambitu decreſcunt, et acuta euadunt.

Ouum

Ouum Graculi palmipedis, candida in ſemoribus macula carentis, 28. Iunii 1743 e nido exemi.

	Vnc.	lin.
Longitudo axis - - -	2	3
Diameter maxima 1. vncias 3 lin. a latiore vertice - -	1	4
Diametralis latitudo 2 vncias a vertice latiore circa verticem acutiorem. -		9.

Ouum ipſum candidum erat, materia tartarea incruſtatum, haecque cruſta hinc et inde rugoſa erat.

Ouum Graculi palmipedis, candida in ſemoribus macula.

	Vnc.	lin.	
Longitudo axis - - -	2	3	Fig. 18.
Diameter maxima - - -	1	5	
Diametralis latitudo 2 vnc. a vertice latiore	1	$\frac{1}{5}$	

Ouum, Gallinaceo ouo forma et magnitudine par, ex albo parum in ſubcaeruleum vergebat.

Eiusdem auis ouum habui $\frac{1}{3}$ minus priori

	Vnc.	lin.	
Longitudo axis - - - -	1	5	
Diameter maxima - - - -	1	1 $\frac{1}{2}$	Fig. 19.
Diametralis latitudo 1 vnc. a vertice latiore	1	$\frac{1}{4}$	

Ouum ex albo ſubcaeruleum, columbino par magnitudine, cruſta alba vndique obductum, craſſum et verſus verticem acutiorem ſubito ambitu decreſcens.

Oua haec comeduntur quidem, verum inſipida, ac nullius pretii ſunt, vitellus pallide luteus, aquoſus, ac vix diutina coctione coagulari poſſunt, ne diffluant, hinc

hinc vitellus ob conſiſtentiam muco narium ab Itaelmenis comparatur.

Nidum nullum ſtruunt, ſed oua ſaxis, in praeruptis locis, imponunt, ac ſtipulas quasdam confuſe ſubſternunt, vel locis gramineis in vertice pilarum marinarum ſtantes excludunt. Ob pedum ſitum pone aequilibrium cadentem corpus inclinant ſaxis. Vidi etiam iacentes et incumbentes ouis in plano pilarum marinarum, ſed raro; ob ſtupiditatem et difficultatem ſeſe mouendi oua ſaepe e nido deiiciunt et incaute perdunt.

Ouum anatis caudacutae Haueldae Islandis.

		Vnc.	lin.
Fig. 20.	Longitudo axis - - -	2	1
	Diameter maxima - - -	1	5

Nidificat in locis gramineis non procul a maris littore nidumque eadem forma ac ratione, vt reliquae anates, ſtruit; oua ponit magnitudine ouis gallinaceis non maiora, nec forma ab illis aliena, craſſiuscula, colore alba, ſordide in cinereum leuiter vergentia, nitide glabra et veluti polita.

Ouum Colymbi caudati ſtellati.

		Vnc.	lin.		Vnc.	lin.
Fig. 21.	Longitudo axis - -	2	8	aliud	2	7
	Diametralis latitudo - -	2	$7\frac{1}{4}$		1	7

Nidum ſtruit circa lacus, non procul a mari, vel in inſulis lacuum, ex aquis emergentibus, gramen ſolummodo incubatu deprimendo, ibidemque oua deponit duo, putamine duro obtecta, anſerinis mole non multum inferiora, exacte oualia, extus fusca ac nigris punctis raris vndique conſperſa. Vitellus luteſcit.

Ouum

Ouum Picae marinae Gallorum.

	Vnc.	lin.	
Longitudo axis. - - - -	2	1 ½	Fig. 22.
Diametralis latitudo - - - -	1	6	

Nidum ſtruit in fluuiorum inſulis, vt et in ſaxis circa mare, negligenter eum in finem ſtipulas quasdam ſaltim colligit, imo nudae terrae et arenae ſaepe imponit, oua ponens duo breuiora ſed Gallinaceis ambitu craſſiora, coloris ex albo ſubcinerei, ſeu arenacei, qualis in marmore Hildeſiano, vndique vero nigris maculis et punctis denſe poſitis variegata. Oua reperi die 2. Iunii 1743.

Ouum Lari in inſulis Kurillicis Iacut dicti

	primum,		ſecundum,		tertium		
	Vnc.	lin.	Vnc.	lin.	Vnc.	lin.	
Longitudo axis - -	2	3	2	5	2	2	Tab. XIII.
Diametralis latitudo -	1	7	3	6 ½	1	7	Fig. 23.

Nidum ſtruit in ſaxis praeruptis iuxta mare, vt et in pilis et petris marinis, e congeſtis ſtraminibus et gramine ac paucis plumis intermixtis. Oua ponit communiter tria, forma, magnitudine et colore differentia. Fig. 24.

N. 1. Cum leuiſſimo virore album, ac maculis et punctis vmbriae colore aequaliter vndique diſſeminatis varium, forma vero longius ac craſſius reliquis.

N. 2. Forma longius et anguſtius priori, ſordide album, maculis fuſcis crebrioribus circa verticem latiorem, rarioribus circa acutiorem, varium, maculis cinereis hinc inde intermixtis.

N. 3. Forma breuius reliquis, craſſius ambitu ac rotundius, alter vertex ſubito acutior euadit, color

idem, qualis in n° 2.; latior vero axis lituris, veluti Turcicis literis, inſcribitur; in reliqua oui parte maculae rariores aderant.

Ouum Lari, ſupine ex albo cinereo et baetico varii, prone albi, pedibus flauentibus.

	Vnc.	lin.	Vnc.	lin.
Longitudo axis - - -	2	½ aliud	2	
Diametralis latitudo - - -	1	5	1	4½

Oua duo ponit; in inſulis fluuiorum nidum ſtruit negligenter, ſtipulis confuſe ſuper arenam imo nudam ſaepius terram diſpoſitis.

Oua haec gallinaceis minora, breuiora, et verſus alterum verticem ſolito gallinaceis acutiora et ſubito decreſcentia; colore ex albo cinerea, ac maculis fuſcis vndique aequaliter varia.

Ouum Mergi marini in terris Kamtſchaticis Starik dicti.

	Vnc.	lin.	Vnc.	lin.
Fig. 25. Longitudo axis - -	2	5	2	7
Fig. 26. Diametralis latitudo -	1	5	1	6

Singulae aues ſingula ponunt oua circa initium ad 10. diem Iunii; nidum nullum ſtruunt, ſed oua ſaxis rupium extantibus, circa mare, imponunt, vel in inſulis deſertis, absque vlla cura terrae. Oua pro auis magnitudine, quippe quae Querquedulam vix aequat, ſatis magna ſunt, gallinaceis maiora, oblonga, anguſta; colore valde differunt, alia ſordide alba, et punctis rarioribus fuſcis, alia ex albo in rufum colorem inclinant, et punctis ſpadiceis varia ſunt, alia ex albo arenacei coloris ſunt, ac punctulis ſpadiceis et cinereis variegantur.

Ouum

Ouum An Lari cinerei maximi Raii et Willughbeii?

	Vnc.	lin.
Longitudo axis - - - - -	3	-
Diametralis latitudo maxima - -	2	1

Oua habui quatuor, quae mihi ſimul ex vno nido allata fuere; mihi vero res nihilominus ſuſpecta videbatur, licet omnia oua magnitudine et forma conſentiebant, colore tamen plus diſcrepabant, ac mihi antea in Larorum familia obſeruatum. Primum ex albo ſubcoeruleum erat, maculis maiusculis fuſcis circa verticem latiorem pictum, reliqua ex albo cinerea erant maculis fuſcis picta. Magnitudine anſerina oua aequabant, reperta ſunt in inſula, ſaxis minutis conſtante, paucis ſaltem ſtipulis ſubſtratis. Fig. 27. Fig. 28.

Ouum Lari cuiusdam ſpeciei.

	Vnc.	lin.
Longitudo axis - - - -	3	1
Diametralis latitudo - - - -	1	9

Fig. 29.

Putamen oui valde craſſum erat et validum, verſus acutiorem verticem ſubito peripheria decreſcens, in ſuperficie ſcabrum, ex albo ſubflauum; vertex latior fere totus fuſcus erat, ob maculas in vnum confluentes, acutior vero maculis rarioribus ſeiunctis diſtinguebatur.

Ouum Motacillae vulgaris.

	lin.
Longitudo axis - - - -	$8\frac{1}{4}$
Diametralis latitudo - - -	$6\frac{1}{4}$

Ouum inſtar viridis aeris viret, absque vllis maculis. Nidum ſtruit, ex gramine ſicco, hemisphaericum. Oua ponit plurima ad 5. vel 6.

Oua Hirundinis ſubtus caſtanei caloris.

	lin.
Longitudo axis - - - -	7
Diametralis latitudo maxima - -	5

Nidum ſtruit hemisphaericum, ex luto, intermixtis ſtipulis, eumque parietibus ſub tectis affigit. Oua habuit quinque circa med. Iun. candida et ſpadiceis punctulis vndique aequaliter variegata.

Oua Cincli, the Stint.

	lin.
Longitudo axis - - - -	7
Diametralis latitudo - - -	6

Nidum ſtruit hemisphaericum planum, e ſicco gramine, in gramineis collibus, circa mare, oua ponit quatuor cinerea, punctulis fuſcis aequaliter variegata circa 5 diem Iunii.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNORVM MDCCXLIV. — — MDCCXLVII.

cum animaduerſionibus et conſectariis.

Auctore IOSEPHO ADAMO BRAVNIO.

Obſeruationes meteorologicae, potiſſimum barometricae et thermometricae, hic Petroburgi ab Academia iam MDCCXXVI fieri coeperunt, et habentur ab hoc anno ad finem vsque MDCCXXXVII Tomo IX. Commentariorum veterum Academiae, ſcilicet ab anno 1726 vsque in finem 1736 p. 316 et 344, anni autem 1737 p. 358, a Kraftio V. C. comparatae et communicatae. Tomo XI. exſtant obſeruationes annorum 1738 et 1739 p. 241 et 254. Tomo XIII. deprehenduntur obſeruationes annorum 1740 et 1741 p. 339 et 374. Denique Tomo XIV. vltimo veterum Commentariorum inueniuntur obſeruationes annorum 1742 et 1743 p. 240 et 247. Obſeruationes a me domi factae, quas in poſterum communicabimus, incipiunt ab anno 1751, et perpetuae ad hoc vsque tempus ſunt. Vt igitur hae obſeruationes meteorologicae ſerie haud interrupta, quantum fieri potuit, in Commentariis Academiae haberentur, ſupplere ſtuduimus obſeruationes annorum 1744 et ſequentium vsque ad finem 1750, potiſſimum ex iis, quae in Obſeruatorio Aſtronomico ſunt factae. Solus annus 1748 eſt, cuius obſeruationes meteorologicae deficiunt, quo vel nullae factae, vel certe non inueniuntur. Vt igitur ordinem

annorum obſeruemus, incipiemus ab anno 1744 et ad ſequentes, vsque ad tempus praeſens procedemus. Factae ſunt hae obſeruationes eodem fere modo, quo illae, quae iam in Commentariis exſtant, ſcilicet ad barometricas obſeruationes quod attinet, notatae ſunt altitudines maximae et minimae mercurii in tubo torricelliano cuiuslibet menſis per totum annum cum differentiis. Numeri ante punctum pollices pedis regii Pariſini hic denotant, numeri autem poſt punctum, partes centeſimas eiusdem pollicis. Obſeruationes autem, quae in Commentariis iam ſunt publicatae, ſecundum pedem Londinenſem eiusque pollices et horum partes centeſimas confectas conſtat. Simili modo quoque quolibet menſe totius anni enotauimus maximum et minimum caloris gradum ſecundum thermometrum Delislianum, vbi, quod ſatis iam conſtat, cyphra gradum caloris aquae ebullientis, numerus autem 150 gradum aquae in glaciem abeuntis, ſiue quod eodem redit, niuis vel glaciei, quae incipit regelari, vel aquae ſub glacie, idem enim ſemper conſtantiſſimus gradus a nobis eſt obſeruatus. Quia, quod iam monuimus, obſeruationes ab anno 1744 ad finem 1750 in ſpecula aſtronomica factae ſunt, notandum eſt, eam ſupra planum maris Baltici 51 pedes pariſinos fuiſſe euectam. En ipſas obſeruationes anni 1744.

Anni MDCCXLIV. ſtili noui Obſeruationes barometricae.

Menſis.	Dies.	Altitudo barometri maxima	minima	Differentia
Ianuar.	14	- 28. 56	- 27. 27	Die 5 - 1. 29
Februar.	8	- 28. 89	- 27. 57	- 26 - 1. 32
Martii	26	- 28. 30	- 26. 90	- 12 - 1. 40
Aprilis	22	- 28. 10	- 27. 20	- 14 - 1. 90

Maii

Menſis.	Die.	Maxima.	Minima.	Die.	Differentia.
Maii	10	28. 10	27. 28	5	1. 82
Iunii	7	28. 15	27. 15	15	1. 00
Iulii	23	28. 20	27. 57	1	0. 63
Auguſti	23	28. 14	27. 12	28	1. 02
Sept.	30	28. 37	27. 43	2	0. 94
Oct.	3	28. 49	27. 38	17	1. 11
Nou.	7	28. 13	27. 10	25	1. 03
Dec.	25	28. 17	27. 10	21	1. 07

Comparatis his obſeruationibus adparet, maximam per totum annum altitudinem barometricam fuiſſe 28. 89, minimam autem 26. 90. Contigit maxima die 8 menſis Februarii, coelo ſereno, vento non ſenſibili, qui diebus antecedentibus et ſequentibus fuit N O debilis, dies antecedens, et qui ſequuti fuerunt aliquot, fuerunt ſereni, quibus frigoris gradus inter 169 et 174 ſubſiſtebat. Minima altitudo accidit Martii 12 coelo nubilo, vento SO mediocri. Dies duo antecedentes et ſequentes fuerunt quoque nubili, vento SW mediocri flante, thermometrum autem mane 149, meridie 147 et veſperi 149 monſtrabat. Fuit igitur variatio barometrica maxima hoc anno fere duorum pollicum ſiue proprie 1. 99. Secundum obſeruationes ante habitas, quae in Commentariis leguntur, ſpatium variationum barometricarum maximum hic adhuc fuit 2. 77 menſurae Londinenſis, adeoque ſecundum menſuram Pariſinam 2. 60, ſiue proprie 2. 59 $\frac{11}{16}$. Nam maxima altitudo, quae adhuc hic eſt obſeruata, eſt 30. 95 pollicum Londinenſium, adeoque 29. 01 $\frac{2}{16}$ pollicum Pariſinorum. Notata haec fuit 1737 vide Commentariorum tomum IX. p. 359, et minima

eſt

eſt 28: 18 pollicum Lond. adeoque Pariſ. 26. 41 $\frac{1}{4}$, quae viſa eſt 1729 Octobris 12 circa meridiem vid. p. 323 Tomi IX. Comment. Quum igitur ſpatium variationum barometricarum anni 1744 minus deprehendatur illo, quod antea inuentum eſt: manet etiamnum illud 2.60 maximum, et maxima quoque altitudo hic loci obſeruata illa 29. 01, vti 26. 41 minima quoque manet. Porro et hic obſeruatur lex et confirmatur, in antecedentibus obſeruationibus barometricis et alibi iam detecta: variationes menſtruas barometricas primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores, mediis autem minores.

Sequuntur obſeruationes thermometricae huius anni 1744, vbi calor minimus et maximus per omnes totius anni menſes cum differentiis notatus eſt.

Menſis.	Dies.	Hor.	Calor min.	Calor max.	Dies.	Hor.	Differentia
Ianuar.	1.	12 mer.	182	152$\frac{1}{2}$	26.	12	30
Febr.	13.	7a.m.	180$\frac{1}{2}$	150	25.	10p.m.	30$\frac{1}{2}$
Mart.	7.	7a.m.	180$\frac{1}{2}$	147	12.	mer.	33$\frac{1}{2}$
April.	1.	6$\frac{1}{2}$a.m.	162	124	26.	6p.m.	38
Maii	4.	6 a.m.	152	117	12.	mer.	35
Iunii	15.	6 a.m.	142	116	22.	mer.	26
Iulii	21.	7 a.m.	133	106	11.	5p.m.	27
Aug.	23et30,	6a.m.	136	119	19.	5p.m.	17
Sept.	30.	6a.m.	144	118	27.	5p.m.	26
Oct.	12.	6a.m.	158	136	1.	mer.	22
Nou.	28.	12 mer.	164	140$\frac{1}{2}$	5.	mer.	23$\frac{1}{2}$
Dec.	29.	8a.m.	176$\frac{1}{2}$	145$\frac{1}{2}$	2.	mer.	31

Ex hiſce obſeruationibus patet minimum calorem, ſeu maximum frigus fuiſſe 182, et maximum calorem, 106, adeoque

adeoque differentiam annuam ſiue maximam 76. graduum. Frigus maximum contigit Ianuarii 1 coelo nubilo, vento W exiguo, barometro 27. 55. adſcendente. Maximus autem calor accidit Iulii 11. h. 5. p. m. coelo ſereno, praecedentibus quoque et ſequentibus aliquot diebus ſerenis vento SO forti. Barometrum altitudinem habebat 27. 91 et adſcendebat. Conſpicitur praeterea, variationes caloris primis anni menſibus fuiſſe maiores, quam mediis et vltimis, excepto Decembri.

Frigus maximum, quod hic Petroburgi adhuc eſt obſeruatum, eſt 200. quod 1733 et 1739. contigit. Quum igitur hoc ſuperet gradum 182, hoc anno 1744 obſeruatum, manet idem gradus adhuc maximus, qui Petroburgi ſit notatus. Maximus caloris gradus, qui hic eſt obſervatus, adhuc fuit 104. qui ſaepius eſt obſeruatus, et maximus manſit vsque ad 1756. quo anno, vt ex ſequentibus patebit, maiores ſunt obſeruati. Quum igitur et caloris gradus huius anni 1744 ſcil. 106. minor illo deprehendatur; ad hunc vsque annum 104. maximus ille caloris gradus manet, vti et differentia maxima, ſeu variatio thermometrica maxima 96. gr. perſtat. Fuit igitur huius anni hiems neque admodum frigida, nec aeſtas admodum calida. Dies nubili menſe Ianuario fuerunt 22, Februario 14. Martio 13. Apr. 5. Maio 10. Iunio 13. Iulio 6. Auguſto 12. Sept. 15. Oct. 14. Nou. 23. Decembri omnes dies fuerunt nubili, excepto 29. Primo Maii nix cecidit h. 6. a. m. et p. m. Die 7 p. m. procella orta eſt cum tonitru et pluuia. Iunii 27. vehemens ventus cum pluuia, Iulii 19. p. m. magna fulmina cum tonitru, vento W non magno, barometro meridie 28. 0 6 et ther-

thermometro 114. monſtrante. Auguſto 28. p. m. ventus vehemens NO cum exundatione aquarum fluminis, qui ad mediam vsque noctem continuauit, et aquae tunc ſubſidere coeperunt, barometro 27. 20. thermometro 131. monſtrantibus, quum barometrum die antecedenti fuerit 27. 37. et ſequenti 27. 42. meridie. Septembri 20. vesperi ventus vehementiſſimus extitit W, qui mane die ſequenti 21 NW factus, eadem vehementia flauit cum magna exundatione fluminis Neuae; barometrum meridie erat 27. 62. die precedenti 27. 72. et ſequenti 27. 66. durante tempeſtate aliquot lineas barometrum cecidit. Thermometrum erat 130. Oct. 4 ventus vehementior W. et die 10, 11 et 12 venti vehementiores O et S fuerunt. Nouembri magnus ventus W. die 19. et 20 cum inundatione aquarum, barometro 27. 23, et die anteced. 27. 65, ſeq. autem 27. 77 monſtrante. Decembris 20, 21 et 27 potiſſimum ex occidente venti vehementiores flauerunt: Glacies fluuii Neuae Apr. 6 a.m. frangi et h. 3 p.m. abire coepit. Nouembris 26 glacies natauit in Neua, et ſeq. 27, circa h. 5. a. m. fluminis glacies ſtetit. Ad hunc vsque annum ab anno 1718. Martii dies 22dus fuit terminus quo citiſſime et 26 Apr. quo tardiſſime fluuius Neua a glacie eſt liberatus; contra Oct. 24 quo citiſſime et Nouembris 30, quo tardiſſime flumen Neua glacie obductum fuit ſed ſtili veteris. Prima congelatio facta eſt nocte diei 29 ad 30 Sept. et ſequenti 1 et 2 Oct. continuauit.

Annus MDCCXLV.

Anni 1745 ſt. n. obſeruationes ſunt, quae ſequuntur. Primum barometricae ita ſe habent:

Baro-

BAROMETRI

Menſis.	Dies.		Altitudo Maxima.		Minima.				Differentia
Ianuar.	24	-	28. 55	-	27. 06	d.	31	-	1. 49
Febr.	28	-	28. 45	-	27. 20	-	1 et 2	-	1. 25
Mart.	12	-	28. 35	-	27. 23	-	7	-	1. 12
Apr.	29	-	28. 30	-	27. 24	-	17	-	1. 06
Maii	3	-	28. 85	-	27. 62	-	30	-	1. 23
Iunii	16	-	28. 23	-	27. 82	-	1	-	0. 41
Iulii	3	-	28. 45	-	27. 42	-	18	-	1. 03
Aug.	18	-	28. 21	-	27. 29	-	30	-	0. 92
Sept.	26	-	28. 49	-	27. 61	-	2	-	0. 88
Octobr.	22	-	28. 19	-	27. 47	-	26	-	0. 72
Nou.	15	-	28. 52	-	27. 20	-	28	-	1. 32
Decem.	18	-	28. 57	-	27. 72	-	11	-	0. 85

Hae obſeruationes igitur monſtrant, maximam barometri altitudinem hoc anno fuiſſe 28 . 85 , et minimam 27. 06 adeoque differentiam , et variationem maximam annuam 1. 79. Obſeruata fuit altitudo maxima Maii tertio meridie , coelo nubilo , vento SW. mediocri ; die antecedenti fuit 28. 04 et ſequenti 27. 73. Dies aliquot antecedentes fuerunt ſereni , et fere ſine vento ſenſibili , ſequentes vero nubili , vento potiſſimum S et SW. debili flante. Minima altitudo contigit Ianuarii 31. coelo nubilo , vento S exiguo. Die antecedenti erat 27. 25 , et ſequenti 27. 20, dum praecedentes dies multi fuerunt nubili , flante potiſſimum vento W debili , et S W mediocri ; fuere et ſequentes nubili , vento vario , excepto proxime ſequente 1 Febr. qui fuit ſerenus.

Quum et maxima barometri altitudo, hoc anno obſeruata, ſit minor ea, quae in antecedentibus obſeruationibus eſt notata, ſcil. 29. 01. et minima huius anni maior 26. 41 in antec. minima adnotata: ſpatium variationum barometri in antecedentibus ſtabilitum, manet inuariatum ſcilicet 2. 60, vti et altitudo media 27. 71 perſtat.

Ex variationibus menſtruis inter ſe comparatis porro patet, legem ſuis exceptionibus eſſe obnoxiam, quod ſcilicet variationes barometri menſtruae primis et vltimis menſibus anni maiores, mediis autem, ſint minores. Nam licet variationes primorum anni menſium manifeſto ſint maiores mediis, tamen vltimorum menſium maiores non omnes deprehenduntur, vti vtplurimum obſeruari ſolet alias.

Variationes caloris, A. 1745 thermometro obſeruatae, ſunt ſequentes.

		Frigus max.		Calor max.		Diff.
Ian.	18. h 8a.m.	177	-	147½	d.11.h 8 a.m.	29½
Febr.	3. 7½a.m.	191	-	149	- 8. mer. -	42
Mart.	5. 6 a.m.	183	-	144	- 8. 6p.m.	39
April.	2. 6 a.m.	169	-	138	- 30. 6p.m.	31
Maii	1. 5 a.m.	147	-	117	- 29. 4p.m.	30
Iun.	2. 6 a.m.	131½	-	109½	mer. et h. 5p.m.	22
Iulii	20. 5 a.m.	131½	-	115½	d.6 et 8 h. 5p.m.	16½
Aug.	29. 5½a.m.	141	-	112	- 7. 4 p.m.	29
Sept.	17. 6 a.m.	147½	-	127½	- 5. 6 p.m.	20
Oct.	28 et 31. 6a.m.	158	-	131	- 13. 5 p.m.	27
Nou.	9. 7 a.m.	171	-	145	- 20. mer.	26
Dec.	28. 8a.m.	174½	-	148½	- 31. 8 p.m.	26

Ex his obſeruationibus clarum eſt, maximum frigus hoc anno fuiſſe 191, et maximum calorem 109½ adeoque

adeoque variationem thermometricam 81½ graduum. Spatium igitur variationum thermometricarum in antecedentibus inuentum 96 graduum manet adhuc maximum. Variationes thermometricae primis anni menſibus ſunt maiores mediis et vltimis excepto Auguſto, qui cum Ianuario conuenit. Quae praeterea hoc anno memorabiliora videntur, huc fere redeunt.

Menſe Ianuario omnes dies fuerunt nubili, exceptis duobus 18 et 22. vento W debili flante. Venti vehementiores hoc menſe fuerunt d. 9. S, 10 W et 11 W, quum dies antecedens et ſequens ſine ventofuerint, barometro a 27. 97 ad 27. 30 deſcendente, quum iam diebus aliquot ante deſcendiſſet, thermometro a 168 ad 151 variante. Per totum menſem ventus W potiſſimum ſpirauit.

Menſe Februario ſex dies fuerunt ſereni 1, 17, 25, 26, 27, 28. ceteri omnes nubili. Semel ventus vehemens fuit die 18. NO, praecedente et ſubſequente tranquillitate ſine vento. Die antecedenti barometrum erat 27. 89. et ſequenti 27. 38. 27. 50 ipſo die fuit, et frigus 169.

Martius habuit dies 13 ſerenos, ceteros nubilos. Venti fortiores fuerunt d. 7. NO. coelo ſereno, barometro 27. 23, et therm. 172. Die praecedenti fuit 26. 64 et ſeq. 27. 60; dies antecedens ſine vento, ſequens cum S. debili. Porro d. 12. coelo ſereno, barometro 28. 35 ventus O vehementior fuit, dies praecedens ſine vento, et ſequens cum vento debili. Barometrum die antec. 28. 15, et ſeq. 28. 13 erat altitudinis. Denique die 26 ventus W fortior, coelo nubilo, barometro 27.78 quod die antec. fuit 28.16 et ſeq. 27.72; thermometro autem 160.

Menſe Aprili dies 13 fuerunt ſereni, reliqui nubili.

Venti vehementiores fuerunt die 5. et 6. W. praecedente WNW mediocri, ſubſequente W mediocri, niue et porro vento vix ſenſibili. Barometrum die 5 erat altitudine 28 04. d. 6. 27. 57. praecedenti 28. 07. et ſubſequenti 27. 41. Thermometrum inter 150. et 147 tantum variabatur. Porro die 25. et 26 ventus vehementiſſimus O fuit, qui d. 27. N factus ſatis adhuc vehemens fuit, dies 25 nubilus, duo ſequentes ſereni. Barometrum d. 25 erat 28. 00. d. 26, 28. 25. d. 27. 28. 40. ſequenti 28. 28. die ventum praecedente 27. 93, thermometrum inter 147 et 149 ſubſiſtebat.

Primum tonitru fuit d. 10. h. 7 p.m. cum pluuia et fulminibus, circa h. 10. a. m. iam tonitru fuit auditum debile. Die 20. circa h. 8. et 9. a. m. glacies Neuae frangi coepit, et circa h. 3. p. m. omnis glacies abierat.

Menſe Maio dies fuerunt ſereni 15. Venti vehementiores fuerunt d. 14 et 15 NO. coelo ſereno, praecedente W. mediocri, et ſubſequente O. leni; barometrum erat d. 14, 28. 36. d. 15, 28. 42. die antec. 28. 29 et ſubſequenti 28. 33, et rurſus deſcendere aliquot diebus ſeq. pergebat, therm. inter 135 et 128 variabili. Porro d. 29 et 30 V. SSW et S vehemens, antecedente vento NW leni, et ſubſequente V. 00, barometrum d. 29, 27. 75 et 30, 27. 62, die praeced. 27. 82 et ſeq. 27. 73.

Menſe Iunio tres tantum dies fuerunt nubili, ceteri ſereni. Venti vehementiores fuerunt d. 4. coelo ſereno, praecedente V. o o et ſequente NO. debili. Barometrum erat 28. 08, die anteced. 28. 06. et ſubſeq. 28. 08, deinde deſcendit. Porro d. 28, 29, 30 ventus ab initio

initio W, dein NW vehementior fuit, praecedente NW mediocri, et ſequente N mediocri. Barometrum d. 28 erat 27. 96. d. 29, 27. 98. d. 30, 28. 04 die antec. 28 12 et ſequenti 1 Iulii 28. 10, vbi vehemens adhuc fuit, dein per aliquot dies adſcendere barometrum pergebat; vento debili potiſſimum W. Thermometrum inter 121 et 124 variabat.

Menſe Iulio fuerunt dies nubili 5, et mixti 6. Venti vehementiores d. 8, 9 et 11 W, die 14, 15 SW, die 24, 25 NW. Die 8 erat barometrum 27. 88 et 9. 27. 71. in antecedenti obſeruatione 27. 91 et ſequenti 27. 75, coelo mixto. Dies ſequens 10 erat ſine vento, quem rurſus ſequebatur d. 11 ventus W fortis. d. 14 et 15 SW et W vehemens, die 24 et 25 NW. ſequente W debili et tranquillitate, barometro d. 24, 27. 89 et 25, 27. 91. thermometro 120 et 121 monſtrantibus.

Menſe Auguſto dies fuerunt nubili 6, et 5 mixti. Venti vehementiores d. 7, 22, 24. Die 7 coelo ſereno ventus SO vehemens fuit, praecedente mediocri SO, et ſequente NW mediocri, et dein V oo; barometrum erat 27. 81; die antec. 27. 98 et ſeq. 27. 93 et adſcendere perrexit, thermometro 113 oſtendente. Die 22 ventus vehemens W. die antec. V. oo et ſeq. SW mediocri, thermometro 116, coelo mixto, barometro 27. 61. die antec. 27. 92 et ſeq. 27. 93 dein rurſus adſcendere coepit. d. 24 V. NW coelo ſereno, thermometro 124 et barometro 27. 40 indicantibus.

Menſe Septembri dies fuerunt ſereni 11 et 2 mixti. Venti vehementiores d. 5. et 6. NO praecedente W mediocri et ſequente debili NO. dies 5 ſerenus et 6 nubilus fuit, praecedentibus et ſequentibus diebus nubilis; baro-

barometro 27. 70. d. 5, et 6, 27. 80. die antec. 27. 92 et ſeq. 28 16, thermometro 129 et 137 indicantibus.

Menſe Octobri dies ſereni 9. Venti vehementes d. 3, 4, 17, 23, 24, 27, 31. Primus d. 3. et 4. erat NO, ſecundus d. 17 erat W, tertius 23 et 24. NW, quartus 27 NO, et quintus die 31 SO, vt plurimum tranquillitas antecedebat et ſequebatur, vel antecedebat minimum, vel ſequebatur tum. Die 8. prima congelatio exigua et nix. Nocte diei 15 ad 16 exundatio Neuae, vento vehementi W. Fortior congelatio demum nocte inter 26 et 27 vento NO contigit.

Menſe Nouembri fuerunt dies ſereni 9. Venti fortiores fuerunt d. 1. 25, 29. Primus eſt continuatio menſis antec. d. 31. Die 25 ventus erat W, quem praecedebat et ſequebatur ventus admodum lenis N et O, barometro 27. 64. die antec. 27. 30 et ſeq. 27. 74. tertius d. 29 erat W. barometro 27. 25, die antec. 27. 20 et ſeq. 27. 55. Die 1 veſperi glacies natans in Neua eſt obſervata, quae continuauit ad 7, quo circa h. 6. p. m. ſtetit.

Menſe Decembri ſex dies fuerunt ſereni. Ventus vehemens tantum vltimo die contigit, qui ex occidente ſpirabat, barometro 27. 82 die antec. 27. 81 et ſeq. 28. 00. Ventus W lenis antecedebat, et ſequebatur, thermometrum monſtrabat 149.

Dies igitur ſereni per totum annum fuerunt 149. Ceterum facile intelligitur, non omnes inter illos fuiſſe integros ſerenos, ſed a potiori hic quoque fieri denominationem. Venti vehementiores per totum annum fuerunt per 42 dies. Frequentiſſime autem, per antece-

antecedentia, contigerunt menſibus Octobri et Iulio. Nam quolibet horum menſe per ſeptem dies venti fuerunt vehementiores. Menſe autem Februario et Decembri pauciſſimi, quolibet enim horum menſe vnicus tantum vehementior ventus flauit. Nullus autem menſis ſine vento vehementiori fuit. Ceterum huius anni hiems inter gelidiores numerari non meretur. Nam licet menſe Februario frigus ad 186 peruenerit, quin menſe Martio gradum 183 obtinuerit: duratio tamen huius frigoris tantum exigua fuit, ex qua omnino hiemis frigus iudicandum eſt, non vero ex vno alteroque die licet gelidiſſimo, id quod de vehementia caloris diiudicanda valere quoque debere, facile intelligitur.

Anni 1746. ſt. n. ſequentes obſeruationes meteorologicas enotauimus: Sequuntur, vt ſupra, primum Obſeruationes Barometricae.

Menſis.	Dies.	Maxima Altitudo.	Minima.	Die.	Differentia
Ian.	12 et 27.	28. 36	27. 40.	20	96
Febr.	16.	28. 24	27. 15.	24	1. 09
Mart.	22.	28. 38	26. 90.	3	1. 48
April.	10 et 23.	28. 14	27. 30.	10	0. 84
Maii	7.	28. 47	27. 68.	11	0. 89
Iunii	7 et 19.	27. 92	27. 46.	1	0. 46
Iulii	7.	28. 18	27. 78.	24	0. 40
Aug.	14 et 19.	27. 88	27. 32.	11	0. 48
Sept.	5.	28. 37	27. 22.	24	1. 15
Octobr.	24.	28. 48	27. 10.	26	1. 38
Nou.	10.	28. 58	27. 43.	17	1 15
Dec.	13.	28. 20	27. 28.	22	0. 92

Ex comparatione harum obſeruationum manifeſtum eſt, hoc anno maximam mercurii altitudinem fuiſſe 28. 58. Minimam autem 26. 90 adeoqne variationem annuam 1. 68. Maxima altitudo eſt obſeruata Nouembr. 10. meridie, dum precedenti die fuit 28. 16 et ſequenti itidem 28. 58, coelo nubilo, ſine vento, vti quoque aliquot paecedentes dies ſine vento fuerunt. Minima accidit Martii 3. die praecedenti 27. 12 et ſeq. 27. 12, coelo nubilo, vti quoque duo praecedentes fuerunt nubili, V.NO exiguo flante, quum proxime praecedens ſine vento et ſequens cum leniſſimo W fuerunt. Hinc ſpatium variationum barometricarum quum ſit 1. 68, adeoque minus illo, quod in antecedentibus eſt inuentum, deprehendatur: maximum illud manet, vti quoque maxima altitudo et minima manent in praecedentibus inuentae. Variationes menſtruas primis et vltimis menſibus anni maiores, mediis minores et hic eſſe, ex comparatione differentiarum adparet.

Obſeruationes thermometricae 1746 ſt. n. factae, ſequenti ſe habent modo.

Menſis.	D.	H.	Frigus max.	Calor max.	D. H.	Diff.
Ian.	23.	8. a.m.	-- 172	- - 146.	24 mer.	- 25
Febr.	28.	6.½ a.m.	-- 179	- 144.	6.m.	- 35
Martii	9.	12. p.m.	-- 179	- 149.	27 et 28	- 30
Apr.	1.	6. a.m.	- 161	-- 136	24. 6p.m.	26
Maii	6.	5. a.m.	-- 158	- 124.	16.m. et 7½pm.	35
Iun.	1.	5. a.m.	-- 142	-- 109.	18.mer.	- 33
Iul.	3.	5. a.m.	-- 130	-- 111½.	23.m.	- 18½
Aug.	25.	5. a.m.	-- 136	- 111	4.m.	- 25
Sept.	26.	6. a.m.	-- 143	- 120.	15.m.	-- 23

Oct.

Menſis.	D.	H.	Frig. max.	Calor max.	Differ.
Oct.	30.	7. a.m.	- 158 -	131½. 9. mer.	- 27
Nou.	20.	7. a.m.	-- 176 -	143½. 8. et 9 mer.	33
Dec.	11.	6. a.m.	- 164 --	144. 13. mer.	- 20

Secundum has obſeruationes maximum frigus fuit 179, quod incidit in Febr. 28 et Mart. 9, calor autem maximus 109, qui obſeruatus eſt Iunii 18 vnde adparet hiemem ſatis mitem, et aeſtatem non admodum calidam fuiſſe.

Menſe Ianuario dies fuerunt ſereni 7. Ventus vehementior fuit d. 17. NO coelo nubilo, therm. 149, barometro 27. 61, die autem antecedenti fuit 27. 79 et ſeq. 27. 98. Praecedebat hunc ventum ventus W lenis, et ſequebatur quoque ventus W debilis.

Menſe Februario dies ſereni 13. Venti vehementiores fuerunt d. 1, 7, 20, 24. Primus fuit W ſequente O exiguo, ſecundus SW praecedente S debili et ſequente W mediocri, tertius W non admodum vehemens, quartus O ſequente vento non ſenſibili.

Menſe Martio dies fuerunt ſereni 20. Venti vehementiores d. 1. NW ſequente vento oo. die 5. SO, ſequente aere tranquillo, et praecedente W admodum debili, d. 10 NO.

Menſe Aprili dies ſereni 14 fuerunt. Venti vehementiores d. 28. et 29. NO, praecedente NO debili, et ſequente N leni. Nocte inter 24. et 25. glacies fluminis rumpi coepit, et die 25. mane h. 8. flumen a glacie liberum fuit.

Menſe Maio dies ſereni 21 erant, venti vehementes die 3 NO, d. 15. NW, d. 18. et 19. NO, d. 22. W, d. 25 NO.

Menſe Iunio fuerunt 18 dies ſereni, et duo mixti. Venti vehementiores d. 2, 3 NO. adſcendente barometro a 27. 69 ad 27. 78. die praecedenti fuit 27. 46 V oo thermometro inter 126 et 128. ſubſiſtente. Porro d. 6. NW. d. 13 O. die 21. O. d. 31. NW.

Menſe Iulio dies ſereni 14, mixti 6 numerati ſunt. Venti vehementiores d. 15. NW, et 17. W, d. 24. NO.

Auguſtus habuit dies ſerenos 13, mixtos 7. Ventus vehemens d 7 ex occidente ſpirans, barometro 27. 62, praecedenti die 27. 63 et ſequenti 27. 82, thermometro 119, praecedentibus diebus inter 111 et 121 ſubſiſtebat.

Septembri dies ſereni 17, mixti 3. Venti vehementes d. 20, 22, 24, 29, reliquis diebus ventus, vel nullus, vel admodum lenis.

Menſe Octobri dies ſereni 9 mixti 3 fuerunt. Ventus vehemens d. 5. NO, d. 14. SW, d. 18. NW, d. 21. NW, d. 29. NW. Nocte inter diem ſextum et ſeptimum prima congelatio fortis erat, et glacies duarum linearum craſſitie deprehenſa, et d. 17 p. m. prima nix, ſoluta mox cum magna pluuia ſequenti, thermometro 144 notante.

Menſe Nouembri dies ſereni 8. Venti vehementiores d. 2. N, d. 18. O. Die 19 veſperi glacie Neua fluuius eſt obductus.

Menſe Decembri dies ſereni 2. d. 4 et 31. Nullus ventus vehemens hoc menſe, omnibus enim diebus ventus, vel debilis, vel nullus, eſt obſeruatus.

Annus

Annus 1747. *St. V.*

Quae nunc ſequuntur obſeruationes, omnes ſecundum ſtilum veterem ſunt notatae, quum antecedentes, quod monuimus, ex ſtilo nouo fuerint conſignatae. Ad barometri altitudines quod attinet, ſequentes maximae et minimae ſunt obſeruatae.

Barometri altitudo

		Maxima.		Minima.		Differentia
Ian.	16.	28 35	-	27. 48.	5.	- 0.87
Febr.	28.	28. 25	-	27 30.	23.	- 0.95
Mart.	13.	28. 34	-	27. 15.	6.	- 1.19
Apr.	16.	28. 24	-	27. 15.	29.	- 1.09
Maii.	17.	27. 80	-	26. 98.	12.	- 0.82
Iunii.	16.	27. 56	-	26. 69.	21.	- 0.87
Iulii.	17.	27. 70	-	26. 79.	8.	- 0.91

Reliquae obſeruationes huius anni barometricae deficiunt. Ex comparatione obſeruationum horum ſeptem menſium patet, maximam barometri altitudinem fuiſſe 28. 35, et minimam 26. 69, adeoque maximam variationem 1. 66. Maxima obſeruata eſt Ian. 16, coelo ſereno, vento W mediocri, thermometro 155 meridie monſtrante. Minima obſeruata eſt Iunii 21. mer. coelo nubilo, thermometro 125, vento SW mediocri. Dies praecedentes fuerunt nubili et pluuii, proxime ſequens ſerenus, vento W facto. Quia altitudo maxima 28, 35 minor eſt 29, 01, et minima 26.69, maior 26. 41, adeo quoque differentia 1. 66 minor

a. 60, omnia manent inuariata reſpectu altitudinum maximae et minimae, adeo quoque ratione ſpatii variationum barometricarum; ceterum variationes menſtruae primis anni menſibus maiores, quoque hic deprehenduntur mediis, excepto Ianuario.

Variationes caloris his ſeptem menſibus ex ſequentibus obſeruationibus thermometricis cognoſci poſſunt.

Menſis.	Die.	Calor	Minimus.		Maximus.	Die.		Diff.
Ian.	22.	8. a m.	188	-	148.	29. mer.	-	40
Febr.	15.	6. a.m.	192	-	146.	9. mer.	-	46
Mart.	6.	6 a.m.	168 ½	-	142½	22. mer.	-	26
Apr.	13.	6. a.m.	157	-	132.	22. mer.	-	25
Maii.	1.	6. a.m.	148	-	111.	25. mer.	-	37
Iunii.	23.	6. a.m.	137 ½	-	106.	5. mer.	-	31½
Iul.	24.	6. a.m.	135	-	111½.	8. 2. p.m.	-	23½

Si comparentur hae obſeruationes, conſpicitur, frigus maximum fuiſſe 192, et maximum calorem 106. Frigus maximum incidit in Februarii decimum quintum h. 6 ante meridiem, coelo ſereno, flante nullo vento, meridie erat 184, die antecedenti 185 et ſequenti 182, barometro 27. 92 meridie monſtrante. Hic gradus frigoris licet ſit magnus, tamen minor eſt illo, qui 1733 et 1739 eſt obſeruatus ſcil. 200, qui igitur adhuc maximus manet. Gradus maximus caloris notatus eſt Iunii quinto meridie, coelo ſubnubilo, vento SW mediocri, ante meridiem erat nebuloſum. Barometrum erat 26. 97. Quum et maior caloris gradus hoc gradu 106 ſit in antecedentibus obſeruatus ſcil.

104

1724: manet adhuc hic gradus caloris maximus Petroburgi obſeruatus, et ſpatium variationum thermometricarum idem, quod ſupra eſt determinatum, ſcilicet 96. Reliqua notatu digniora haec fere ſunt.

Menſe Ianuario 7 dies fuere ſereni, duo mixti. Nullus ventus vehementior per integrum menſem fuit, octo dies ſine omni vento ſenſibili fuerunt, et per quinque tantum dies ventus fuit mediocris.

Menſe Februario dies ſereni 8, et reliqui nubili; vbi ſcilicet coelum ex parte nubilum, ex parte ſerenum fuit. Neque hoc menſe ventus vllus vehementior eſt obſeruatus. Octo quoque dies ſine vento fuerunt, et ſex dies ventum mediocrem habuerunt.

Menſe Martio 15 dies fuerunt ſereni. D. 8. nebula ſpiſſa, quam ſequebatur ſerenitas. Die 26. h. 10½. p. m. conſpectum eſt phoenomenum NW verſus. Coelum fuit ad horizontem nebuloſum, radii autem albicantes lucidi ad Zenith vſque extenſi, continuo in parte ſuperiore in apices conicos abeuntes, qui poſt tres horas euanuerunt; ſequebantur dies ſereni aliquot, qui etiam praecedebant. Barometrum erat h. 6. p. m. 28. 25 in deſcenſu, qui in ſequentibus continuabat, thermometrum 159, ventus NO mediocris, quem NO vehementior antecedebat, et O debilis ſequebatur. Venti vehementiores fuerunt d. 4. 5. W, d. 21. O, d. 25 NO, d. 29 O.

Menſe Aprili 13 dies fuerunt ſereni. Ventus vehementior d. 14, coelo ſereno, SW, quem ſequebatur W oo. d. 18. NO, coelo ſereno, d. 28. W. coelo nubilo, pluuio et niuoſo. D. 29. SO.

Menſe

Menſe Maio ventus vehementior d. 7. W, coelo ſereno, et ad horizontem ſubnubilo. d. 18. ex oriente d. 21. N.O et 22. O. d. 28. O. d. 30. et 31. W coelo vt plurimum ſereno, excepto d 18. Ceterum dies 20 fuere ſereni, et nullum tonitru.

Menſe Iunio venti vehementiores d. 11. et 12. coelo nubilo, V.W, d. 15. N, coelo hinc inde ſereno. d. 17, 18 W, coelo ſereno. d. 23. et 24. W. Dies 14 ſereni hoc menſe fuerunt. Die 6. h. 5. p. m. ad h. 6. tonuit, coelum meridie erat ſerenum, barometro 27. 06, et thermometro 111. Ventus S W, qui hora 5, durante tempeſtate mutatus in S.O mediocrem, finita autem tempeſtate h. 6. rurſus W 2 factus eſt, et barometrum, quod durante tempeſtate 26. 90 erat, adſcendit ad 26. 94, et adſcendere perrexit.

Menſe Iulio venti vehementiores d. 1. et 2. W, d. 8. O, d. 11. NO, d. 14. W, d. 16. O, d. 23. et 24. N, d 27. et 28. W. Die 21. Iulii copioſe pluere coepit h. 2½ p. m. et thermometrum ſubitam mutationem obtinuit, h. 2. enim erat 116½, incipiente vero et durante pluuia ad 123½ deſcendit, barometro 27.30, vento W. 1. Iris quoque tenuiſſimi coloris viridis et rubri adparuit h 3, quae durauit ¼ horae. Ceterum dies nubili et pluuii hoc menſe frequentiores fuerunt, quum dies ſereni tantum 6 ſint numerati.

Monuimus iam ſupra obſeruationes anni 1748 deeſſe, progrediendum igitur nunc nobis eſſet ad annum 1749 et annos ſequentes, ne autem nimium longi hic ſimus, ſequentes obſeruationes alteri praelectioni reſeruare placet.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

METHODVS INVESTIGANDI PARALLAXIN LVNAE ET PLANETARVM ECLIPSIBVS STELLARVM FIXARVM A LVNA ET PLANETIS INNIXA.

Auct. A. N. GRISCHOW.

Quanti terrae ſatellitis theoriam ad maximum perfectionis faſtigium perducere et Geographiae perficiendae et rei nauticae excolendae interſit, quis vigilantiam Aſtronomorum, magnosque Geometrarum conatus perſpecta habens non ſentit? Quantis vero arduum hocce opus prematur difficultatibus, ob elementa, ad theoriam lunarem in apricum producendam requiſita, haud perfecte cognita, perſpicuum eſt cuiuis conſideranti difficultates, quibus ipſae nodoſae ac intricatae praedicta elementa determinandi methodi ſunt ſubiectae.

Aſtronomi longa multarum obſeruationum ſerie 18 circiter annorum, Geometrae autem mechanicis legibus Lunae theoriam compeſcere conantur. Vterque vero modus praecipue nititur cognitione perfecta excentricitatis orbitae Lunaris, Apogaei et Nodorum locorum, inclinationis orbitae Lunae ad eclipticam, loci et motus Lunae medii, et parallaxeos horizontalis. Methodos autem ſi conſideremus, quibus Aſtronomi ad iſta elementa determinanda plerumque vtuntur, haud difficulter apparet, nullum fere horum elementorum exinde accurate definiri poſſe. Praeſertim vero modi, Apogaei locum et parallaxin Lunae inueſtigandi, vſitatiores, tam lubrici videntur, vt vix ſperare liceat, fore vt, niſi ſingulari

 adhi-

adhibita in obſeruationibus ipſis diligentia, iſta elementa perfecte pateſcant.

In maxime incognitis lunaris theoriae elementis habenda eſt, vt opinor, parallaxis Lunae horizontalis, quae tamen, vtpote praecipuum elementorum, prae reliquis ex obſeruationibus maxima diligentia inſtitutis definiri deberet. Quia enim locus Lunae verus inter fixas, ſiue e centro telluris ſpectatus, non niſi data parallaxi aſſignari poteſt, manifeſtum eſt, reliqua lunaris orbitae elementa ſupra memorata parallaxi inniti. Inde factum eſt, vt Aſtronomorum bona magnaque pars parallaxi parum fidentes, Apogaei et Nodorum loca determinandi cauſa eclipſes lunares adhibere ſoleant. Quam accurate vero eiusmodi eclipſium obſeruationes inſtituere liceat, vel quantum obſeruationes in diuerſis locis, aut a diuerſis obſeruatoribus habitae, a ſe inuicem diſcrepent, ipſa experientia edocti, explorate iudicium ferre poſſumus de elementis orbitae lunaris ex eclipſibus lunaribus deductis.

Perſpecto igitur ampliſſimo parallaxeos Lunae in tabulis lunaribus accurate condendis vſu, haud inutilis erit opera, methodis, praedictam parallaxin vel accuratius, vel facilius, vel tandem ſaepius obſeruandi, inueniendis, impenſa. Veterum quidem Aſtronomorum in methodis parallaxin corporum coeleſtium, praeſertim vero Lunae et Solis, explorandi, inueniendis ſagacitatem requirere non poſſumus, cum illi varias hunc in finem ingenioſe excogitauerint methodos, quas vero praxis Aſtronomica, praeſertim illis temporibus vſitata, haud contemnendis arguit difficultatibus, ita vt iſtae methodi ne parallaxi Lunae quidem debita exactitudine detegendae inſeruire videantur

deantur. Tales ſunt methodi ab Hipparcho et Ariſtarcho Samio pro inuenienda parallaxi Solis, a Ptolemaeo, Tychone Brahe, Dano, aliisque pro parallaxi Lunae determinanda adinuentae et adhibitae.

Neque minus egregii ſunt modi aliquot huc ſpectantes a Celeberrimo Aſtronomo Anglo Halleio propoſiti, quorum praxis vero in hunc vſque diem ob latitudinem Lunae maximam inconſtantem, aliaque incommoda ex poſitione locorum terreſtrium praxi Aſtronomica florentium naſcentia, ex ſententia ſucceſſiſſe non videtur.

Nec incognita eſt methodus Planetarum parallaxes determinandi omnium ſimpliciſſima, duos poſtulans obſeruatores correſpondentes, in duobus locis terreſtribus ſub eodem circiter meridiano ſatis longe diſſitis locatos, inſtrumentisque munitos differentiis altitudinum meridianarum Planetae et ſtellae alicuius fixae, parallelo Planetae proximae, quam accuratiſſime obſeruandis accommodatis. Comparatis enim parallelorum Lunae et fixae differentiis in vtroque loco obſeruatis, facili negotio parallaxis diſtantiae locorum debita, et hinc ipſa parallaxis horizontalis innoteſcit. Ad maiorem autem exactitudinem obtinendam requiruntur duo loca in diuerſis terrae, reſpectu aequatoris, hemisphaeriis ſita. Hancce quidem methodum parallaxeos Lunae determinandae gratia Illuſt. Baro de Kroſick primus adhibere eſt conatus; ſucceſſus autem, huius incepti votis minime reſpondens, Aſtronomiae parum vtilitatis attulit. Idcirco, perſpecta vtilitate huiusce modi, Cl. Abbas de la Caille e grege Aſtronomorum Gallorum, omnibus rebus rite perpenſis, iuſſus eſt iter in promontorium Bonae Spei ſu-

ſcipere feliciori cum ſucceſſu procul dubio rediturus. Nobilis ſane ille conatus totius orbis terrarum Aſtronomorum et ſideralis ſcientiae cultorum oculos in noſtrum ſatellitem conuertit, nullusque dubito, quin maxima theoria lunaris inde ſit captura incrementa, praeſertim ſi Aſtronomorum in borealioribus Europae erit lunae obſeruandae inuigilantium diligentia, coelique fauor conſpirarent, neque temporis anguſtiae impedimento forent.

Neque tamen putandum eſſe exiſtimo, omnes difficultates, quae in accurate determinanda parallaxeos lunaris quantitate occurrunt, hoc inſtituto ſuperatum iri, neque, abſoluto calculo, nodoſum hocce negotium vlteriori indagine indigere. Terra toties dimenſa, quis dubitet, quin ad maiorem certitudinem obtinendam, rurſum certis in locis menſuranda ſit? Quis igitur dubitabit, quin parallaxeos Lunae quantitas, aeque ac planetarum, diuerſis tutiſſimisque methodis magis magisque ſit ſtabilienda? Eiusmodi vero methodis annumerandus eſt modus inueſtigandi Lunae parallaxin binis obſeruatis Solis eclipſibus, altera in Nodo Lunae aſcendente, altera autem in Nodo deſcendente celebratis innixus. Denique autem haud minus digna et expedita, huc vſque vero neglecta, videtur methodus, quam hic proponam, obſeruatis eclipſibus fixarum a Luna nixa. Cum enim eiusmodi eclipſes ſatis ſint frequentes, ſimulque momentaneae, neotericorum nonnulli fauente ſucceſſu illas longitudinibus terreſtribus accuratius definiendis adhibuerunt. Quid igitur obſtat, cur non aeque feliciter, data locorum differentia meridianorum, parallaxeos lunaris quantitati ſaepius et in diuerſis lunaris orbitae punctis inueſtigandae inſeruire poſſint?

Faten-

Fatendum quidem eſt, vt quantitas parallaxis hac methodo eruenda certior euadat, vtendum eſſe obſeruationibus in locis terreſtribus longe diſſitis inſtitutis. Cum vero noſtris temporibus Sideralis ſcientiae dignitas atque vſus floreſcat quotidie magis, nullus dubito, quin obſeruationes ad hocce propoſitum aptas ſiderum ſcrutatores largiri poſſint. Quin etiam in vaſtiſſimo Ruſſico Imperio conſtituti duo obſeruatores correſpondentes viam ſibi ad parallaxin Lunae hac methodo determinandam patefacere valent. Oram enim ſi comparaueris terrae Camtſchatkae orientaliorem cum obſeruatorii Imperialis ſitu, inuenies Meridianorum differentiam 125 gradus ſuperantem, adeoque ad ſcopum ſufficienti cum exactitudine attingendum ſatis idoneam. Requiritur tantum diligens obſeruator horologio oſcillatorio Aſtronomico, tubo et quadrante munitus, in terra Camtſchatka obſeruandis ſiderum eclipſibus inuigilans. Id quod eo facilius feliciusque effici poteſt, quod eiusmodi obſeruatori inſtrumentorum ſupellectile ſatis modica, et Geographiae Ruthenici Imperii perficiendae ſimul inſeruiente, opus eſt.

Methodum itaque propoſitam explicaturo ſtatim duo diuerſi occurrunt proceſſus; alter ſoli obſeruato vel immerſionis vel emerſionis momento ſtellae alicuius fixae innititur; alter vero magis intricatus immerſionis aeque ac emerſionis momenta poſtulat. De priori igitur proceſſu exponendo primum agam, alterum exemplo illuſtrandum in aliam occaſionem relinquens. Intento vero animo priorem indagans proceſſum, ſequentia ad problema hocce exſoluendum requiri data reperio.

1.) Differentia meridianorum locorum in tellure, vbi obſeruationes peractae ſint, maxima quidem, quantum fieri poteſt, diligentia, ex obſeruationibus eclipſium ſatellitum Iouis determinanda. Conſtat quidem inter Aſtronomos longitudinum terreſtrium differentias ex praedictis ſatellitum Iouis obſeruationibus non ſatis tute deduci poſſe. Nihilominus tamen nullum dubium relinquitur, quin Meridianorum differentiae ex obſeruatis ſatellitum Iouis in quadrato Solis verſantis eclipſibus ſaepius repetitis, immerſionum praecipue momentis adhibitis, reliquisque et coeli et inſtrumentorum circumſtantiis haud neglectis, vel ex appulſibus vmbrae telluris ad lunaris corporis maculas ad 15″ minimum definiri queant.

2.) Differentia altitudinum centri Lunae et ſtellae, huc vſque in obſeruationibus occultationum plerumque neglecta, cum altitudine ſtellae tempore immerſionis vel emerſionis per quadrantem micrometro inſtructum obſeruandae; licet abſoluta ſtellae altitudo haud neceſſario, vt ex ſequentibus patebit, ad calculum requiratur. Ad veram deinde altitudinum differentiam indagandam, refractionum differentiam differentiae altitudinum debitam attendendum eſt.

3.) Diameter Lunae apparens horizontalis, a verticali propter refractionum differentiam diuerſa, micrometri exquiſitiſſimi ope, habita dilatationis luminis ratione, tempore eclipſeos obſeruanda.

4.) Diſtantia ſtellae a nonageſimo eclipticae, vna cum altitudine nonageſimi gradus ad obſeruationis momentum, more conſueto, ſiue potius ex obſeruato ſtellae

fixae,

fixae, cuius aſcenſio recta accuratiſſime datur, per meridianum tranſitu, ad Poli eleuationem datam determinanda.

5. Locus ſtellae eclipſin paſſae apparens, tam ſecundum longitudinem, quam ſecundum latitudinem, ex dato loco vero, adhibitis et aberrationis et mutationis axis telluris correctionibus, inueſtigandus.

6. Motus Lunae verus horarius in longitudinem, ex optimis lunaribus tabulis deſumendus, ſupputando locum Lunae verum ad obſeruationis momentum loco occidentaliori conueniens, et deinde ad horam proxime inſequentem. Proinde exactior hoc modo prodibit motus Lunae verus quaeſitus, cum parallaxis momentum obſeruationis in locis occidentalioribus ſemper anteuertat momento obſeruationis in locis orientalioribus habitae.

Hisce ita adornatis expoſitisque, ipſum aggrediemur calculum, exhibendo in ſequenti problemate formulas eruendae, et differentiae latitudinum ſtellae centrique Lunae tempore obſeruationis, et diſtantiae pro eodem temporis momento Lunae a coniunctione viſa inſeruientes:

PROBLEMA.

Dato momento immerſionis ſtellae fixae, cuius locus apparens ad diem eclipſeos reductus accuratiſſime datur; datisque ad idem momentum differentia altitudinum ſtellae et centri Lunae, diametro Lunae apparenti, nonageſimo eclipticae gradu eiusdemque altitudine, inuenire differentiam latitudinum ſtellae et centri Lunae, nec non diſtantiam Lunae in ecliptica a coniunctione viſa.

SOLVTIO.

Tab. XIV. Fig. 1. In ſchemate repraeſentet E C L eclipticam, cuius Polus alter P; Z deſignet zenith, C gradum eclipticae ab oriente puncto nonageſimum, et Z P nonageſimi gradus altitudinem. Sit porro ipſo immerſionis momento centrum Lunae in M, et ſtella in S. Ductis arcubus A S horizonti, et N S eclipticae parallelis, A M denotabit altitudinum differentiam ſtellae et centri Lunae, M N differentiam latitudinum, et angulus M P S diſtantiam Lunae a coniunctione viſa cum ſtella ipſo immerſionis momento.

Vocetur altitudo nonageſimi eclipticae gradus Z P - - a
Diſtantia ſtellae a nonageſimo per angulum ZPS definita - - v
Differentia altitudinum ſtellae et centri Lunae A M - - δ
Semidiameter Lunae apparens M S - - - - - α
Latitudo ſtellae apparens, cuius complementum S P - - l

Dantur igitur in triangulo ſphaerico Z P S latera Z P, P S, et angulus Z P S, hinc erit

$$\text{cotang. } ZSP = \frac{\text{coſ. } l - \text{coſ. } v \cdot \text{ſin. } l \cdot \text{tang. } a}{\text{ſin. } v \cdot \text{tang. } a} = \text{cotang. } ASN$$

adeoque

$$\text{ſin. } ASN = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{coſ. } l - \text{coſ. } v \cdot \text{ſin. } l \cdot \text{tang. } a}{\text{ſin. } v \cdot \text{tang. } a}\right)^2}}$$

et

$$\text{coſin. } ASN = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{ſin. } v \cdot \text{tang. } a}{\text{coſ. } l - \text{coſ. } v \cdot \text{ſin. } l \cdot \text{tang. } a}\right)^2}}$$

Porro erit in triangulo rectangulo A M S pro rectilineo habendo ſin. $ASM = \frac{\delta}{\alpha}$; cumque angulus MSN ſit $= ASM + ASN$, erit

coſin.

$$\text{coſin. } MSN = \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{ſin. }\upsilon\text{ tang. }\alpha}{\text{coſ. }l.-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l.}\right)^2}} - \frac{\delta}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{coſ. }l.-\text{coſ. }\upsilon\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l.}{\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.}\right)^2}}$$

$$\text{et ſin. } MSN = \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{coſ. }l-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ ſin. }l}{\text{ſin. }\upsilon\text{ tang. }\alpha}\right)^2}} + \frac{\delta}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{ſin. }\upsilon\text{ tang. }\alpha.}{\text{coſ. }l.-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l.}\right)^2}}$$

Quibus inuentis prodibit diſtantia centri Lunae a coniunctione viſa in ecliptica pro tempore immerſionis quaeſita, ſiue angulus

$$MPS = \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\text{coſ. }l.\sqrt{1+\left(\frac{\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.}{\text{coſ. }l.-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l.}\right)^2}} - \frac{\delta}{\text{coſ. }l.\sqrt{1+\left(\frac{\text{coſ. }l.-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l.}{\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha}\right)^2}}$$

$$\text{vel } MPS = \frac{(\text{coſ. }l-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l)\sqrt{\alpha^2-\delta^2}-\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\delta.}{\text{coſ. }l.\sqrt{(\text{coſ. }l-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l)^2+(\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha)^2}}$$

Simili modo differentia latitudinum centri Lunae et ſtellae, vel recta MN ad idem temporis momentum, erit

$$= \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{coſ. }l-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l}{\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha}\right)^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha}{\text{coſ. }l-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l}\right)^2}}$$

$$\text{vel } MN = \frac{\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha\sqrt{\alpha^2-\delta^2}+(\text{coſ. }l-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l)\delta.}{\sqrt{(\text{coſ. }l-\text{coſ. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha.\text{ſin. }l)^2+(\text{ſin. }\upsilon.\text{ tang. }\alpha)^2}}$$

 Poſitis

Poſitis tempore obſeruationis altitudinibus centri Lunae et ſtellae aequalibus, erit:

$$\text{angulus } MPS = \frac{\alpha}{\cos. l \sqrt{1 + \left(\frac{\sin. v \cdot \tan g. a}{\cos. l - \cos. v. \tan g. a . \sin. l}\right)^2}}$$

$$\text{et } MN = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos. l - \cos. v. \tan g. a. \sin. l}{\sin. v. \tan g. a}\right)^2}}$$

Hinc datis α et δ ſiue ſemidiametro Lunae apparenti et differentia altitudinum in minutis ſecundis, formulae praecedentes quaeſitam quoque in minutis ſecundis exhibebunt, et differentiam latitudinum et diſtantiam centri Lunae a coniunctione viſa in ecliptica, quo tandem modo nullo fere negotio locus Lunae viſus ad tempus obſeruationis pro vtroque loco eclipſi obſeruandae deſtinato aſſignari poterit.

Cum hoc in negotio nil difficilius ſit determinatu, quam altitudinum Lunae et ſtellae differentia ipſo immerſionis vel emerſionis momento quam accuratiſſime obſeruanda, operae pretium erit, vt iſta differentia ante immerſionem, vel poſt emerſionem, crebro capiatur. Adſcripto enim ſingulis obſeruationibus tempore penduli, ſatis accurate, ſi dentur tres aliquae aut quatuor differentiae obſeruatae, definiri poterit differentia altitudinum tempori immerſionis vel emerſionis competens. Nam variatio altitudinum mutua ſemper erit exilis, eoque minor, quo maior ſiderum a meridiano elongatio, manente eadem azimuthorum differentia, ita vt a motu Lunae proprio abſtrahendo, incrementum, ſiue decrementum, altitudinis

altitudinis Lunae, ſit ad incrementum, ſiue decrementum, altitudinis ſtellae, paruo temporis interuallo reſpondens, in ratione directa ſinus azimuthi Lunae ad ſinum azimuthi ſtellae: vnde lucide apparet, altitudinum variationem mutuam, eo temporis momento, quo ſidera in eodem verticali obſeruantur, eſſe omnium minimam. Ad quod probandum ſit in Z Zenith, in P Polus aequatoris, et in S Stella aliqua fixa: Ponatur eleuatio aequatoris Z P $= a$; diſtantia ſtellae a Polo S P $= p$; angulus ad Polum Z P S $= x$; azimuthus S Z P $= y$; et diſtantia ſtellae a vertice Z S $= z$; eritque $\text{coſ.}\, z = \text{coſ.}\, x.\, \text{ſin}\, a.\, \text{ſin.}\, p. + \text{coſ.}\, a.\, \text{coſ.}\, p.$, hinc differentiando $\text{ſin.}\, z.\, dz = \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, p.\, \text{ſin.}\, x.\, dx$, vel $dZ = \frac{\text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, p.\, \text{ſin.}\, x.\, dx.}{\text{ſin.}\, z.}$ Cum vero $\text{ſin.}\, Z = \frac{\text{ſin.}\, x.\, \text{ſin.}\, p.}{\text{ſin.}\, y.}$; obtinebitur incrementum, vel decrementum altitudinis ſtellae dz paruo temporis interuallo per dx expreſſo reſpondens $= \text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, y.\, dx$, ex qua formula ſupra allata facile fluunt. Tab. XIV. Fig. 2.

Quod iam ad variationem differentiae altitudinum Lunae et ſtellae ex motu Lunae proprio oriundam attinet, illa facili negotio ſequentium aequationum ope aſſignari poterit. Vocato enim incremento aſcenſionis rectae Lunae dato tempuſculo reſpondente dx, erit variatio altitudinum competens, ſiue $dz = \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, y.\, dx$, quae tricies circiter ſumta aequatur abſoluto incremento, vel decremento, altitudinis ſtellae eidem tempuſculo conueniens. Ponatur ſimili modo mutatio declinationis Lunae paruo temporis interuallo debita $= dp$, eritque variatio dif-

ferentiae altitudinum a mutata declinatione Lunae proficiſcens $= \frac{d\,p}{\mathit{sin}.p.} \sqrt{(\mathit{sin}.p)^2 - \mathit{sin}.y.\mathit{sin}.a)^2}$.

Adhibuimus quidem in calculo praecedenti differentiam altitudinum, vtpote arculum quadrantis mobilis micrometro virgaque gubernatrice (*verge de conduite*) inſtructi ope obſeruatu facillimum. Dubitare tamen non poſſumus, quin praedictorum elementorum inueſtigatio facilius ſub manus ſuccederet, ſi obſeruatores ſectore Grahami, vel potius tubo micrometro munito machinaeque parallacticae impoſito armati obſeruandae declinationum differentiae tempore immerſionis, ſiue emerſionis, incumberent. Quocunque vero modo res peragitur, ſufficit, vt ad tempus obſeruationis diſtantia centri Lunae a coniunctione viſa in ecliptica nec non differentia latitudinum Lunae et ſtellae quam diligentiſſime determinentur. Hisce enim elementis, tanquam baſi, ſequens parallaxeos horizontalis inueſtigatio in ſequenti problemate, calculo duce, explicanda innititur.

PROBLEMA.

Datis immerſionis ſtellae poſt Lunam e binis terreſtribus locis longe diſſitis, poſitione datis, obſeruatae momentis, nonageſimo gradu eclipticae eiusque altitudine vna cum loco Lunae viſo reſpectu ſtellae occultatae ex obſeruationibus ad praedicta momenta deducto, et motu Lunae vero horario in longitudinem, determinare eius parallaxin horizontalem.

SOLV-

SOLVTIO.

Inuenta modo in problemate antecedente expoſito, diſtantia centri Lunae a coniunctione viſa, cognitaque eodem modo determinata differentia latitudinum ſtellae centrique Lunae, nullo negotio locus Lunae viſus ad datum obſeruationis tempus pro vtroque loco innoteſcit. Ponatur igitur breuitatis cauſa

Momentum immerſionis e loco orientaliori obſeruatum	$= I$
e loco occidentaliori - -	$= i$
Differentia Meridianorum locorum - -	$= D$
Diſtantia centri Lunae a coniunctione viſa tempore immerſionis pro loco orientaliori - -	$= Q$
pro loco occidentaliori -	$= q$
Diſtantia viſa centri Lunae a nonageſimo eclipticae in loco orientaliori - - - -	$= R$
in loco occidentaliori - - - -	$= r$
Altitudo nonageſimi ad locum oriental. ſupput.	$= A$
ad locum occidentaliorem	$= a$
Latitudo Lunae viſa momento immerſionis in loco orientaliori -	$= P$
in loco occidentaliori -	$= p$
Motus Lunae horarius verus in longitudinem	$= m$
Parallaxis Lunae horizontalis - - -	$= x$

Hisce ita praeparatis parallaxis Lunae longitudinis tempore immerſionis e loco orientaliori obſeruatae conveniens erit $= x . \frac{ſin. R . ſin. A}{coſ. P}$. item parallaxis longitudinis pro loco occidentaliori $= x . \frac{ſin. r . ſin. a}{coſ. p}$. Quibus datis prodibit momentum coniunctionis verae Lunae cum ſtella ſequente ratione:

Diſtan-

Diſtante Luna tempore immerſionis a nonageſimo eclipticae ortum verſus.

$$\text{Tempus Conj. verae}\begin{cases}\text{pro loco oriental.} = I + \frac{3600}{m}\left(Q + \frac{x.\text{ſin.}R.\text{ſin.}A}{\text{coſ.}P}\right)\text{ſec.}\\ \text{pro loco occidental.} = i + \frac{3600}{m}\left(q + \frac{x.\text{ſin.}r.\text{ſin.}a}{\text{coſ.}p}\right)\text{ſec.}\end{cases}$$

Diſtante Luna a nonageſimo occaſum verſus.

$$\text{Tempus Conj. verae}\begin{cases}\text{pro loco oriental.} = I + \frac{3600}{m}\left(Q - \frac{x.\text{ſin.}R.\text{ſin.}A}{\text{coſ.}P}\right)\text{ſec.}\\ \text{pro loco occidental.} = i + \frac{3600}{m}\left(q - \frac{x.\text{ſin.}r.\text{ſin.}a}{\text{coſ.}p}\right)\text{ſec.}\end{cases}$$

Ex hiſce formulis ſequentes eliciuntur expreſſiones differentiam Meridianorum datam exhibentes:

Diſtante Luna in vtroque loco a nonageſimo ortum verſus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q + x\left(\frac{\text{ſin.}R.\text{ſin.}A}{\text{coſ.}P} - \frac{\text{ſin.}r.\text{ſin.}a}{\text{coſ.}p}\right)\right]\text{ſec.}$$

Diſtante Luna in vtroque loco a nonageſimo occaſum verſus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q - x\left(\frac{\text{ſin.}R.\text{ſin.}A}{\text{coſ.}P} - \frac{\text{ſin.}r.\text{ſin.}a}{\text{coſ.}p}\right)\right]\text{ſec.}$$

Diſtante Luna a nonageſimo in loco orientaliori ortum verſus, in loco occidentaliori occaſum verſus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q + x\left(\frac{\text{ſin.}R.\text{ſin.}A}{\text{coſ.}P} + \frac{\text{ſin.}r.\text{ſin.}a}{\text{coſ.}p}\right)\right]\text{ſec.}$$

Diſtante Luna a nonageſimo in loco orientaliori occaſum verſus, in loco vero occidentaliori ortum verſus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q - x\left(\frac{\text{ſin.}R.\text{ſin.}A}{\text{coſ.}P} + \frac{\text{ſin.}r.\text{ſin.}a}{\text{coſ.}p}\right)\right]\text{ſec.}$$

Facili iam negotio aequationes ſequentes pro parallaxi Lunae horizontali quaeſita deducuntur, nempe;

In caſu primo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}\left(D - (I - i)\right) + q - Q}{\frac{\text{ſin.}R.\text{ſin.}A}{\text{coſ.}P} - \frac{\text{ſin.}r.\text{ſin.}a}{\text{coſ.}p}}$$

In

In ſecundo

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(D-(I-i))+q-Q}{\frac{\text{ſin. } r.\text{ ſin. } a}{\text{coſ. } p} - \frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P.}}}$$

In tertio.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(D-(I-i))+q-Q}{\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P.}} + \frac{\text{ſin. } r.\text{ ſin. } a}{\text{coſ. } p.}}$$

In quarto.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(I-i-D)+Q-q}{\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P}} + \frac{\text{ſin. } r.\text{ ſin. } a}{\text{coſ. } p}}$$

Immerſionis momentum licet obſeruatu ſit facilius, quam emerſionis tempus, quippe quod maiorem attentionem requirens plerumque incertius, propter oculos obſeruando defatigatos, euadat, dubitandum non exiſtimaui, quin hic paucis ſubnecterem formulas parallaxi horizontali ex obſeruata emerſione ſtellae eruendae inſeruientes.

Retentis igitur iisdem datarum quantitatum deſignationibus ſequentes obtinebimus valores ipſius x:

In caſu primo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}[D-(I-i)]+Q-q}{\frac{\text{ſin. R. ſin. A}}{\text{coſ. P}} - \frac{\text{ſin. } r.\text{ ſin. } a}{\text{coſ. } p}}$$

In ſecundo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}[D-(I-i)]+Q-q}{\frac{\text{ſin. } r\text{ . ſin. } a}{\text{coſ. } p} - \frac{\text{ſin. R . ſin. A}}{\text{coſ. P}}}$$

In tertio.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}[D-(I-i)] + Q - q}{\frac{ſin.\,R\,.\,ſin.\,A}{coſ.\,P} + \frac{ſin.\,r\,.\,ſin.\,a}{coſ.\,p}}$$

In quarto.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(I-i-D) + q - Q}{\frac{ſin.\,R\,.\,ſin.\,A}{coſ.\,P} + \frac{ſin.\,r\,.\,ſin.\,a}{coſ.\,p}}.$$

In ſupra exhibitis pro inuenienda parallaxi Lunae horizontali formulis ſemper iſtam parallaxin ſuppoſuimus per tempus inter obſeruationes elapſum conſtantem; Cum vero differentiam nunquam non ſatis notabilem intercedere neceſſe ſit, leuis ex formulis praecedentibus inuentae parallaxi Lunae horizontali adhibenda erit correctio, ſiue incremento, ſiue decremento parallaxis horizontalis interea temporis acquiſito conueniens. Adeo quidem haec correctio exilis eſt, praeſertim verſante Luna prope Apogaeum vel Perigaeum, vt eam iure negligere poſſimus; verum vt leuioris huius correctionis rationem habere poſſimus, cum Luna in diſtantia a terra media verſatur, ponamus parallaxin Lunae horizontalem tempore obſeruationis in loco orientaliori $= x$, in loco autem occidentaliori $= x \mp z$, ita vt z deſignet incrementum vel decrementum parallaxeos horizontalis tempori inter obſeruationes elapſo debitum. Quo facto invenimus praedictam correctionem parallaxeos horizontalis

$$= \frac{z}{\frac{coſ.\,p\,.\,ſin.\,R\,.\,ſin.\,A}{coſ.\,P\,.\,ſin.\,r\,ſin.\,a} + 1}.$$

quo valore demto quantitati parallaxeos horizontalis ex formulis ſupra inuentis determinatae, vel ad eandem addito,

dito, prodibit parallaxis Lunae horizontalis momento eclipſeos in loco orientaliori obſeruato reſpondens, atque haud dificulter patebit, vtrum quantitas iſta addenda ſit, an ſubducenda. Tabulae enim Aſtronomicae accurate ſatis ſuppeditant incrementum, vel decrementum parallaxeos horizontalis pro tempore inter binas obſeruationes quaeſitum, et ex poſitione Lunae, reſpectu eclipticae nonageſimi gradus, de vnitatis valore ſiue affirmatiuo, ſiue negatiuo iudicandum eſt. Si enim Luna in vtroque loco tempore obſeruationis a nonageſimo ſiue ortum ſiue occaſum verſus diſtans viſa fuerit, vnitas ſubducenda, e contra vero addenda eſt, verſante Luna in diuerſis eclipticae reſpectu nonageſimi quadrantibus.

Supereſt vt pauca addam de delectu et obſeruationum et locorum terreſtrium huiusmodi obſeruationibus iuſtituendis deſtinandorum, obſeruando. Conſiderandi ſcilicet hic veniunt caſus, quibus leuis error ſiue in meridianorum differentiam, ſiue in obſeruationes ipſas, ratione temporis, admiſſus, maiorem minoremue in parallaxeos calculum trahat errorem. Hunc in finem ponamus errorem, ſiue in meridianorum differentia, ſiue in ipſis obſeruationibus $= dz$, et errorem in parallaxi horizontali hinc pendentem $= dx$, prouenietque

$$dx = \frac{m\,dz}{3600\left(\frac{\text{ſin. R . ſin. A}}{\text{coſ. P}} \mp \frac{\text{ſin. r. ſin. a}}{\text{coſ. p}}\right)}$$

Quae formula declarat errorem in parallaxi horizontali maioris vel minoris eſſe momenti, pro minori maioriue valore terminorum $\frac{\text{ſin. R. ſin. A}}{\text{coſ. P}}$ et $\frac{\text{ſin. r. ſin. a}}{\text{coſ. p}}$ rationem indicantium parallaxium longitudinis obſeruationum temporibus reſpondentium. Vnde ſequitur

1. Errorem augeri adhibita horum terminorum differentia, id quod ſemper accidit quandocunque Luna tempore eclipſeos in vtroque loco in eandem plagam a nonageſimo eclipticae diſtat. Error tamen minor euadit haerente luna prope nonageſimum.

2. Error minus erit notabilis cum Luna in diuerſis eclipticae quadrantibus reſpectu nonageſimi obſeruata fuerit, quo caſu termini praedicti in vnam ſummam ſunt colligendi, quae conditio reliquis, ad errores maxima qua fieri poteſt cura euitandos, longe praeferenda eſt, eoque magis, quo longius Luna a nonageſimo diſtiterit.

Ex hiſce concludimus, obſeruatores in determinandam hac methodo parallaxin incumbentes conſtitutos eſſe oportere in locis ſecundum longitudinem longe diſſitis, quo errores ſiue in differentia meridianorum, ſiue in obſeruationibus ipſis ineuitabiles, minime Aſtronomos de vera parallaxeos Lunae quantitate inuenienda detineat. Liquet vero ſimul, errorem in determinanda parallaxi Lunae horizontali in partibus aequatoris, quibuscunque in locis terreſtribus, et ſub quibusuis conditionibus methodo noſtrae maxime fauentibus obſeruationes inſtitutae fuerint, minimum aequare errorem admiſſum ſiue in obſeruationem ipſam, ſiue in meridianorum differentiam, in minutis ſecundis temporis diuiſum per 4.

Cum autem eiusmodi conditiones ſint oppido rarae et forte nunquam poſſibiles, Aſtronomis ſaltem enitendum eſt, vt obſeruationes correſpondentes, quas methodus haec poſtulat, in locis terreſtribus inſtituantur, quarum poſitio ita ſit comparata, vt terminorum $\frac{\text{ſin. R. ſin. A}}{\text{coſ. P}}$ et $-\frac{\text{ſin. r. ſin. a}}{\text{coſ. p}}$ ſiue ſumma, ſiue differentia obtineant valorem

vel

vel vnitate maiorem, vel parum minorem. Si ex. gr. vt initio huius diſſertationis propoſuimus, bini obſeruatores alter Petropoli, alter in terra Camtſchatka in vico Bolſcherezkoi eandem ſtellae cuiusdam fixae a Luna eclipſin iuxta praecepta ſupra tradita obſeruarent, leui negotio ex formulis noſtris inueniemus errorem, ſiue in differentia meridianorum, ſiue in ipſa obſeruatione fore ad errorem inde natum in parallaxi Lunae horizontali vt 3. ad 1. circiter, hoc eſt, ſi in differentiam meridianorum irrepſerit error triginta minutorum ſecundorum temporis, error exinde oriundus in parallaxi Lunae horizontali aequabitur 10. tantum minutis ſecundis aequatoris.

Supponamus iterum, Parallaxin Lunae ex Petropoli et Londini obſeruata fixae a Luna eclipſi eſſe deducendam, reperiemus errorem in parallaxi horizontali Lunae errori in meridianorum differentiam admiſſo, ferme aequalem h. e. error 15 min. ſec. temporis, ſiue in differentia meridianorum praedictorum locorum, ſiue in obſeruatione eclipſeos, producere valet errorem 15 min. ſec. aequatoris in parallaxi horizontali noſtri ſatellitis.

Hinc viciſſim facile intelligere poſſumus, quantus certitudinis gradus in determinanda meridianorum differentia ab eclipſibus fixarum a Luna ſit expectandus. Patet enim, hanc methodum eſſe omnium certitudine praeſtantiſſimam, quando de locis in tellure vicinis agitur. De locis autem poſitione determinandis longe diſſitis ſi ſermo eſt, haud aeque feliciter res ſuccedit. Si e. g. in differentiam meridianorum Petropolin inter et vicum Bolſcherezkoi hac methodo inquirendum eſſet, in parallaxi autem Lunae horizontali ex tabulis lunaribus

 de-

deſumta deprehenderetur error 30″ (ſaepe maius adhuc inter parallaxin Lunae certis ex tabulis deſumtam et veram eſſe diſcrimen haud dubito) ex praecedenti ratione colligimus differentiam meridianorum errore triplo circiter maiori ſiue 1′. 30″. temp. affectam, quin magis erroneam, quam ex eclipſibus ſatellitum Iouis.

Ex hiſce demum conſiderationibus colligimus, haud infructuoſum futurum, neque parum vtilitatis parallaxi noſtri ſatellitis accuratius rimandae eſſe allaturum, methodo, quam proponimus, innixum Aſtronomorum laborem. Maximam quidem adhibendam eſſe prudentiam ex praecedentibus ratiociniis non intelligere non poſſumus; cum vero aeuo noſtro obſeruatoria exquiſitiſſimis inſtrumentis, horologiisque coelo conſonis exactiſſime ſint exornata, vel exornari queant, quin haec omnia ad voluntatem noſtram fluere poſſint, nemini vel dubitare licet.

Antequam diſſertationi huic finem imponam, pauca de vtilitate huius methodi ad parallaxin planetarum definiendam afferre haud inconſultum videtur. Intelligimus enim facile ex ſupra dictis, planetarum parallaxin, hactenus minus perfecte cognitam, aeque accurate ac lunarem, hoc modo inueſtigari poſſe, ſi obſeruationes occultationum fixarum a planetis in diuerſis telluris habitationibus habitae Aſtronomis ſuppeterent.

Leui quidem attentione patet, occultationes fixarum a planetis multo eſſe rariores, quam eclipſes fixarum a Luna, ex quibus non niſi 12. ad ſummum circiter ſpatio annuo, intra quod Luna 13 orbitam 100. circiter ſtellas nudo oculo conſpicuas complectentem percurrit, Aſtronomorum oculos non fugiunt. Sed planetae Mars

Mars et Venus ambo definiendae noſtri ſyſtematis ſolaris amplitudini inſeruientes eclipſium fixarum a planetis difficultatem compenſare videntur, cum ſaepius ad nebuloſam cancri et ad pleiades appellant. Maxima vero difficultas, in obſeruandis fixarum a planetis occultationibus obuia, verſatur in vero ſiue immerſionis, ſiue emerſionis momento obſeruando, praeſertim ſi ſtella fuerit inferioris honoris. Hanc ob cauſam huiusmodi eclipſes praeſtantiſſimis tubis micrometris munitis obſeruare decet.

Triplici equidem modo in calculo parallaxium planetarum eclipſibus fixarum innixo errari poſſe manifeſtum eſt. 1°.) Conſiderandus eſt error in momento eclipſeos. 2.) error in differentia meridianorum, et 3.) error in diſtantia centri planetae a coniunctione viſa cum ſtella tempore immerſionis, ſiue emerſionis. Primo loco nominatus error eo prouenit, quod fixarum a planetis occultationes non aeque ſint momentaneae ac earum eclipſes a Luna. Propter radiorum luminis dilatationem enim, diametrum planetae amplificantem, ſtella per interuallum temporis eo longius, quo planetae motus e terra viſus tardior, planetae margini inhaerere videtur, paulatimque, ſi ſtella fuerit parua, euaneſcens a planeta, vbi radii luminis circulum aberrationis conſtituentes ſunt fulgentiſſimi, non amplius, vel ante verum immerſionis poſt planetae corpus momentum, diſcerni poteſt.

Ponamus motum planetae horarium in longitudinem in minutis ſecundis expreſſum $= m$, et exiguam diſtantiam, qua ſtella a margine corporis planetae abeſſe poſſet, tempore, quo oculo armato ſeſe iam, propter amplificatam diametrum, ſubduxerit $= \delta$. Proinde error in mo-

momentum eclipſeos admiſſus erit $= \frac{3600}{m}\delta$. Ad errorem iam in parallaxin planetae horizontalem irrepturum definiendum, ſubſtituatur in formula ſupra inuenta

$$dx = \frac{m\,dz}{3600\left(\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P}} \mp \frac{\text{ſin. }v\text{ ſin. }a}{\text{coſ. }p}\right)}$$

ipſius dz valor inuentus $\frac{3600\,\delta}{m}$; prodibitque error in parallaxi horizontali quaeſitus $= \frac{\delta}{\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P}} \mp \frac{\text{ſin. }v\text{ ſin. }a}{\text{coſ. }p}}$ ex quo apparet, errorem hunc ſemper eſſe eiusdem valoris, quaecunque fuerit planetae velocitas; ita vt δ hic pro quantitate conſtanti valde parua, nullumque in parallaxi planetae determinanda errorem productura, ſi ambo obſeruatores eadem quantitate, inque eandem partem errauerint, haberi poſſit.

Errorem iam ſi conſideremus, in quem erronea meridianorum differentia inducere valet, patet, illum fore eo maiorem, quo planeta fuerit rapidior, poſita ratione parallaxium longitudinis, tempore obſeruationum, ſiue quantitate $\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P}} \mp \frac{\text{ſin. }r\text{ ſin. }a}{\text{coſ. }p}$ conſtante. Ex praecedentibus autem cognouimus, errorem in momentum eclipſeos admiſſum nullo modo a velocitate planetae pendere, vnde methodum colligimus, planetae parallaxin accuratiſſime determinandi, eclipſi ſtellae fixae e binis in tellure locis obſeruata, dum planeta a tellure viſus ſimul prope ſtationem ſuam haeret, innixum. In ſtella Martis ſcilicet circa tempus, quo achronice oritur, vbi ſimul eius parallaxis eſt maxima. Talis forte eclipſis continget circa d. 11. Dec. ſt. v. 1753, cum planeta Mars, in ipſa ſtatione verſans ad directionem, cum ſtella

ſtella δ arietis adeo arcte coniungitur, vt eius a praedicta ſtella boream verſus diſtantia futura ſit valde exigua, vel forſan nulla. In Venere haec obtinent, cum inter elongationem a Sole, vbi maxime ſplendet, et coniunctionem inferiorem cum Sole intermedia verſatur. Ponamus e. gr. motum horum planetarum alterutrius diurnum, die quo ſtellam fixam occultat, $= 6'$, vel eius motum horarium in longitudinem $= 15''$, occultatio vero obſeruata ſit e duobus in tellure locis longe diſſitis, v. g. Petropoli et in vico Bolſcherezkoi in terra Camtſchatka, ita vt $\frac{ſin.\ R\ ſin.\ A}{coſ.\ p} + \frac{ſin.\ r\ ſin.\ a.}{coſ.\ P} = 1.5$ quam proxime. Iam ſi in differentia Meridianorum praedictorum locorum ſupponatur error integri minuti primi temporis, manifeſtum eſt, errorem hinc pendentem in Parallaxi planetae horizontali ad $\frac{1}{6}''$ tantum aſſurgere, adeo vt non obſtante errore 15 min. prim. in differentia longitudinum locorum planetae parallaxis caeteris paribus ad partem ſui 180 definiri queat.

In maximam autem difficultatem incurrere videtur ſumma cum diligentia tempore immerſionis determinanda planetae a coniunctione viſa cum ſtella in ecliptica diſtantia, quae duplicem ob cauſam erronea euadere poteſt, partim ob errorem in differentia, ſiue altitudinum, ſiue declinationum planetae et ſtellae, partim ob ſummam difficultatem accurate obſeruandi planetarum diametros apparentes. Aſtronomi exquiſitiſſimis inſtrumentis variisque modis de diametris planetarum determinandis adnixi rem iam conſummatam exploratamque eſſe vix fatentur. Cum vero ad calculum parallaxeos horizontalis inſtituendum differentia potius differentiarum quam abſoluta planetae a

coniunctione viſa diſtantia in vtroque loci obſeruata requiratur, huiusmodi errores ſane leuioris momenti ſunt cenſendi, praeſertim ſi, adhibito tubo Gregoriano micrometro inſtructo machinaeque parallacticae impoſito, obſeruatorum cura in menſuranda ipſo immerſionis momento declinationum ſtellae et planetae differentia euigilaret.

OBSERVATIO
INSOLITI LVMINIS AVSTRALIS PETROPOLI HABITA

Auct. A. N. GRISCHOW.

Singulas aurorae borealis obſeruationes, cum in noſtris oris ſeptentrionalibus hocce lumen polare noctes ſaepiſſime illuſtret, Phyſicorum disquiſitioni ſubmittere parum vtilitatis et erroneis huius meteori hypotheſibus diſcutiendis, et verae theoriae detegendae afferre videtur. Singulares tamen et notatu digniſſimas huius luminis apparitiones cum naturae cultoribus communicare vel maxime neceſſarium, ſaepe numero autem neglectum eſſe patet. In huiusmodi apparitionibus merito annumeratur meteorum, quod per aliquot dies in horizonte auſtrali quaſi immobile obſeruaui, eoque magis, quod eius locus, tempeſtatis mutationes ſubſecutae, et reliquae circumſtantiae ad diligentiorem coeli boreali lumine illuſtrati contemplationem obſeruatores excitare valent.

D. 6. Nou. ſt. v. 1751 circa h. 9. p. m. mihi coelum ſtellatum ſpeculanti inſolitum quoddam viſum eſt lumen rutilans duos circiter gradus longum in ipſo horizonte

zonte auſtrali extenſum, in ſeram vsque noctem in eodem loco, nulla obſeruata figurae variatione, ſubſiſtens. Meteoron hocce valde mirans, ſuſpicatus ſum, ſplendorem hunc proficiſci a ſtella primae magnitudinis Fomahant horizonti Petroburgico proxima, deinde vero veſperi iſtam ſtellam a loco huius luminis ſatis longe eſſe remotam obſeruaui.

D. 7. Nou. Cum crepuſculo, ſtellis primae et ſecundae magnitudinis iam eminentibus, coeloque eximie vndique ſereno lumen hocce auſtrale iterum ſub eadem figura conſpexi 10 circiter gradibus a priſtino loco in ipſo vero horizonte orientem verſus diſtans, in vno eodemque loco permanens ad h. 9. p. m. vsque, quo nempe tempore maſſa rutilans ſpatio horae octantis nubecula turbida cingebatur, ſubitoque radiationes fulgurationum haud abſimiles ex ipſa maſſa rutilante ſurgentes ſeſe vndantes per totum coelum diffundebant. Paulo poſt coelum vndique nubibus e nubecula lumen auſtrale cingente ſurgentibus magis ac magis turbidis inuoluebatur, nullo per hoſce dies aurorae borealis animaduerſo veſtigio.

Hocce notatu digniſſimum lumen auſtrale haud inepte probandis mutationibus tempeſtatum lumen boreale ſubſequentibus inſeruire videtur, cum ventus biduo continenti ex NNW ſpirans ipſo, quo lumen auſtrale reſolutum, radios emittebat, momento ex eadem plaga auſtrali flare caepit, tempeſtatisque mutatio ſatis notabilis niuisque ſolutio inſequebatur.

Ad circumſtantias huius meteori tempeſtatisque mutationes magis dilucidandas adiungere conſultum viſum eſt meteorologicarum obſeruationum triduum.

Dies et horae	Barom. menſurae Pariſ.	therm. De l'Isle	Directio et vis venti	Directio nubium.	Coeli facies.
VI. Nou.					
7½ a. m.	27. 34	153½	NW.NWZN.f.2	NWZN f.2	Coelum fere vndique grate ſerenum
1. p. m.	27. 41½	153¾	NW. f. 2.	NW. f. 2	Nubes turbidae multum diſſociatae.
10. p. m.	27. 70	156½	NNW.f. 2.	– –	Fere vndique coelum turbidum ſtellis emicantibus.
VII. Nou.					
7½ a. m.	27. 90	161½	NNW. plg. 1	NNW. 1	Spiſſae nubeculae albidae, reliquum coelum eximie ſerenum.
12. m.	27. 99	156	NNW. plg. 1	NNW.plg 1	
4. p. m.	28. 11	157	N. plg. 1	– –	Fere vndique coelum grate ſerenum
10½ p. m.	28. 15	161½	Inde ab h. 9¼ venti auſtr. vis. f. 2	5. f. 2.	Coelum vndique obnubilatum.
VIII. Nou.					
9. a. m.	28. 17	159½	SW. f. 2.	– –	Nubes ſubturbidae paſſim diſſociatae. Circa Solis ortum coelum rubens
1. p. m.	28. 09	158½	SW. f. 2.		Nix larga vsque ad h. 6. p. m.
9. p. m.	27. 84	-	SW. f. 2.	– –	Inde ab h. 8. p. m. ad h. 10. nubes multum diſſociatae, deinde coelum vndique turbidum.
10½ p. m	27. 81½	146½	SW. f. 3 niſi 3	– –	

OBSERVATIONES
LIPSIAE HABITAE
an. 1749. ſtil. nou.
a
G. HEINSIO.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS.

Die 16 Septembr. quo Iupiter oppoſitionem cum Sole paulo poſt meridiem celebrabat, eclipſes Satellitum Iouis primi et ſecundi obſeruare licuit; quae quidem obſeruationes, quamuis vſui geographico rigore ſummo reſpondere nequeant, theoriae tamen Satellitum inſeruire videntur, cum loca iſtorum et geocentrica et heliocentrica ſimul reſpiciant. Scilicet tempore oppoſitionis Solis et Iouis vmbra Iouis ab eius diſco tecta immediatam immerſionis vel emerſionis obſeruationem non concedit; ſed appulſus tantum diſculi Satellitis ad Iouis marginem annotare tunc licet, ad quos exactiori modo diſcernendos Tubum Gregorianum ita inſtruxi, vt iſte obiecta ſecundum diametrum 97. vicibus amplificaret. Hoc apparatu et Satellites et faſciae Iouis, caelo optime fauente, nitide conſpici potuerunt. Praeter faſcias *m*, *n*, verſus borealem et meridionalem Iouis marginem conſpicuas duae maiores *ab*, *cd*, ad ſenſum inter ſe parallelae, diſcum Iouis ita traiiciebant, vt extremitas tum borealis *ab*, tum auſtralis *cd*, a centro diſci diſtaret $\frac{1}{8}$ diametri Iouis, et vnaquaeque dimidio huius interualli centrum verſus lata eſſet; quantum qui-

dem ſenſuum iudicio conſtitit. Figura ſitu erecto hor. 8. 23′. delineata eſt, et faſciae *ab*, *cd*, ſucceſſu temporis per omnes obſeruationes ſequentes ſitum hunc ſecundum apparentiam conſeruarunt. His praemiſſis

Tempore vero

8^h. 18′. 8″. Satelles primus ad marginem Iouis orientalem prope extremitatem faſciae *ab* inferiorem inſtar tuberculi in conſpectum venire incipiebat. Intra pauca temporis ſecunda hic certus ſum.

18. 28. Egreſſum Satellitis certe fieri optime conuincebar.

20. 3. Emerſio totalis accidit, qua ſcilicet Satelles inſtar diſculi margine ſuo occidentali limbum Iouis orientalem tangebat ad 1. in figura. Satelles ſecundus, qui ad Immerſionem appropinquabat, tunc circiter ad 2. poſitus erat. (Tab. XIV. Fig. 3.)

46. 24. In acceſſu Satellitis 2di ad Iouem interuallum inter limbum diſculi Satellitis orientalem et marginem Iouis occidentalem aequale diametro Satellitis 2di aeſtimaui.

56. 40. Certe credebam, Satellitem 2dum margine ſuo orientali nunc tangere limbum Iouis occidentalem ad *i* in figura. In hoc aeſtimio intra minutum temporis certus ſum.

9. 0. 40. Dimidium diſculi Satellitis a limbo Iouis tectum iudicaui.

6. 0. Satelles ſecundus vltima vice inſtar tuberculi

culi admodum exigui ad limbum Iouis occidentalem videri potuit ; ſtatim poſt e conſpectu ereptus eſt.

11^h. 44′. 10″. Satelles 2dus inſtar tuberculi ad orientalem Iouis limbum prorumpere primum cernitur.

46. 10. Dimidium diſculi Satellitis emerſerat.

48. 20. Diſculum Satellitis margine ſuo occidentali in contactum cum Iouis margine ad *e* peruenire credebam.

49. 20. Contactus certe celebratus erat. Emerſio igitur multo citius abſoluta fuit, quam Immerſio. Inclinata erat ſemita Satellitis *ie* ad faſciam *ab* orientem verſus.

Correctionem temporis altitudines Solis reſpondentes praebuerunt, pariter ac in obſeruatione ſequente.

Die 10. *Nouembr.*

Tempore vero

5^h. 18′. 50″. Contigit Emerſio prima Satellitis 1mi ex vmbra Iouis. Licet coelum videretur vaporoſum et crepuſculum adhuc duraret ; tempore emerſionis tamen Iupiter cum Satellitibus et faſciis optime conſpici potuit. Obſeruatio facta eſt ope Teleſcopii Gregoriani ſub apparatu, quo iſtud obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus auget.

Die 24. *Decembr.*

Eodem Teleſcopii apparatu, quo d. 10. Nouembr. vſus eram, eclipſin Satellitis tertii Iouis animaduertere licuit.

licuit. Immerſionis obſeruationem quidem nubes ſubinde interuenientes turbarunt. Sic enim

Tempore vero

$4^h. 28'. 45''$. Satelles 3tius ſenſibiliter lumine decreſcere videbatur, reliquis Satellitibus probe conſpicuis, donec

29. 6. Satelles lumine valde diminutus vna cum Ioue a nube e conſpectu eriperetur, qui non niſi

30. 21. Iterum concedebatur, et per 4. vel 5. ſecunda temporis tantum durabat. Satellitem tunc immerſum deprehendi, ſicet iſtum ſemel vel bis lumine admodum debili, quaſi in inſtanti Immerſionis totalis, adhuc coruſcare crederem, incertus tamen. Interim pro certo habeo immerſionem totalem accidiſſe inter $4^h. 29'. 6''$. et $4^h. 30. 21''$; et a vero non multum aberrabis, ſi eam ponas ad $4^h. 30'. 10''$.

31. 7. Iupiter nubibus denuo liberatus diſtincte docebat Satellitem 3. euanuiſſe

$7^h. 13'. 21''$. Contigit Emerſio prima Sat. 3. ad diſtantiam a proximo Iouis limbo $= 1\frac{1}{2}$ diam. ♃ ad ſenſum. Obſeruatio eſt exacta, coelo admodum ſereno.

16. 20. Lumine pleno Satelles effulgebat.

Modum, quo temporis correctio inſtituta hic fuit, deſcriptum inuenies in ſequente Eclipſis lunaris recenſione.

OBSER-

OBSERVATIO
ECLIPSIS LVNAE PARTIALIS
d. 23. *Decembr.* 1749.

Tempus in hac obſeruatione ad duo horologia oſcillatoria comparaui, quorum ſtatum reſpectu temporis ſiderei ex altitudinibus Capellae iisdem, diebus 23. et 25. Decembr. captis, optime cognoui. Inde etiam innotuit ſtatus eorundem reſpectu temporis veri ſolaris, et calculus variis eiusmodi altitudinibus ſuperſtructus meridiem verum d. 23. Decembr. conſenſu egregio in dictis horologiis patefecit.

Tempore vero

$7^h. 32'. 0''$. Penumbra ad marginem Lunae medio loco inter Phocilidem et Schillerum diluta ſe oſtendebat. Obſeruatio facta eſt Tubo aſtron. 6. ped.

38. 30. Penumbra manifeſta in dicto loco per Tubum eundem.

40. 17. Initium Eclipſis fieri creditur. Obſeruationem hanc, prout et omnes ſequentes, niſi expreſſe aliud moneatur, peregi ope Teleſcopii Gregoriani ſub eo apparatu quo iſtud obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus auget. In hac obſeruatione intra 20 ſecunda temporis certus ſum. Forſan initium paulo citius momento notato contigit, puta $7^h. 40'. 7''$. Stellula quaedam videbatur in vicinia marginis obſcu-

rati Lunae, intenſitate luminis circiter aequipollens Satellitibus Iouis, prout hi per tubum iam memoratum conſpici ſolent. Haec ſtellula appropinquabat ad punctum peripheriae lunaris, quod (quantum iudicio ad maculas lunares comparato conſtitit) a puncto limbi lunaris centro Schickardi normaliter reſpondente circiter 17. vel 18. gradus peripheriae lunaris diſtabat verſus regionem Tychonis. In hoc loco etiam ſtellula,

7^h 47'. 9''. ab obſcurato quidem, aſt adhuc luce debili donato, Lunae margine occultabatur. Stellula, antequam diſparebat, diſculo ſuo, cuius diametrum circiter = 2''. aeſtimabam, tota intra marginem Lunae conſpiciebatur, et ſtatim poſt diſparitio in inſtanti contigit. Indicium inde petere licet, marginem Lunae, eclipſi quamuis affectum, ex luce ſpuria tamen adhuc augmentum aliquod capere.

54. 17. Vmbra tangit Tychonem.
55. 22. Vmbra per medium Tychonis.
56. 27. Tycho totus in vmbra.
Vmbra hic bene terminata apparuit.
8. 11. 30. Vmbra lente accedit ad Bullialdum.
12. 27. Vmbra certe tangit Bullialdum.
14. 17. Totus Bullialdus in vmbra
31. 48. Totus Fracaſtorius in vmbra
38. 0. Vmbra nunc diluta cernitur coloris ſubrutili.
8^h. 44'. 10''. Vmbra appellit ad St. Theophilum.

46.

46'. 26".		Vmbra per medium St. Theophili.
47. 36.		Totus St. Theophilus in vmbra.
		Obſeruationes huius maculae, vmbra nunc male terminata, paulo incertae ſunt.
49. 36.		Vmbra ad Goclenium.
51. 36.		- - - per medium Goclenii
53. 36.		- - - totum Goclenium inuoluit.
		Meliori paulo ſucceſſu peractae ſunt obſeruationes iam enumeratae.
9^h.	26. 30.	Tycho incipit emergere. Obſeruatio dubia.
	27. 18.	Medium Tychonis emergit. Obſeruatio bona.
	28. 28.	Tycho totus emerſus.
		Nubes nunc coelum occupabant.
	57. 30.	Lunam in hiatu nubium conſtitutam per teleſcopium terreſtre 3. ped contemplans, finem eclipſis poſt 2. vel 3. minuta prima temporis inſtare indicabam. Ipſam autem finis obſeruationem nubes denuo ſuperuenientes impediuerunt. Ninxit poſtea.

Obſeruationes Meteorologicae.

In thermometro mercuriali conſueto notaui frigus maximum d. 11. Ianuar. hor. 9. matutina 176 $\frac{1}{2}$ grad. calorem autem maximum d. 9. Auguſt. hor. 4. poſt merid. 104$\frac{1}{8}$. grad.

D. 22. *Septembr.* circa hor. 8. veſpertinam aurora borealis ingens conſpicua erat. Praeſertim autem radii (vel potius radiorum plurium congeries) colorem rutilum prae ſe ferentes, tum Borolybicum, tum Graecum verſus, vsque ad Zenith fere extendi videbantur. Eandem auroram Romae quoque viſam fuiſſe ex nouis publicis poſtea conſtitit.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS

An. 1750. d. 8. Ianuar. ſt. n. temp. ciuil. horis antemeridianis Lipſiae habita

a

G. HEINSIO.

Coelum quidem diebus 7. et 8. Ianuarii obſeruationibus tum pro correctione temporis, ad duo horologia oſcillatoria numerati, tum ipſius Eclipſis optime fauit; circumſtantiae tamen nonnullae limites quosdam ipſis circumſcripſerunt. Sic tempus verum ex altitudinibus Solis reſpondentibus rigore ſufficienti cognoſcere vicinia Solis ad horizontem, accedente ſitu obſeruatorii mei non ſatis idoneo, non permiſit. Quamobrem ad explorandum horologiorum ſtatum altitudines Capellae quadrante conſueto diebus 7. et 8. Ianuar. captas adhibui, et ex reſpondentibus eundem reſpectu temporis ſiderei optime cognoui, egregio conſenſu cum iis obſeruationibus, quas in ſcopum ſimilem diebus 23. et 25. Decembri an. 1749. inſtitueram, ſiquidem dicta horologia interuallo temporis a 23. Decembr. vsque ad 8. Ianuar. non interrupto ordine motum conſeruauerant. Sic quoque altitudines Capellae diebus 7. et 8. Ianuar. captae, ſubducto calculo, ſtatum horologiorum reſpectu temporis veri ſolaris conſenſu exoptato patefecerunt, ita vt de temporis dimenſione exacta nullus ſupereſſet ſcrupulus.

Quod Eclipſin ipſam attinet, ſitus obſeruatorii adſpectum Solis non niſi hor. 9. 21′. conceſſit, quo momento Eclipſis iam multum proceſſerat. Ab eo tempore vsque

vsque ad finem Eclipſis Solem optime deinceps contemplari licuit. Maculae inſignes in Sole erant conſpicuae, ad quas appulſus Lunae annotare ſatagebam, quem in ſinem quoque poſitionem macularum in diſco Solis et reſpectu diurni, ope Machinae parallacticae, Tom. I. Nou. Commentar. p. 483. deſcriptae, durante adhuc Eclipſi obſeruabam, quam ſchema ſitu erecto exhibet. Macula *a* prae ceteris maxima erat et nigerrima, halone ingenti cincta, ad quam ſurſum in aliqua diſtantia macularum minorum catena excurrebat. Hanc catenam vna cum halone in computum non traho, quotiescunque in ſequentibus maculam *a* nomino, ſed nucleum tantum eius nigerrimum ſubintelligo. Nucleus iſte per tubos minores integer quidem, aſt per Teleſcopium Gregorianum ex aliquot partibus interuallo exiguo lucido a ſe inuicem ſeiunctis compoſitus videbatur; has tamen partes coniunctim ſumtas pro nucleo maculae *a* in ſequentibus habeo, dum appulſus Lunae ad maculam *a* noto. Maculae *b* et *d*, licet ad magnitudinem ipſius *a* non aſſurgebant, prae reliquis tamen diſtinctae et nigerrimae apparebant. Tab. XIV. Fig. 4.

His ita expoſitis appulſus Lunae ad maculas ſequentes animaduertere licuit.

Temp. vero
ante meridiem

9^h. 22′. 24″. Peripheria Lunae maculam *a* tangebat, obſeruatio facta eſt ope Tubi aſtronomici 5. ped.; copia enim Teleſcopii Gregoriani nondum dabatur.

— 23. 15. Peripheria Lunae per medium maculae *a*.

9ʰ	23′.	56″.	Vel aliquot ſecunda ſerius, macula *a* tecta. Terminus ſcilicet phaſeos figuram vndulantem tunc referebat, ob vapores in aëre volitantes. Vtraque obſeruatio per eundum Tubum 5 ped. peracta eſt. Sequentibus obſeruationibus inſeruiit Teleſcopium Gregorianum, ſub apparatu, quo iſtud obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus amplificat.
10.	0.	38.	Medium maculae *a* emergit.
10.	0.	58.	Integer nucleus maculae *a* emergit.
—	10.	24.	Maculam *d* tangit peripheria Lunae.
—	11.	5.	Per medium maculae *d* tranſit peripheria Lunae.
—	11.	33.	Tota macula *d* immerſa. Obſeruatio haec paululum dubia eſt.
—	51.	42.	Medium maculae *d* emergit.
—	52.	17.	Macula *d* tota emergit.
11.	12.	32.	Finis Eclipſis maxime propinquus.
—	12.	36.	Finis nunc certe contingit.

Intercapedines harum obſeruationum locum faciebant determinationi poſitionis macularum in diſco Solis et reſpectu diurni, ope Machinae parallacticae, ſic quidem, vt poſt immerſionem maculae *a* poſitio maculae *d* ab Eclipſi liberae definiretur, quam ad hor. 9. 45′. refero. Emerſa macula *a* cum reliquis adiacentibus, poſitiones macularum *a*, *b*, *f*, obſeruatae ſunt, quas ad hor. 10. 35′. alligo. Obſeruationes macularum omnium excepta macula *f*, reiteratis vicibus, conſenſu optimo, ſunt inſtitutae, ex duabus autem maculis ad *f* notatis per *f* intelligo inferiorem. Re-

Repraeſentent *p s* portionem diurni limbi ſuperioris Solis (ſitu ſcilicet erecto,) circulus *π σ* Solis diſcum, *π* limbum Solis praecedentem, *σ* ſequentem. Rectae *π p*, *σ s*, perpendiculares ad *p s*, tangant diſcum in *π*, *σ*, vt *p s* diametrum Solis apparentem exhibeat, cuius quantitatem in partibus temporis ſolaris ex mora tranſitus diſci Solis per horarium exprimere licet = 2′. 21¼″, obſeruationibus conſentientibus. Intelligantur per maculas *b*, *a*, *f*, *d*; rectae *b β*, *a α*, *f Φ*, *d δ*, parallelae ad *π p*. His factis, in iisdem temporis partibus

pro mac. *b* inueni *p β* = 0′. 31″, *b β* = 1′. 32″.
- - - - *a* - - - *p α* = 0. 41¼′, *a α* = 1. 19½.
- - - - *f* - - - *p Φ* = 0. 55¼, *f Φ* = 1. 23.
- - - - *d* - - - *s δ* = 0. 17, *d δ* = 1. 1.

Obſeruatae ſunt etiam poſitiones macularum *a* et *d* horis antemeridianis die 7. Ianuar. eaeque ad hor. 11. 32′. adſtrictae, ita definitae, vt

pro mac. *a* eſſet *p α* = 0′. 54¾″, *a α* = 1′. 19″.
- - - - *d* - - - *s δ* = 0. 9½, *d δ* = 1. 1.

Cum motus macularum iſtarum in diſco Solis hoc modo pro dato tempore conſtaret; aſſignare quoque licuit earum poſitionem ad id tempus, quo vnaquaeque macula obſcurationem maximam paſſa eſt. Contigit haec pro macula *a* die 8. Ianuar. hor. 9. 42′; pro macula *d* hor. 10. 31′. proxime, ad quae ergo reſpectiue tempora

pro mac. *a* ſtatuere licebit *p α* = 0′. 41¾″, *a α* = 1′. 19½″.
- - - - *d* - - - *s δ* = 0. 16¾, *d δ* = 1. 1.

Hanc maculae *a* vel *d* poſitionem durante eius Eclipſi, ob exiguum temporis interuallum, conſtantem ſumſi,

ſumſi, vt ope iſtius concluſiones nonnullae poſſent formari.

Obſeruatio Eclipſis noſtrae calculum multum anticipauit. Sic in Calendario Lipſienſi ponitur Finis Eclipſis Lipſiae hor. 11. 29′. 34″; et in Ephemeridibus *Manfredii* hor. 11. 31′, cum obſeruatio hor. 11. 12′. 36″. finem factum eſſe doceat. Vt igitur quaedam calculi elementa pro circumſtantiis obſeruationi noſtrae corrigere liceret; elementa in Calendario Lipſienſi ex Tabulis *Caſſini* ad proiectionem Eclipſis efficiendam propoſita ita adhibui, vt poſitionem ſemitae viſae centri Lunae reſpectu diſci Solis immoti et meridiani ſeu circuli horarii proxime obtinerem, diuiſione ſemitae iſtius ratione temporis ex obſeruatione finis eclipſis quodammodo iam correcta. Sumſi nempe

Parallaxin Lunae horiz.	=	0°.	59′.	44″.
Latit. Lunae bor. in ☌	=	0.	41.	53.
Inclinat. viae viſae centri penumbrae ad circulum latitud.	=	84.	21.	45.
Angulum Eclipticae cum meridiano	=	82.	21.	—
Horarium Lunae a Sole verum	=	0.	33.	5.
Semidiametrum penumbrae	=	0.	32.	31.
Semidiam. Solis (conſentientem cum mora eius per circ. horarium)	=	0.	16.	20.
Semidiam. Lunae horiz.	=	0.	16.	11.
- - - - - in altit. quam Sol circiter habuit tempore Eclipſis	=	0.	16.	13.
Declinationem Solis auſtral.	=	22.	15.	20.
Eleuat. Aequator. Lipſ.	=	38.	38.	—

Facile

Facile autem perſpexi, ſemitam viſam centri Lunae reſpectu diſci Solis immoti et circuli horarii methodo conſueta ex his elementis conſtructam de durationibus occultationum macularum *a* et *d* obſeruationibus, non aſſentire, ſed durationes iſtas iuſto minores prodere; quamobrem ſemitam iſtam curuilineam motu ſibi parallelo propius admoui ad centrum diſci ſolaris, donec conſenſus daretur inter durationes occultationum macularum, quas obſeruationes docebant, cum iis, quas ſchema ſic correctum ſuppeditabat, habita variabilis quantitatis motus ſemihorarii Lunae in hac ſemita ratione. Sic tandem, omnibus bene inter ſe conſentientibus, ſequentes formare licuit concluſiones. Inueni ſcilicet

Diſtantiam viſam centrorum ☉ et ☽ minimam	= 15′. 0″. circ. max.
Quantitatem partis diam. Solis obſcuratae in ☌ ſc ratione maxima	= 17. 33. — —
et inde Quantitatem Eclipſis	= 6. digit. 26⅟₅. min.
Tempus obſcurationis maximae viſae	= 9ʰ. 58′. 45″. t. ver.

Tranſlato deinceps hoc ſchemate particulari ſic correcto ad ſchema generale, quod proiectionem telluris exhibere ſolet, deprehendi

Latitudinem centri Lunae veram ſeu ex centro terrae viſam tempore ☌ ☉ ☽ verae ſeu Nouilunii veri eſſe debere	= 0°. 43′. 15″. bor.
et Tempus Nouilunii veri ſeu ex centro terrae viſi in Ecliptica	

ex Immerſione medii mac. *a*	=	10^h.	$16'$.	$12''$. t. vero
Emerſ. med. mac. *a*	=		16.	36.
Immerſ. med. mac. *d*	=		16.	21.
Emerſ. med. mac. *d*	=		16.	20.
obſeruato fine Eclipſis	=		17.	6.
vnde Medium	=	10^h.	$16'$.	$31''$.

RESIDVVM OBSERVATIONVM

Lipſiae an. 1750. ſt. nou. habitarum

Cum obſeruationes Eclipſis Lunae totalis d. 19. Iunii an. 1750. inclytae Academiae iam exhibitae, reſpondentes, nonnullas obtinuerim, expedit earum comparationem cum noſtra inſtituere, vt quorundam Meridianorum a Lipſienſi diſtantia inde innoteſcat. Eandem ſcilicet Eclipſin obſeruarunt Veronae *Io. Franciſcus Seguierius*, Tubo catadioptrico, Caſſellis *Griſchowius* nunc in Academia Imperiali Profeſſor Aſtronomiae, Berolini *Kieſius*, Göttingae *Segnerus* Teleſcopio Gregoriano. En obſeruationum comparationem:

	Lipſiae	Veron.	Diff. Merid. Lipſ. et Veron.
Grimaldus incipit emergere	10^h $38'$ $38''$	10^h $33'$ $34''$	0^h $5'$ $4''$
Tycho - - - -	55. 40.	49. 38.	6. 2.
Tycho totus emerſus -	57. 45.	52. 18.	5 27
Copernicus incipit emergere	11. 0. 28.	55. 23.	5. 5.
Manilius - - -	17. 12.	11. 12. 24.	4 48
Mare Criſium - - -	34. 36.	29. 10.	5 26
Finis Eclipſis - - -	40. 16.	36. 40.	3 36
			Med. 0^h $5'$ $4''$

Veronae

Verona occidentalior eſt quam Lipſia.

Tycho totus emerſit Caſſellis $10^h. 48'. 26''$, et finis ibi contigit $11^h. 29'. 16''$. Ex priori obſeruatione eruitur Meridianorum Lipſienſis et Caſſelenſis differentia $= 9'. 19''$.; ex poſteriori $= 11'. 0''$. vnde media $= 10'. 10''$. qua Caſſilium occidentalius eſt quam Lipſia.

Finis Berolini accidit $11^h. 46' 0''$. quare diſtantia meridiani Berolinenſis a Lipſienſi verſus orientem $= 5'. 44''$. Per medium Tychonis vmbra in emerſione tranſiit Lipſiae $10^h. 56'. 40''$. Göttingae $10^h. 47'. 48''$. Diſtat igitur meridianus Göttingenſis a Lipſienſi in occidentem $8'. 52''$.

D. 12 Auguſt.

Occultatio θ Serpentarii a Luna

Fixam hanc 4tae vel 3tiae magnitud. Luna transeundo ad diſtantiam aliquot minutorum a ſuo centro boream verſus relinquebat (ſitu erecto). Copioſae nubes coelum occupabant, vt Lunam non niſi per interualla in hiatibus nubium conſtitutam contemplari liceret. Inde factum eſt, vt obſeruatio ingreſſus ad marginem Lunae obſcurum in irritum ceciderit; feliciter autem Luna in conſpectum prodierit, cum iam ſtella, facto egreſſu ad limbum Lunae lucidum, ſua diametro ab hoc limbo diſtaret. Aeſtimaui inde emerſionem ipſam

 con-

contingere debuiſſe 8.^{h} 55.′ 53.″ temp. veri, et perſuaſum habeo, in hoc aeſtimio errorem 3 vel 4 ſecundorum temporis locum habere non poſſe. Hor. 8 56′ 25″ diſtantiam ſtellae a proximo Lunae limbo diametro maculae lunaris Manilii, et 8^{h}. 57′. 53″. diametro Copernici aequalem iudicabam. Obſeruatio peracta eſt Teleſcopio Gregoriano ſub apparatu, quo iſtud obiectum ſecundum diametrum 52. vicibus auget; correctio autem temporis ex altitudinibus Solis reſpondentibus diebus proxime ſequentibus ſuſcepta.

Obſeruationes variae

Frigus maximum hoc anno incidit in d. 4. Februar; quo hora 8. matut. Thermometrum, Tomo I. Nouor. Commentar. p. 469 deſcriptum, in aëre libero 166.$\frac{2}{3}$ grad. indicabat.

Verſus finem menſis Iulii ingentem experti ſumus aeſtum per plures dies a 20. Iulii ſcilicet vsque ad initium Auguſti durantem. Thermometrum memoratum aëri libero in loco vmbroſo verſus boream expoſitum ſingulis diebus calorem maximum patefecit:

			Lipſiae poſt merid.	grad	Berolini poſt merid. inter hor. 3. et 4.
Iulii	22.	.	hor. 4.	103 $\frac{1}{8}$	- 106 $\frac{6}{10}$
	25.	-	3 $\frac{3}{4}$.	106 $\frac{5}{8}$	- 109 $\frac{2}{10}$
	27.	-	4.	103 $\frac{1}{4}$	- 106 $\frac{2}{10}$

28.

	28.	-	4	103 $\frac{5}{8}$	-	107 $\frac{9}{10}$
	31.	-	1 $\frac{1}{4}$	107 $\frac{3}{8}$	-	
Aug.	1.	-	4 $\frac{1}{2}$	105 $\frac{1}{2}$	-	-

Obſeruationes Berolinenſes debentur Cel. *Griſchowi* thermometro ſcalae ſimilis cum meo inſtitutae.

Viſae quoque ſunt Aurorae boreales.

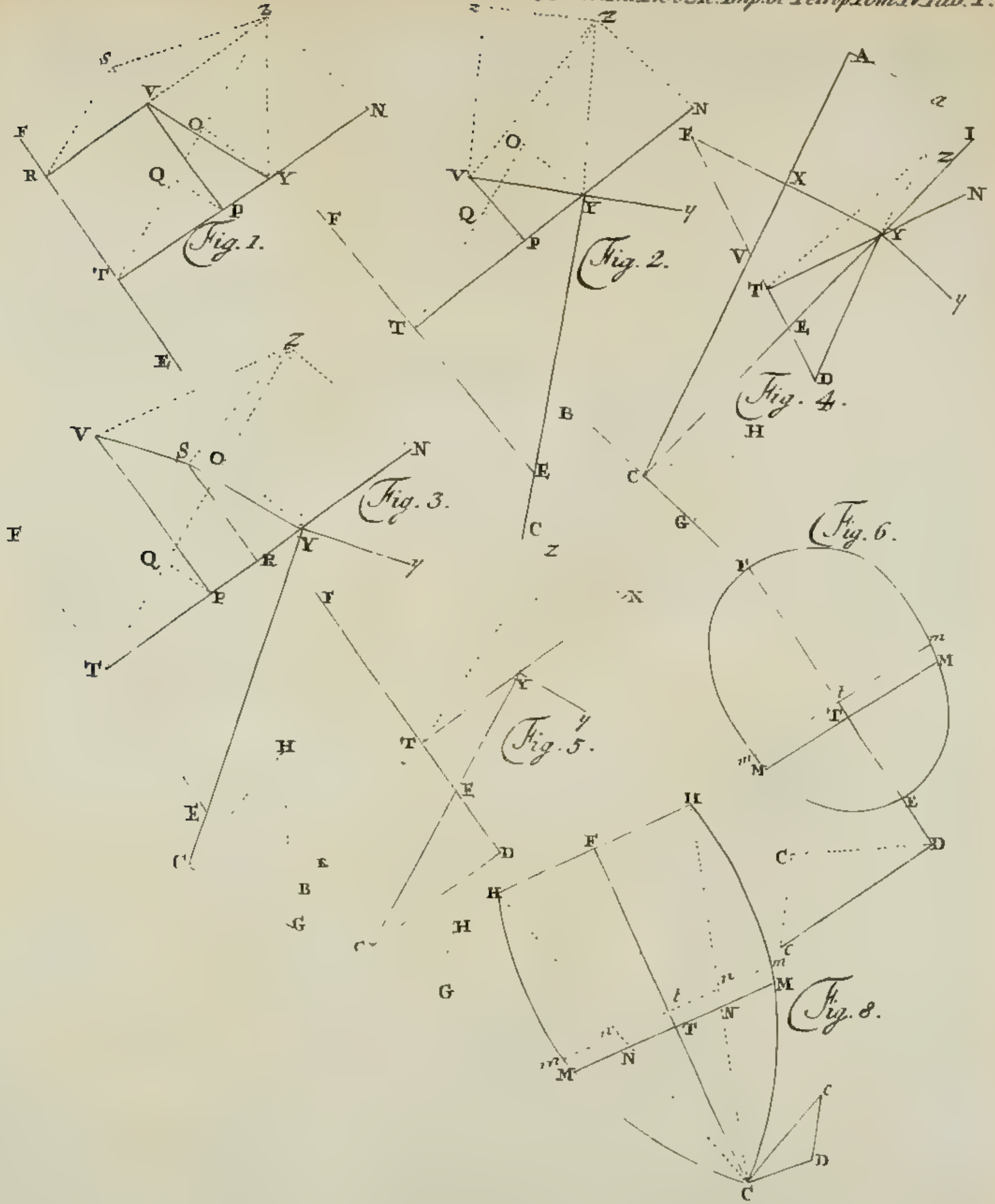
d. 3. Februar. ſtatim poſt hor. *6.* veſpertinam ingens eiusmodi aurora comparebat, ſiquidem tum Arctapelioten tum Borolybicum verſus ingentes materiae tractus inſtar nubium flammei coloris conſpicui erant, qui ſucceſſiue radiorum vel columnarum formas induentes vltra Zenith excurrebant, ab hoc tamen auſtrum verſus declinabant. Inclinati ſcilicet erant radii verſus horizontem iique etiam, quoad longitudinem, non continui (vt alias fieri ſolet) ſed interrupti cernebantur. Poſt horam nubes rutilae diſparebant; coelum autem, quod antea colorem cinereum, adſpectum tamen ſtellarum non impedientem, prae ſe ferebat, ſerenam faciem nunc nanciſcebatur, interea dum ingens claritas ad horizontem boreum in conſpectum prodibat. Aurora haec, teſtibus nouellis publicis, Romae quoque viſa eſt.

d 26 Iulii veſperi poſt hor. 10. coelo ſereno, cum aeſtus ingens in atmoſphera adhuc regnaret, columnae aurorae borealis apparebant.

d. 22. Septembr. veſperi hora 11. ingens aurora borealis conſpicua erat, columnis et tractibus materiae coloratae diſtincta.

Declinationem acus magneticae, cuius longitudo erat 2. digit. 3. lin. menſurae Pariſienſis, diebus 17. et 20. Auguſti reiteratis vicibus exploraui, eamque 13. grad. occidentem verſus deprehendi.

BRITISH
NATURAL HISTORY.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.

NATURAL HISTORY.

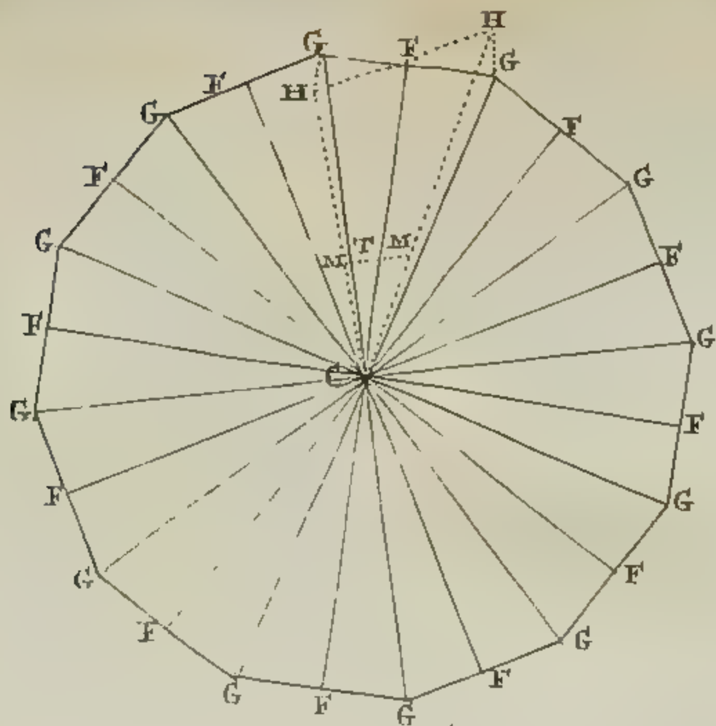


Fig. 1.

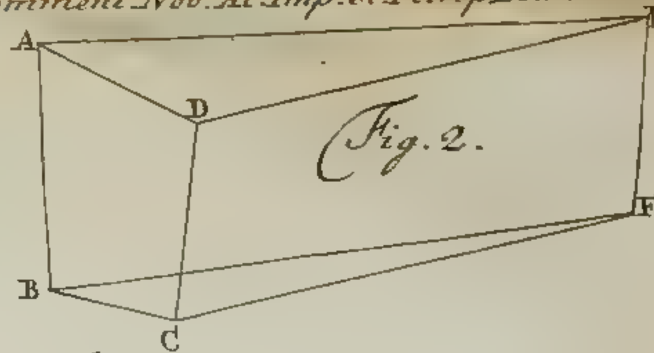


Fig. 2.

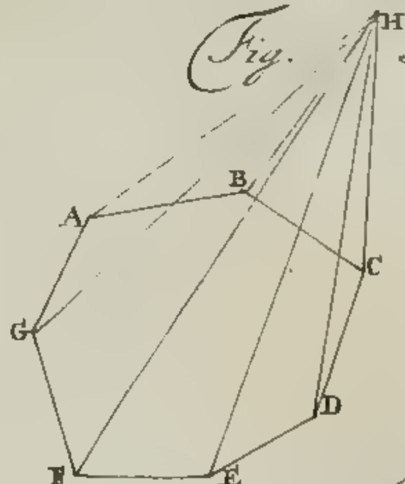


Fig. 3.

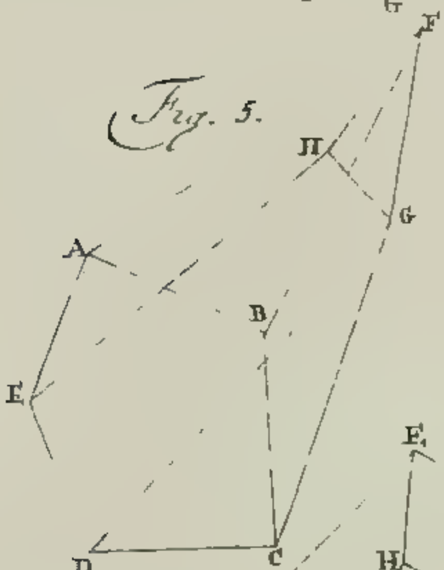


Fig. 5.

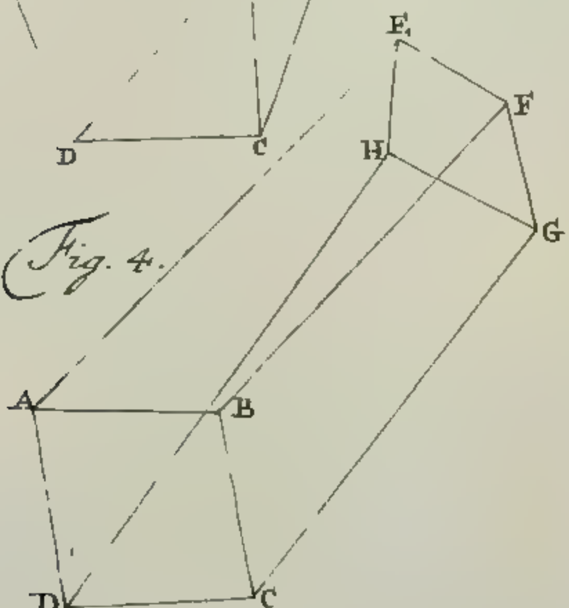


Fig. 4.

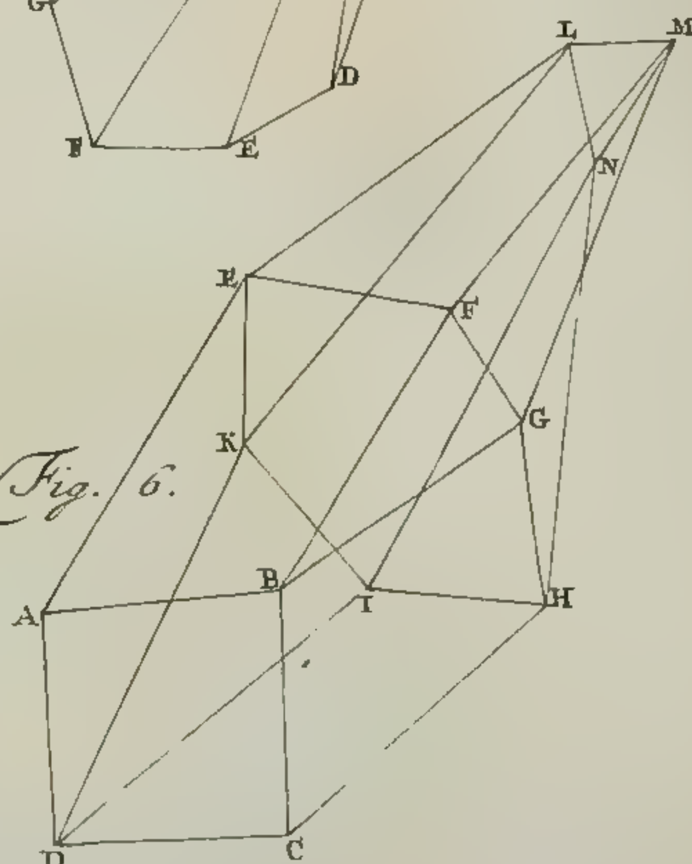
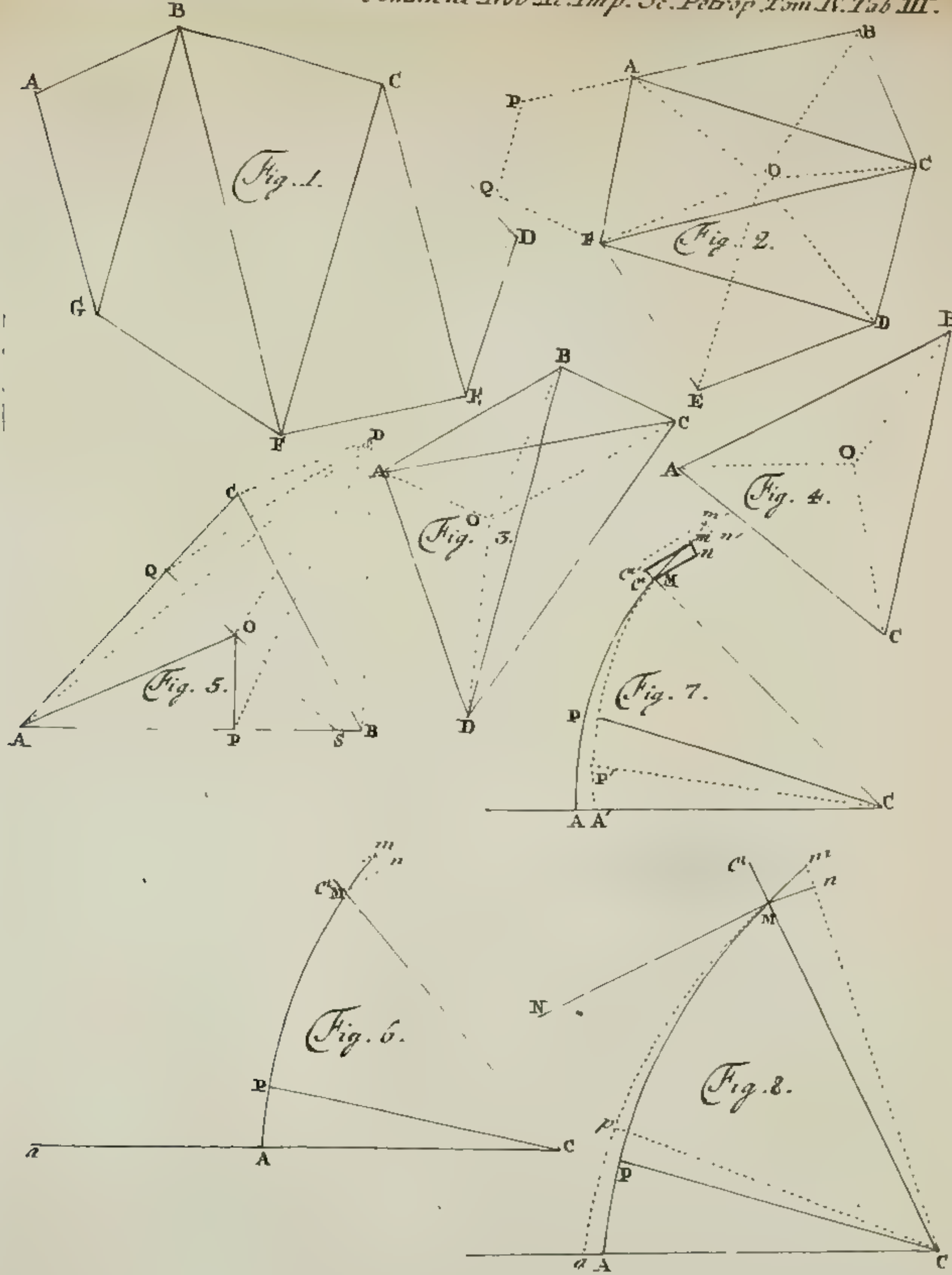
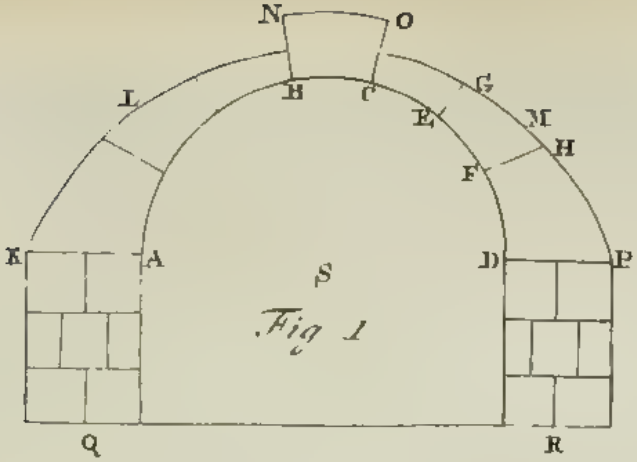


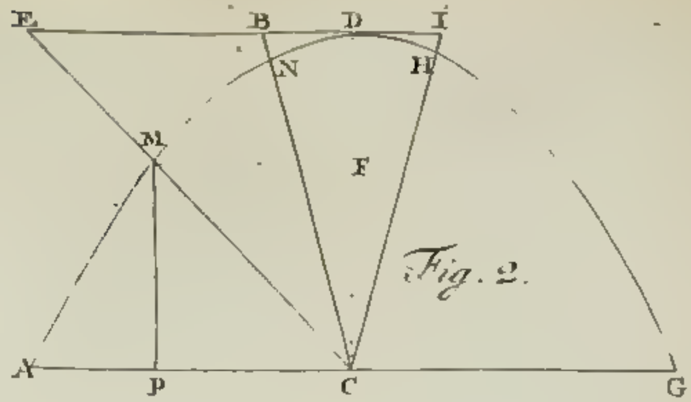
Fig. 6.

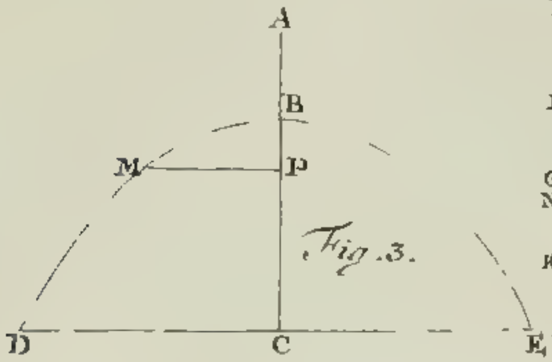
BRITISH
NATURAL HISTORY

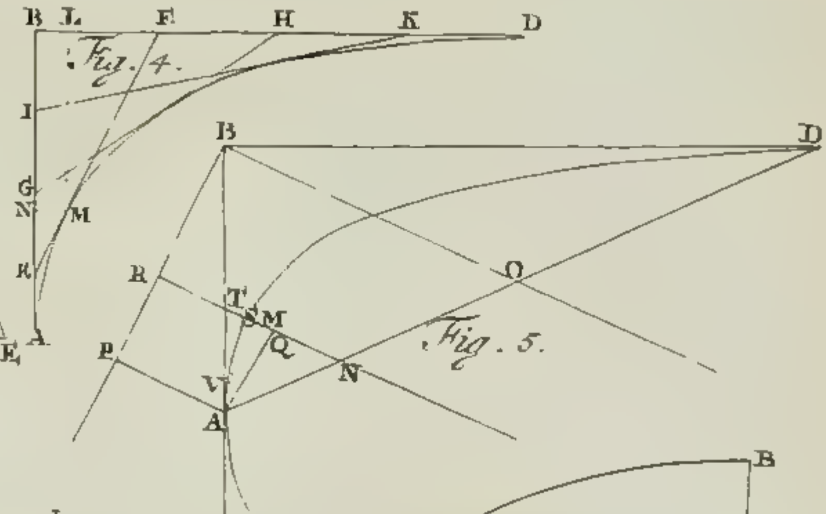

Fig. 1.
A
B
C
D
E
F
G
Fig. 2.
A
B
C
D
E
F
O
P
Q
Fig. 3.
A
B
C
D
O
Fig. 4.
A
B
C
O
Fig. 5.
A
B
C
D
O
P
Q
S
Fig. 6.
a
A
P
C
M
m
n
Fig. 7.
A
A′
P
P′
C
M
m
n
Fig. 8.
a
A
P
p
C
M
N
m
n

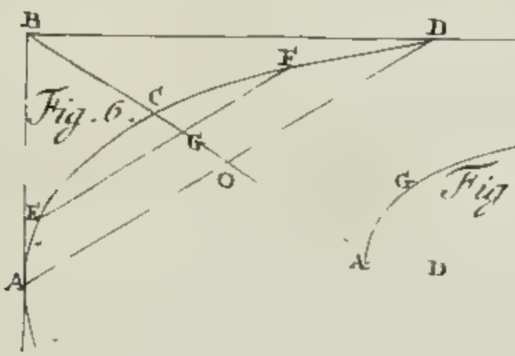
BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

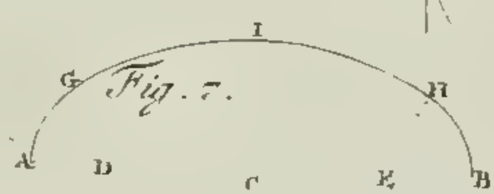

N O
L B C G
E M
F H
K A D P
S
Fig. 1
Q R

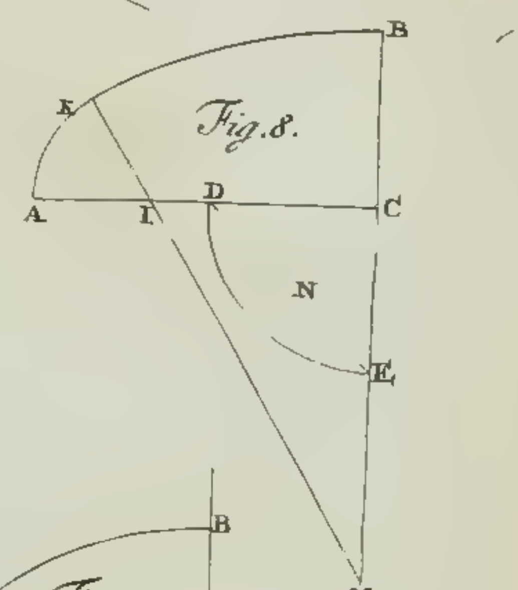

E B D I
N H
M
F
Fig. 2.
A P C G

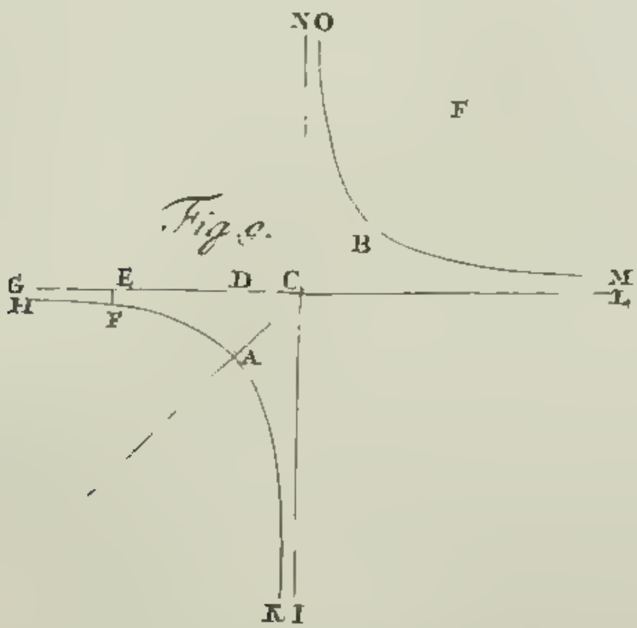

A
B
M P
Fig. 3.
D C E

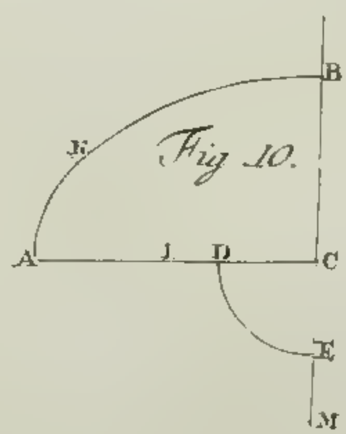

B L F H K D
Fig. 4.
I
G
N M
K
A
B D
O
R
T
S M
Q
Fig. 5.
P N
V
A


B D
F
C
Fig. 6.
G
O
E
A

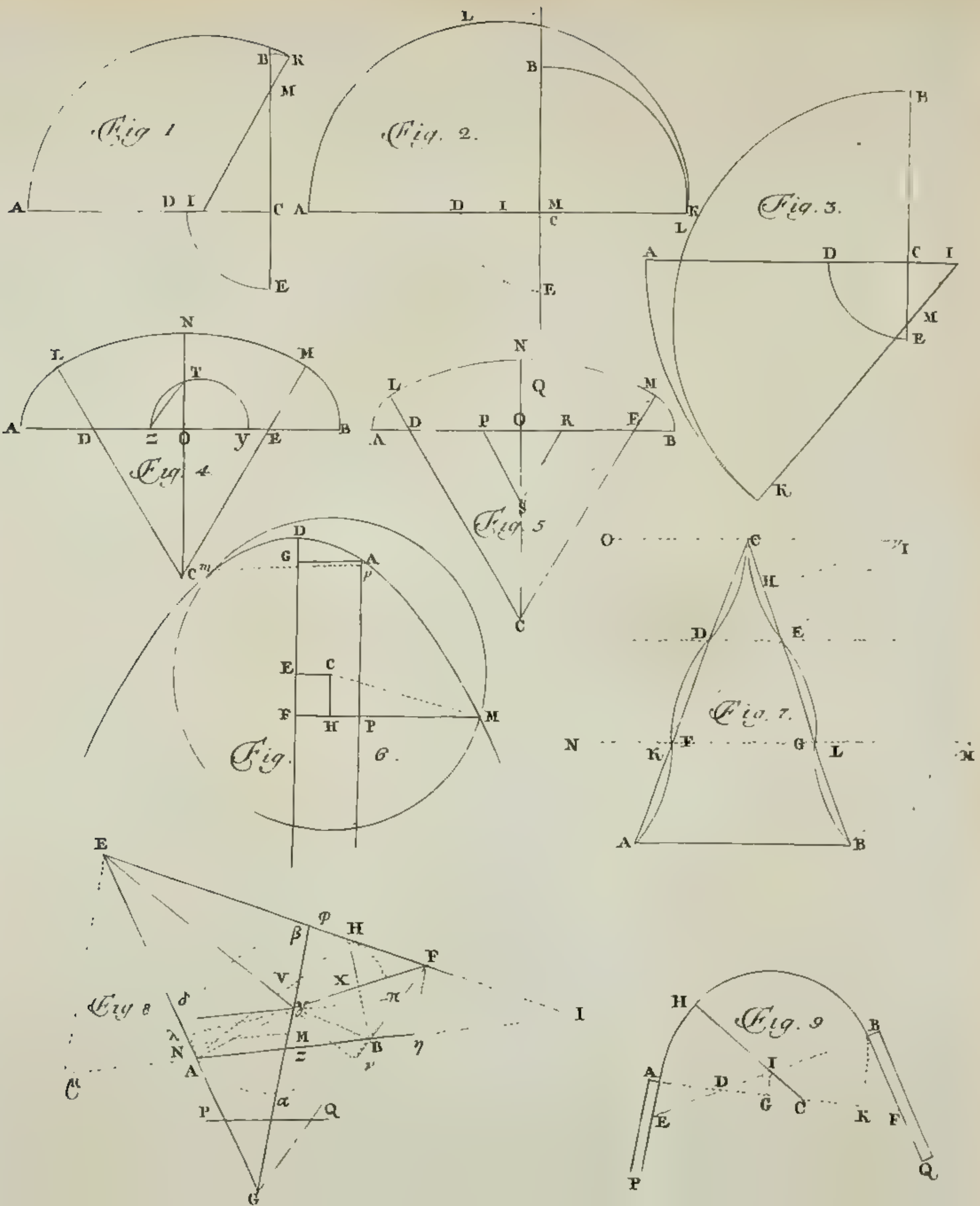

I
G Fig. 7. H
A D C E B


B
K
Fig. 8.
D
A I C
N
E
M

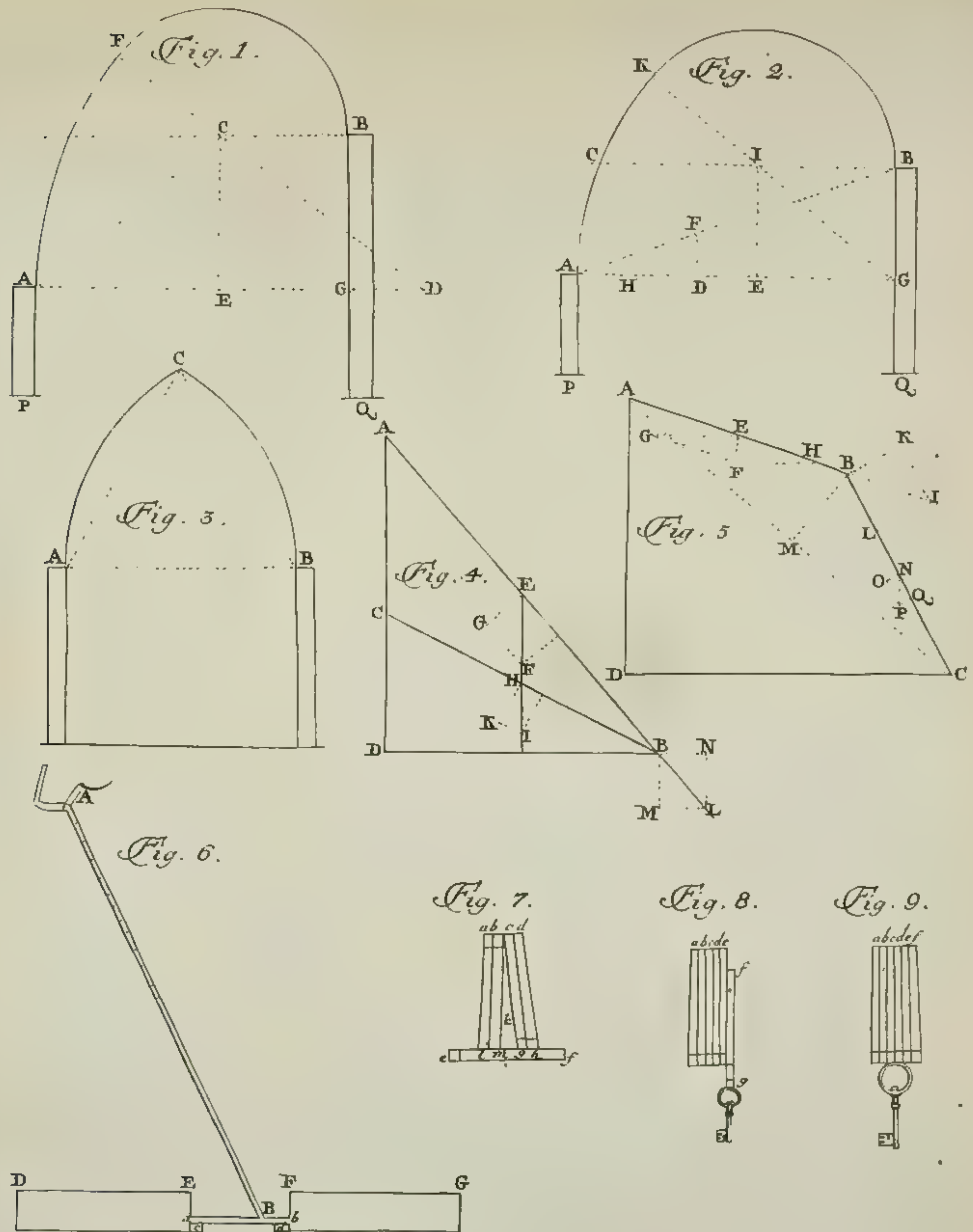

N O
F
Fig. 9.
B
G E D C M
H F L
A
K I


B
K Fig. 10.
A I D C
E
M

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9

NATURAL HISTORY


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

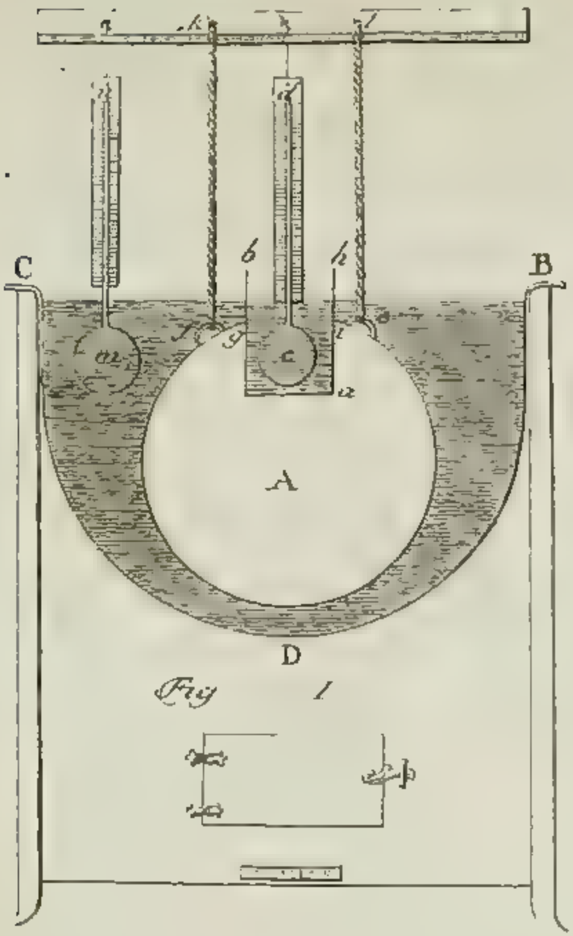


Fig. 1

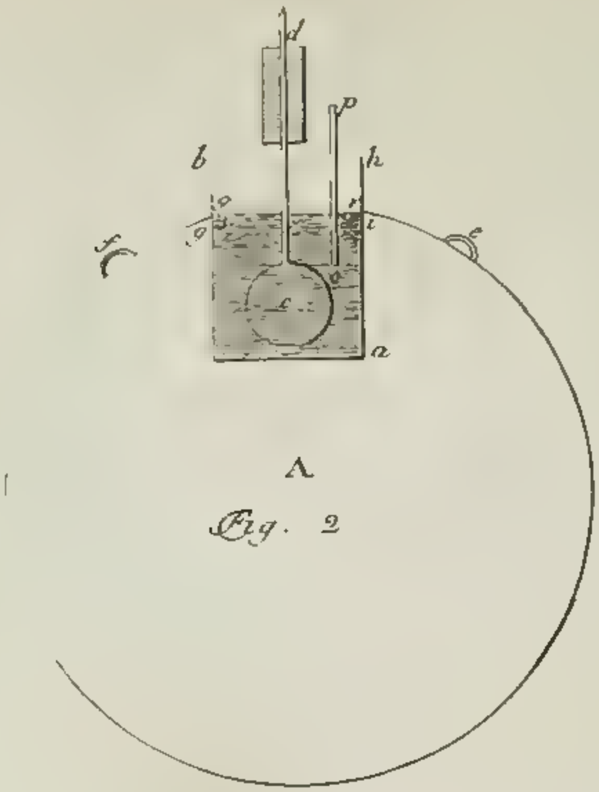


Fig. 2

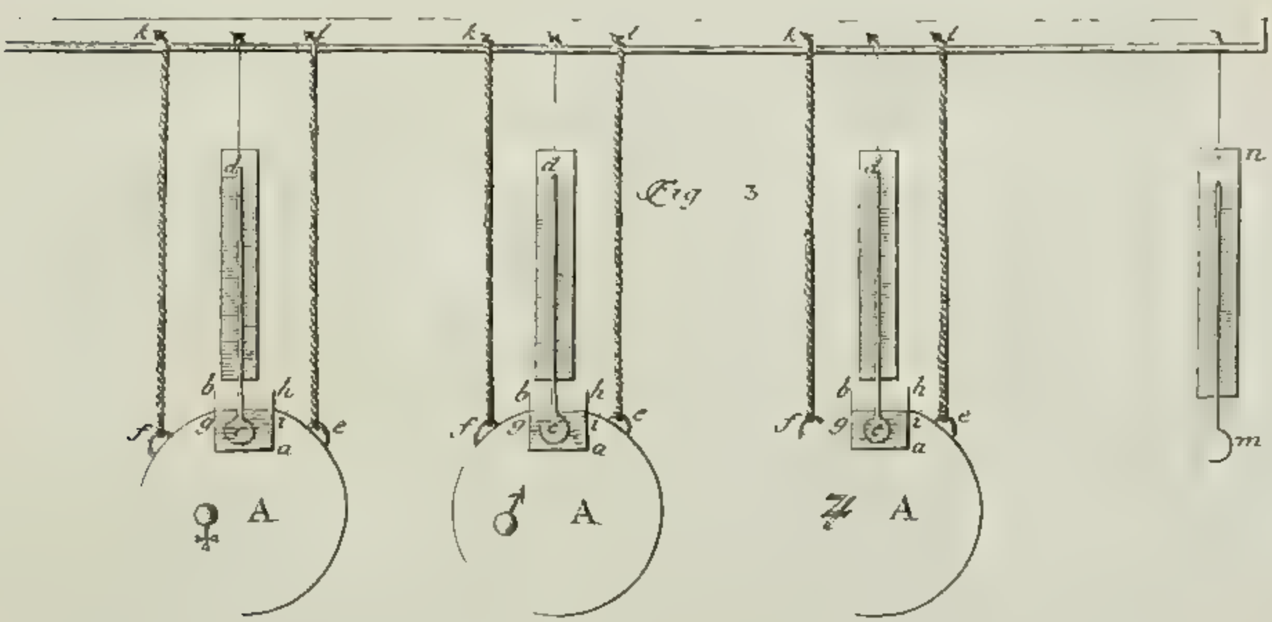
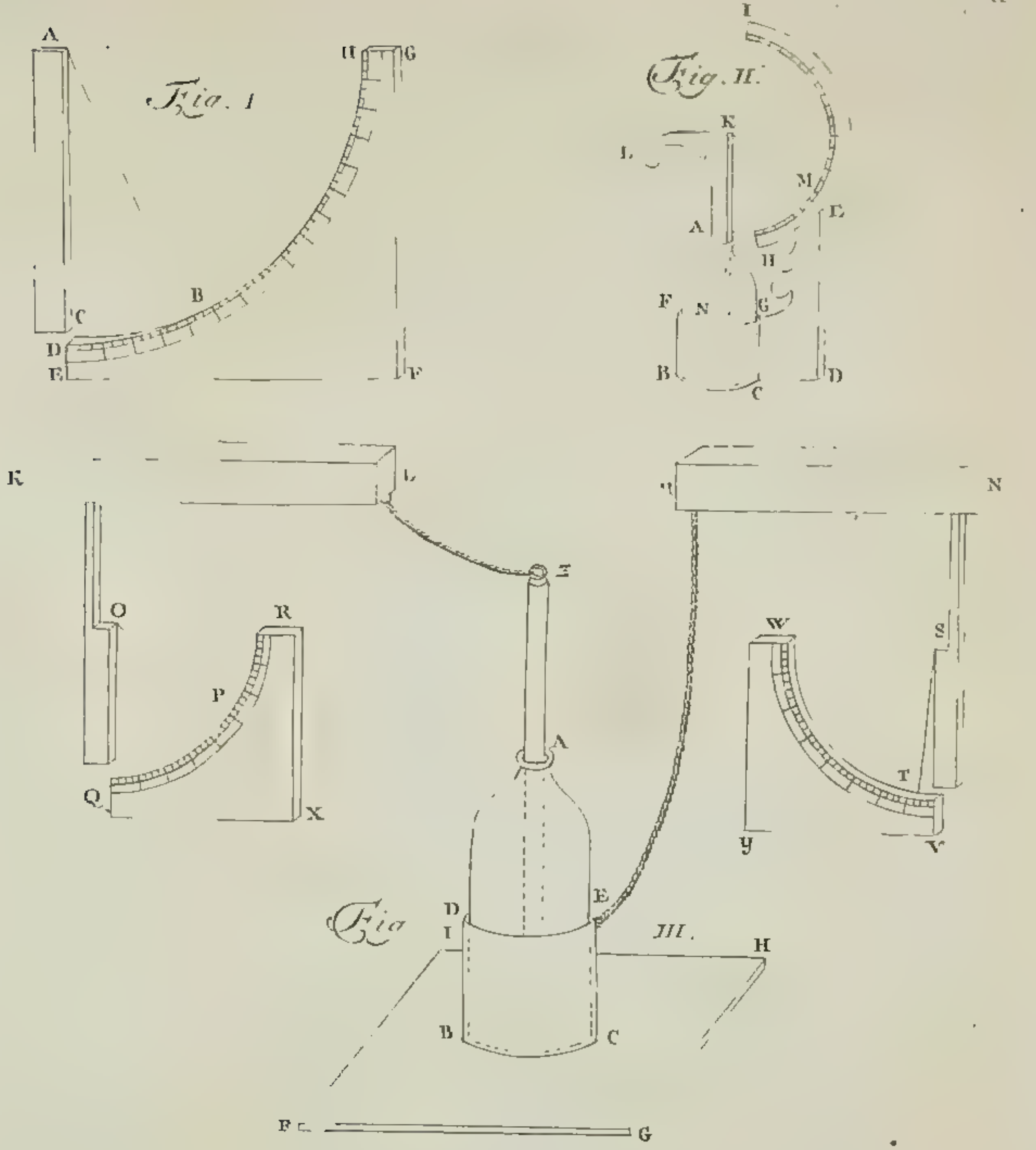


Fig. 3

BRITISH
NATURAL HISTORY.


Fig. I
Fig. II.
Fig. III.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
W
X
Y
Z

NATURAL HISTORY.

Fig. 1



Ad murem aquaticum exoticum, moschum redolentem.
a Cauda amputata
b. Pes posterior dextri lateris amputatus.
c. Locus, ubi penis corpus ingre-ditur.
d. Anus.
e. Locus, quo penis notabiliter tur-geſcit & incurvatur
ff. Testiculi.
gg. Folliculi.
h. Veſica urinaria.
i Appendicula folliculi ſiniſtri lateris.

Rupicapra cor-nubus arictinis

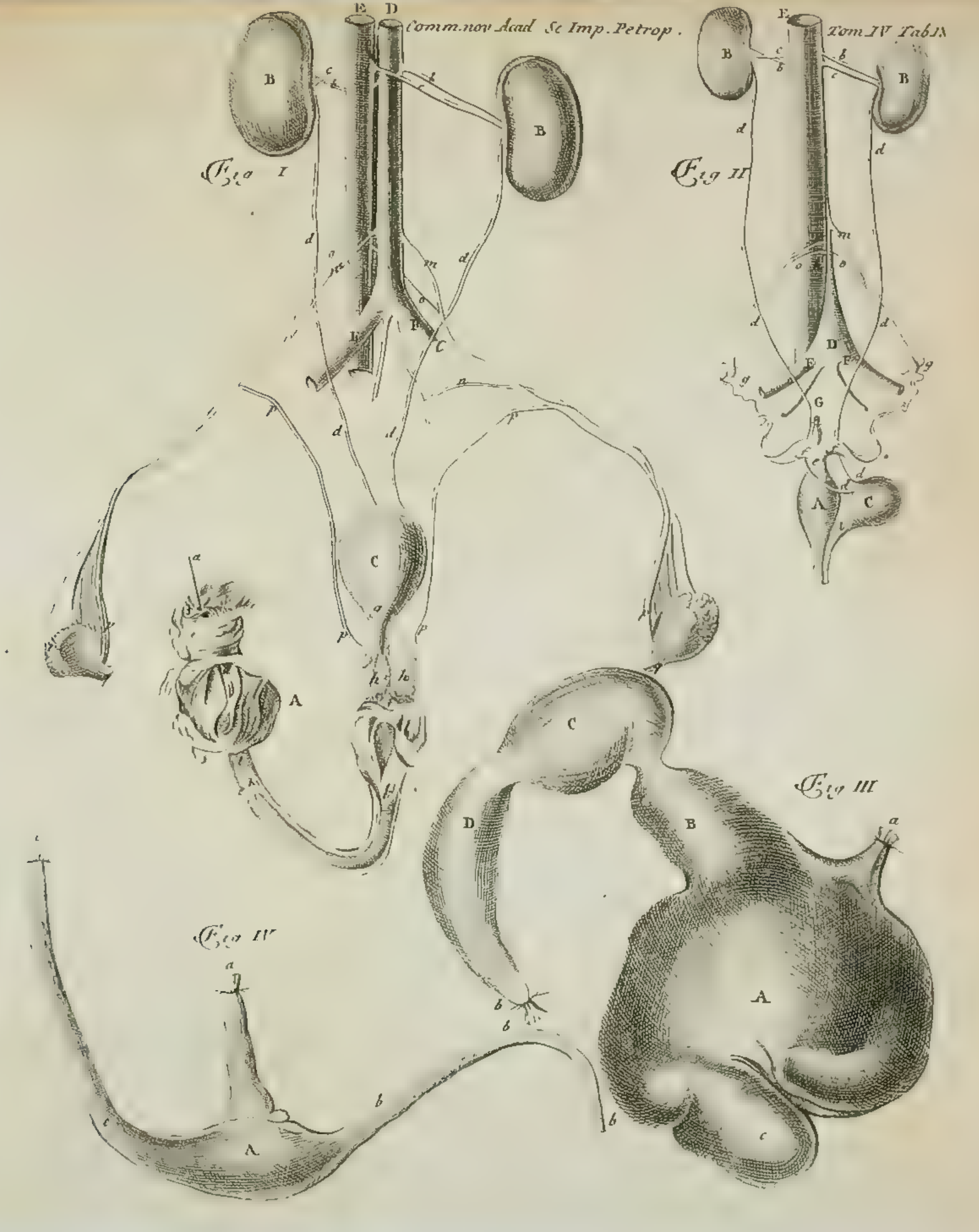
Fig. 2
Mas



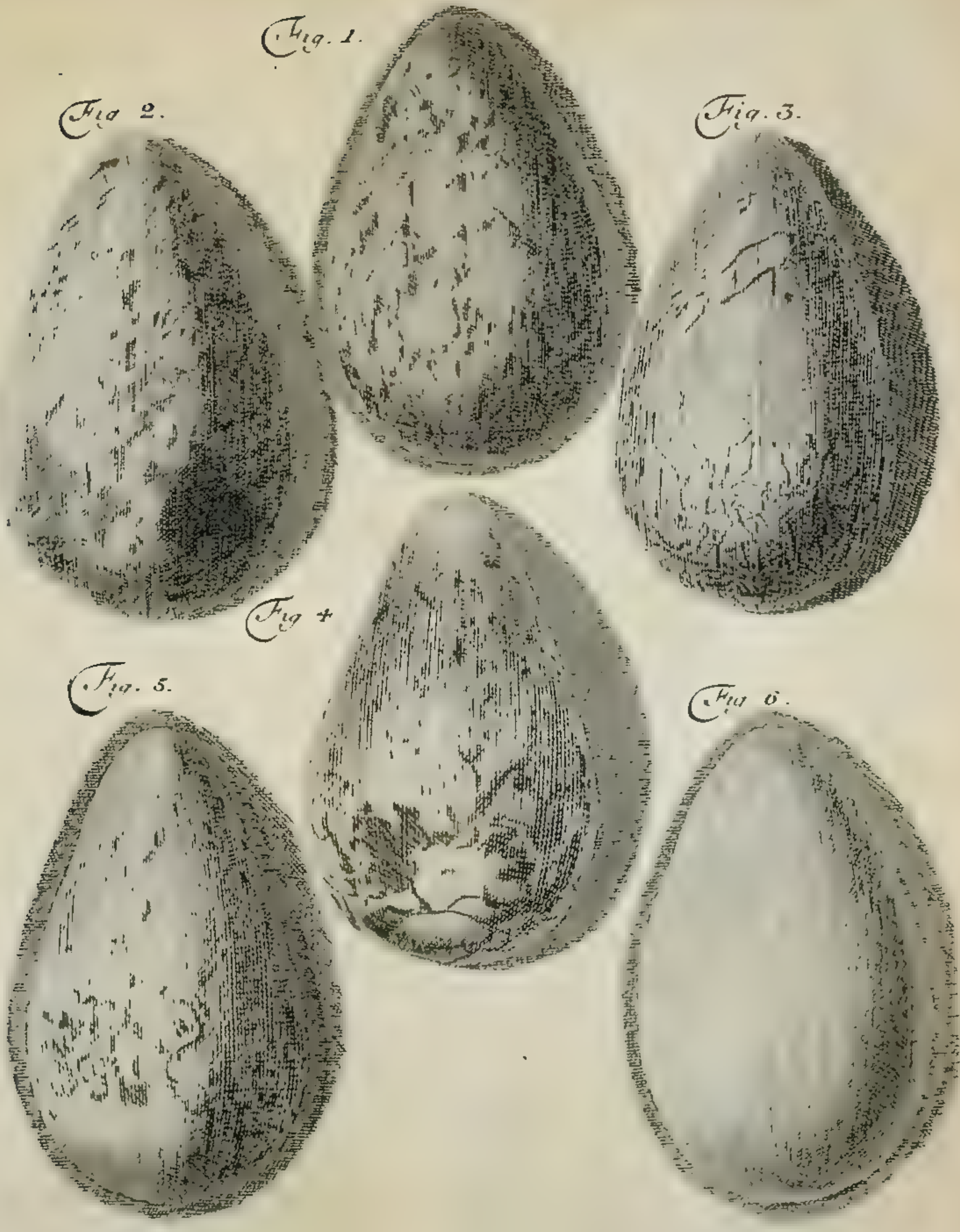
Fig. 3
Foemina.



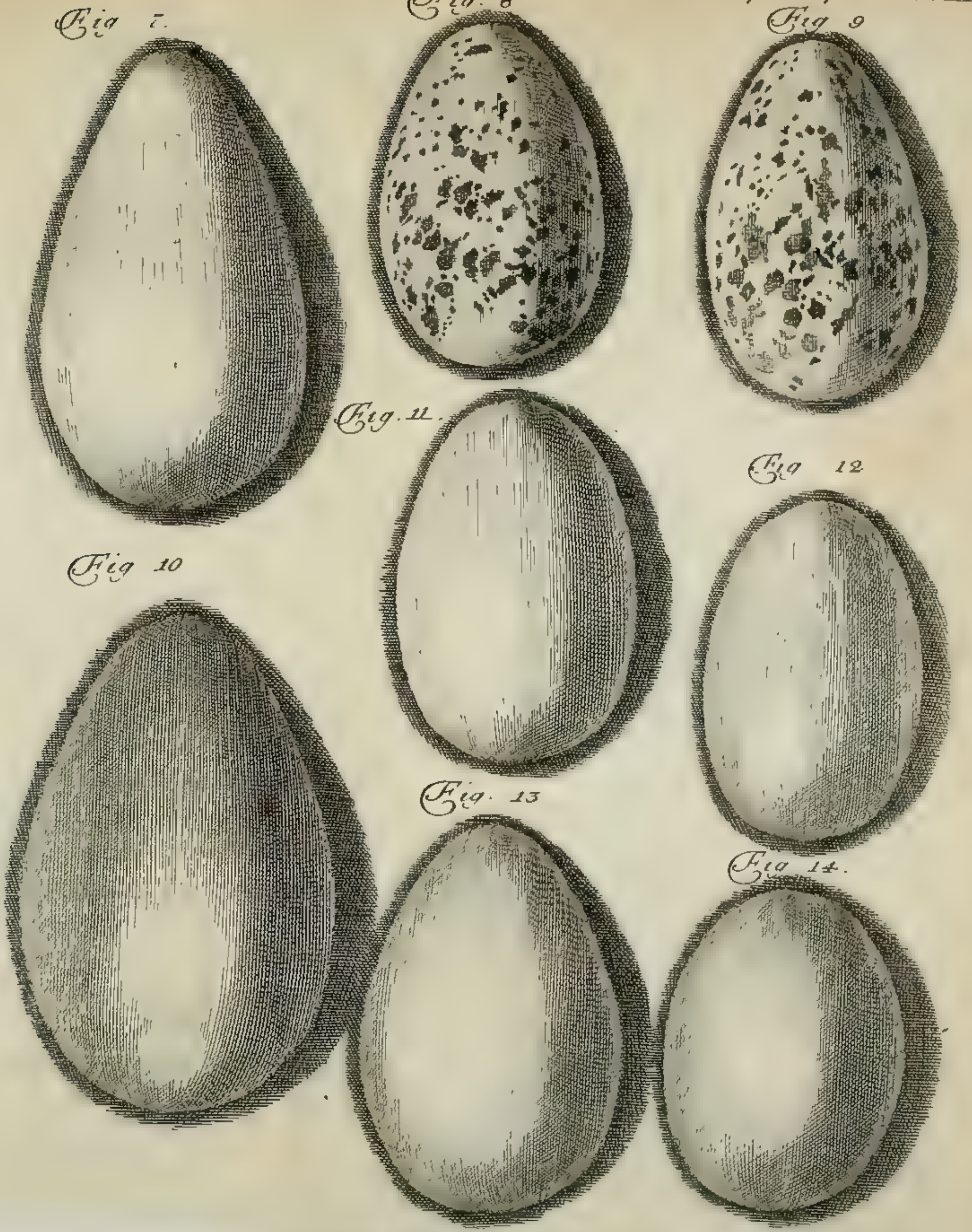
BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY.


Fig I
Fig II
Fig III
Fig IV

NATURAL HISTORY


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

BRITISH
NATURAL HISTORY


Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13
Fig. 14.

HISTORY

Fig. 15.



Fig. 16.

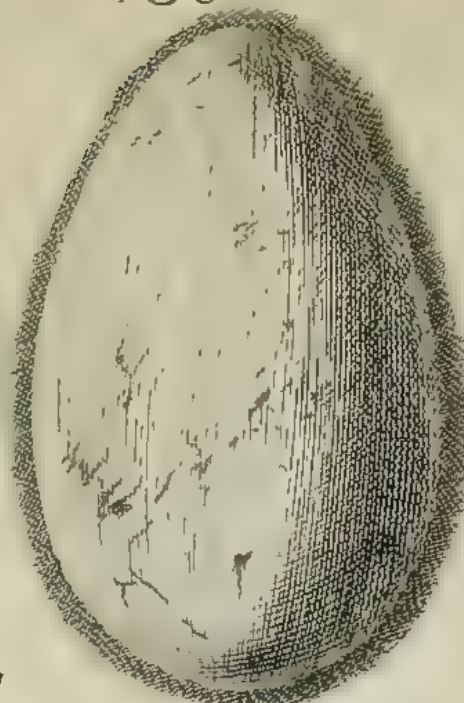


Fig. 17.



Fig. 18



Fig. 19.



Fig. 20



Fig. 21.



Fig. 22



NATURAL HISTORY

Fig: 23.



Fig: 24.



Fig: 27.



Fig: 25.



Fig: 26.



Fig 28.



Fig. 29.





NATURAL HISTORY

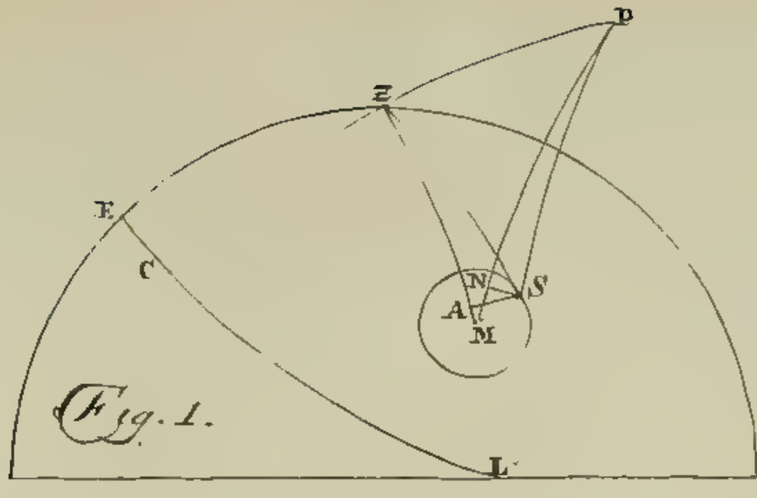


Fig. 1.

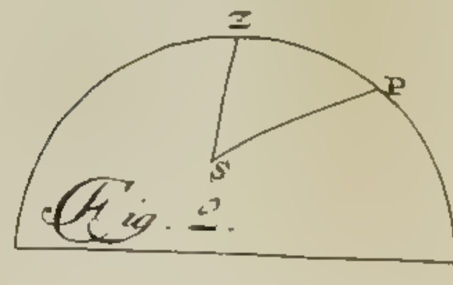


Fig. 2.

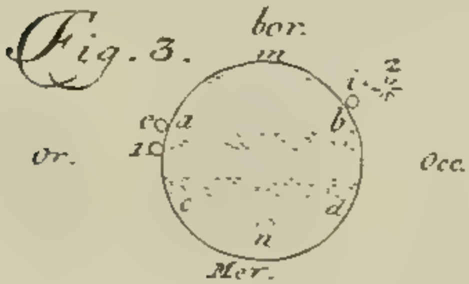


Fig. 3.

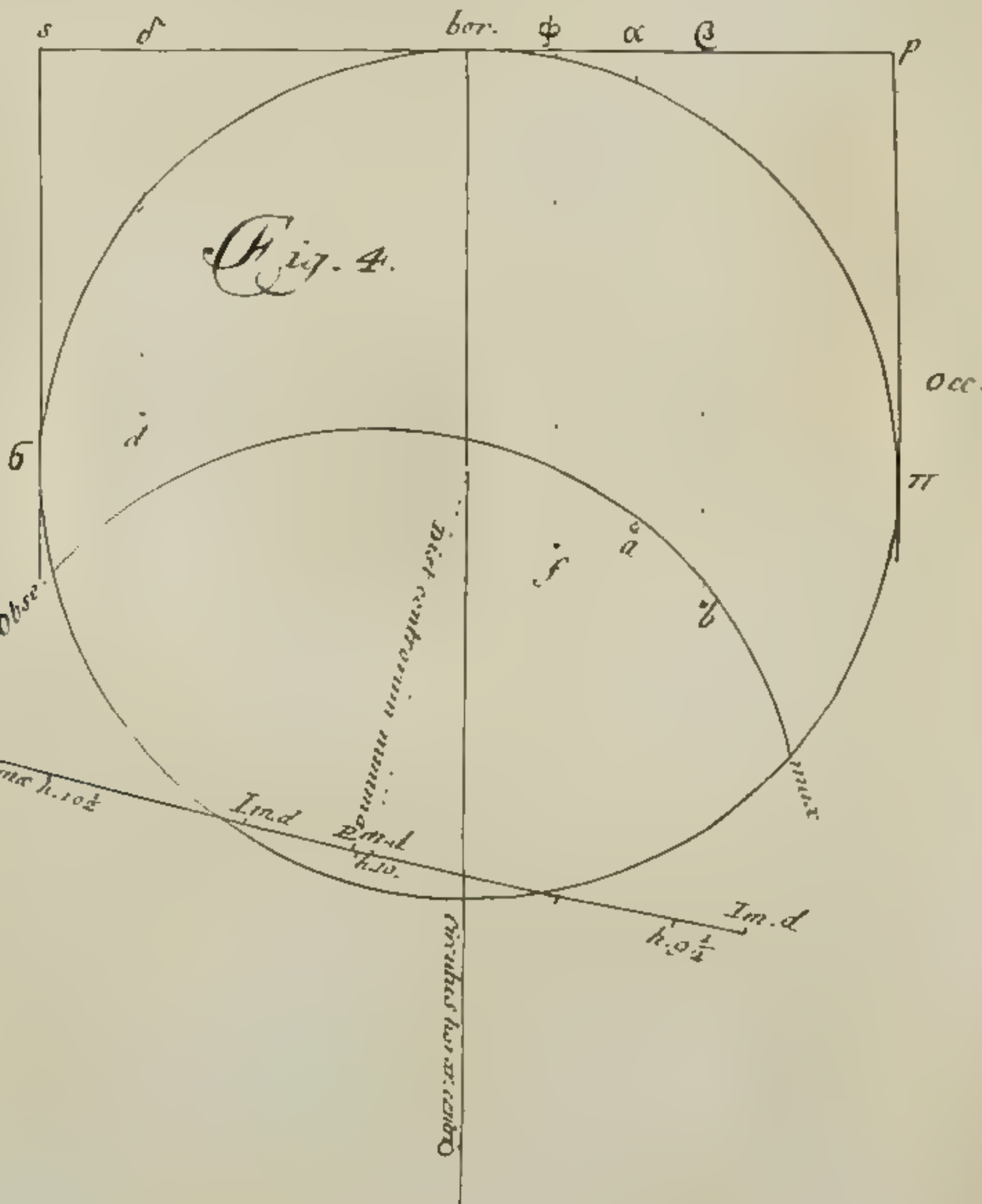


Fig. 4.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

BOUND BY